DIFFERENCIER PAR LES PROCEDURES : UN EXEMPLE POUR LA PROPORTIONNALITE AU CYCLE 3

Nathalie PFAFF
Professeure de mathématiques
site IUFM de Seine-Saint-Denis

Cet article propose une séance sur la proportionnalité. Vous pensez peut-être : encore une ! Et il est vrai que beaucoup de livres et d'articles traitent de la proportionnalité. Aussi, celui-ci n'a pas l'intention de révolutionner l'enseignement à propos de la proportionnalité, mais seulement de présenter une séance testée très positivement en CM2 et proposée plusieurs fois aux professeurs d'école en stage de formation continuée avec des retours favorables.
Je commencerai par rappeler brièvement les compétences attendues à propos de la proportionnalité au cycle 3. Ensuite, je situerai la séance dans la progression proposée dans une classe de CM2, puis je présenterai la séance et les résultats des élèves.

Quelles compétences sur la proportionnalité à la fin du cycle 3 ?

Les nouveaux programmes situent l'étude de la proportionnalité dans la partie intitulée exploitation de données numériques. La compétence attendue dans ce domaine se limite à la résolution de problèmes « en utilisant des raisonnements personnels appropriés »[1].
Charnay (1998) détaille, à partir d'exemples, les raisonnements que l'on peut attendre au cycle 3. « Au CM1 : 5 disques coûtent 42 F. Quel est le prix de 20 disques ? L'élève peut alors utiliser un raisonnement additif (20 disques, c'est 5 disques et encore 5 disques et encore…, donc 42 F et encore 42 F…) ou multiplicatif (20 disques, c'est quatre fois 5 disques, donc on paie quatre fois 42 F), raisonnements derrière lesquels le mathématicien reconnaîtra les propriétés de linéarité. Au CM2 : 8 disques coûtent 92 F. Quel est le prix de 12 disques ? L'élève peut prolonger le raisonnement précédent, en cherchant d'abord le prix de 4 disques (2 fois moins que 8) ou d'un disque (8 fois moins) avant de calculer le prix de 12 disques. »[2]
L'objectif de la séquence proposée à une classe de CM2 de Saint Denis (93), située en ZEP et constituée de 22 élèves vise à faire découvrir des procédures de résolution pour des problèmes relevant de la recherche d'une quatrième proportionnelle sans que ces procédures soient institutionnalisées en tant qu'objet d'enseignement.

---

[1] Ministère de l'éducation nationale (2002) : *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* CNDP
[2] R. Charnay (1998) : *De l'école au collège : les élèves et les mathématiques*. Grand N n°62

Présentation de la séquence d'enseignement

La séquence est composée de 8 séances dont la dernière consiste en une évaluation sommative. La progression des sept autres séances est établie en fonction des procédures que chaque situation se propose de favoriser par les situations.
Les premières situations sont conçues pour inciter l'emploi de la propriété additive de la fonction linéaire. Exemple (exercice de la 1ère séance) : La hauteur de 4 dominos identiques (pavés droits en bois), empilés les uns sur les autres, est 5 cm. Quelle est la hauteur d'une «tour » formée par 20 mêmes dominos, empilés les uns sur les autres ? La solution utilisant la propriété additive de la fonction linéaire repose sur la décomposition additive de 20 en fonction de 4, à savoir 20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4. La hauteur de 4 dominos est de 5 cm, donc la hauteur de 20 dominos est de 5 + 5 + 5 + 5 + 5 cm. L'utilisation de la fonction linéaire qui associe la hauteur en fonction du nombre de dominos permet d'écrire l'égalité suivante h(20) = h(4 + 4 + 4 + 4 + 4) ; h(20) représente la hauteur pour 20 dominos. La propriété additive de la fonction linéaire permet de déterminer la hauteur pour 20 dominos, soit h(20) = h(4) + h(4) + h(4) + h(4) + h(4) ; h(4) représente la hauteur pour 4 dominos, donc h(20) = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25.
A partir de la procédure additive, les situations évoluent pour que les élèves emploient une procédure multiplicative. Exemple (exercice de la 2ème séance) : le nombre de dominos qui constituent la « tour » augmente, il passe de 20 à 92. La procédure additive est coûteuse, il est préférable de s'apercevoir que 92 = 23 x 4 donc la hauteur de 92 dominos est égale à 23 multiplié par la hauteur de 4 dominos, à savoir 23 x 5 cm. La propriété multiplicative de la fonction linéaire permet de déterminer la hauteur pour 92 dominos, soit h(23 x 4) = 23 x h(4) donc h(92) = 23 x 5 = 115 cm.

Ces deux procédures sont ensuite utilisées comme référence pour reconnaître qu'une situation ne relève pas de la proportionnalité. Exemple : la hauteur d'une « tour » composée par 28 dominos est calculée, puis elle est mesurée effectivement mais pour une « tour » n'étant pas constituée de 28 dominos d'épaisseurs identiques. L'inadéquation entre le résultat calculé et celui mesuré permet de prendre conscience de la non proportionnalité dans le cas où les dominos n'ont pas la même épaisseur.
Au cours de la quatrième séance, ces mêmes procédures peuvent être réinvesties par les élèves dans une situation liant deux grandeurs de même nature. Exemple (exercice de la 4ème séance) : Une distance est mesurée avec un nombre de pieds, ceux de deux personnes différentes, l'enseignante et un élève. La même distance est mesurée par 8 pieds de l'enseignante alors qu'elle mesure 9 pieds de l'élève. A combien de pieds de l'élève correspond une distance mesurée par 24 pieds de l'enseignante ? La particularité de cette situation tient au fait que les grandeurs liées par la fonction linéaire sont les mêmes (la même distance) alors que les deux unités choisies pour les mesurer sont différentes bien que de la même espèce (il s'agit de pieds) ; ceci crée un obstacle supplémentaire à la découverte de la proportionnalité. En effet, ici, l'erreur additive est très fréquente ; elle consiste à considérer invariant l'écart entre le nombre de pieds de l'enseignante et celui de l'élève, quelle que soit la distance. Reconnaître la proportionnalité, nécessite de comprendre que cet écart croît avec la distance.
Enfin, les dernières séances incitent les élèves à découvrir la procédure consistant à passer par l'image de l'unité.

Les objectifs des différentes séances sont listés ci-dessous :
- Séance 1 : Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité en utilisant la propriété additive ou la propriété multiplicative de la fonction linéaire ;

- Séance 2 : Pour traiter une situation de proportionnalité, utiliser la propriété relative à la multiplication ;
- Séance 3 : Reconnaître et traiter une situation de proportionnalité en utilisant la propriété de la linéarité relative à la multiplication ;
- Séance 4 : Pour une situation de proportionnalité liant deux grandeurs de même nature, utiliser une procédure basée sur la propriété multiplicative de la fonction linéaire ;
- Séance 5 : Pour une situation de proportionnalité, repérer plusieurs procédures dont celle basée sur la recherche de l'image de l'unité ;
- Séances 6 et 7 : Reconnaître et traiter une situation de proportionnalité en réinvestissant les différentes procédures rencontrées ;
- Séance 8 : Evaluation.

La séance présentée ici est la cinquième qui permet de réinvestir les procédures utilisant les propriétés de la fonction linéaire (additive ou multiplicative) découvertes dans les séances précédentes mais qui incite à chercher une autre procédure basée sur la recherche de l'image de l'unité. Cette séance se déroule sous la forme d'un travail de groupes de trois ou quatre élèves. Le travail de groupes se justifie, ici, pour deux raisons : - l'accord des différents membres du groupe est nécessaire et, pour parvenir à cet accord, plusieurs procédures peuvent émergées et être discutées ; – le travail par groupes permet de limiter le nombre de productions. Celles-ci pourront toutes être explicitées lors de la mise en commun sans que cela soit trop long.

Présentation de la séance

Le matériel nécessaire pour cette séance est composé d'une balance Roberval et d'un grand nombre de billes identiques dont la masse unitaire est un nombre entier de grammes. (Dans la séance présentée ici, chaque bille pèse 3g).
Je présente aux élèves la balance composée de deux plateaux dont l'un est rempli avec 80 billes toutes identiques. Après avoir vérifié leur connaissance du fonctionnement de la balance, je leur pose le problème sous forme d'énigme à découvrir. Il s'agit de découvrir la masse des 80 billes. La pesée sur la balance ne servira que pour la vérification.
Pour découvrir la masse des 80 billes, ils peuvent acheter des indices. Chaque groupe dispose de 15 euros avec lesquels ils peuvent acheter des informations. Les informations possibles à acheter concernent la masse d'une certaine quantité de billes. On peut acheter les indications des masses suivantes : masse de 14 billes ; de 24 ; de 32 ; de 33 ; de 40 ; de 47 ; de 48 ; et de 79 billes. On peut acheter autant d'indices qu'on veut du moment que le prix total ne dépasse pas 15 euros. Pour cela, chaque groupe dispose d'un bon de commande qu'il complète en fonction des indices qu'il souhaite acheter (annexe 1). Certains indices sont plus chers que d'autres. Le groupe gagnant est celui qui trouve la masse de 80 billes mais en dépensant le moins d'argent possible.
Le prix est fixé en fonction de la difficulté de la procédure permettant de calculer la masse des 80 billes. L'indice le plus cher (10 euros) est celui indiquant la masse de 40 billes (120 g) qui permet de déterminer la masse de 80 billes avec la procédure reposant sur la propriété additive de la fonction linéaire : masse de 80 billes = masse de 40 billes + masse de 40 billes. De nombreuses procédures permettent de trouver le résultat. Par exemple, l'achat des deux indices, ceux donnant la masse de 32 billes (2 euros) et la masse de 48 billes (4 euros), permet de calculer la masse des 80 billes. Pour cela, il faut remarquer que $80 = 32 + 48$ puis utiliser la propriété additive de la fonction linéaire $m(32+48) = m(32) + m(48)$. L'indice le moins cher (1 euro) est celui donnant la masse de 79 billes, qui nécessite d'avoir recours à l'unité pour trouver la réponse. Avec cet indice informant que la masse de 79 billes est 237 g, on peut calculer la masse d'une bille en divisant 237 par 79

pour ensuite calculer la masse des 80 billes. Cette procédure est beaucoup plus difficile à utiliser que celle basée sur l'additivité de la fonction linéaire.
L'objectif de la séance est de faire émerger cette procédure basée sur le recours à l'unité, sans nécessairement que tous les élèves la découvrent. Beaucoup d'autres procédures sont possibles et la séance a comme objectif principal de découvrir plusieurs procédures différentes. En ayant un grand choix de procédures possibles, tous les élèves peuvent réussir la tâche et c'est ce qui est attendu. Cette situation s'inscrit dans le cadre de la pédagogie différenciée où la différenciation porte sur les procédures. C'est une des stratégies de différenciation citée par le groupe Ermel[3] : « Il s'agit, pour l'enseignant, d'accepter, voire de valoriser le fait que, dans certains activités, chacun réponde avec sa propre solution, ses propres procédures […] Le rôle des moments d'échange, de débat, de mise en commun de ces procédures variées est alors fondamental et permettra, progressivement, la prise de conscience de l'équivalence des procédures et de la priorité relative de l'une sur l'autre à certains points de vue. »

Pendant la recherche par groupe, le rôle du maître est multiple ; il faut vérifier la compréhension de la consigne, relancer les groupes qui bloquent en reformulant le but de la tâche ou les groupes qui se contentent très rapidement de la procédure la plus simple mais la plus chère, gérer, si besoin, les conflits internes dans un groupe, échanger l'indice ou les indices avec l'argent correspondant mais cet échange ne s'effectue qu'après un assez long temps de réflexion. Le temps pour la recherche est fixé à 15 minutes et annoncé aux élèves dès le départ. Cela peut aider les groupes découvrant immédiatement la procédure la plus simple et la plus chère à s'engager dans une autre recherche puisqu'ils disposent encore de temps. Cela permet aussi aux groupes en difficulté pour trouver une procédure économique de se rabattre sur la procédure chère à la fin du temps imparti. Chaque groupe dispose d'une calculatrice, les difficultés dans les techniques opératoires ne devant pas être un obstacle à la résolution du problème.

Après la recherche par groupe, la mise en commun fait ressortir les différentes procédures utilisées. Un rapporteur par groupe indique la masse déterminée et l'argent dépensé en expliquant la méthode employée. A ce niveau, les élèves ne connaissent pas encore la bonne réponse même si certains sont sûrs de la leur. D'autre part, ils ne savent pas s'ils ont gagné c'est-à-dire si c'est leur groupe qui a dépensé le moins d'argent. Cela permet à la mise en commun d'être écoutée par tous les élèves à condition qu'il n'y ait pas trop de groupes pour ne pas alourdir le temps de confrontation des procédures. Un nombre de six groupes paraît être un maximum.

La validation des différentes procédures peut s'effectuer avec la balance. Une première pesée permet de vérifier le résultat de la masse des 80 billes (240 g), les autres pesées permettent de vérifier les calculs intermédiaires ; par exemple, la masse d'une bille (3g).

Il est possible qu'aucun groupe ne découvre la procédure basée sur la recherche de l'image de l'unité. Dans ce cas, une fois la validation des différentes procédures employées, une nouvelle recherche est lancée. L'enseignante valorise toutes les méthodes exposées mais précise qu'un groupe dans une autre classe a trouvé une procédure qui coûte un euro. Il s'agit maintenant de découvrir ce moyen. La recherche des élèves est donc orientée vers l'utilisation de l'information de la masse de 79 billes. Avec celle-ci, ils doivent découvrir la procédure basée sur le calcul de la masse d'une bille. Cette découverte est facilitée par le fait qu'ils connaissent maintenant la réponse concernant la masse de 80 billes, qui leur permet de contrôler leur calcul.

[3] ERMEL (1995) : *Apprentissages numériques CE2*. Hatier

Après cette phase, une trace écrite est prévue. Elle consiste à rédiger trois procédures différentes dont celle utilisant le calcul de la masse d'une bille. (Annexe 2)

Résultats des six groupes

La séance a duré 55 minutes. La présentation a été un peu longue (10 min) mais les élèves étaient attentifs et ont bien compris les consignes.
Six groupes ont été constitués dont l'un composé de trois élèves en difficulté. Les autres groupes n'étaient pas aussi homogènes.
Tous les groupes se sont lancés immédiatement dans la recherche et ils voulaient très rapidement acheter des indices. Je n'ai pas répondu à cette attente et j'ai insisté pour qu'ils cherchent s'il n'y avait pas de solution moins onéreuse avant d'acheter des indices, ce qui a permis de relancer leur travail.
Les six groupes ont trouvé le bon résultat pour la masse des 80 billes avec une procédure juste. Les six procédures proposées étaient différentes. Certains groupes ont trouvé plusieurs procédures. Le tableau suivant fait ressortir les différents indices achetés et, pour les groupes où j'ai pu le remarquer, leur première proposition.

TABLEAU : Indices achetés et procédures utilisées

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5	Groupe 6
1ère proposition	6 euros : 32 billes et 48 billes	?	10 euros : 40 billes	6 euros : 33 billes et 47 billes	10 euros : 40 billes	1 euro : 79 billes
Proposition finale	1 euro : 79 billes	5 euros : 14 billes et 33 billes	6 euros : 32 billes et 48 billes	6 euros : 33 billes et 47 billes	2 euros : 32 billes	3 euros : 79 billes et 33 billes
Procédure utilisée lors de la proposition finale	Recherche de l'image de l'unité grâce à des essais multiplicatifs pour déterminer le nombre qui, multiplié par 79, donne 237 (la masse des 79 billes).	Procédure mixte : additive et multiplicative, consistant à additionner la masse de 14 billes avec deux fois la masse de 33 billes.	Procédure additive consistant à additionner la masse de 32 billes avec la masse de 48 billes.	Procédure additive consistant à additionner la masse de 33 billes avec la masse de 47 billes.	Procédure multiplicative consistant à déterminer l'opérateur scalaire entre 32 billes et 80 billes, à savoir 2,5, puis à multiplier ce coefficient avec la masse de 32 billes.	Recherche de l'image de l'unité grâce à des essais multiplicatifs pour déterminer le nombre qui, multiplié par 33, donne 99 (la masse des 33 billes).

Même si la plupart des groupes ont remarqué que la masse de 40 billes permet de déterminer celle de 80 billes, aucun n'achète finalement cet indice. Le fait de leur avoir laissé du temps leur a permis de découvrir une autre procédure. Un seul groupe conserve la proposition émise dans un premier temps. Tous les autres groupes modifient leur proposition, donc déterminent plusieurs procédures pour trouver le résultat.

Deux groupes trouvent le résultat avec une procédure basée sur la propriété additive de la fonction linéaire : soit $m(32 + 48) = m(32) + m(48)$ où $m(32 + 48)$ est la masse de 32 + 48 billes donc de 80 billes ; soit $m(33 + 47) = m(33) + m(47)$.
Un groupe associe les propriétés additive et multiplicative : $m(14 + 2x33) = m(14) + 2xm(33)$

Un groupe emploie uniquement la propriété multiplicative et pour cela utilise des nombres décimaux non entiers : m(2,5x32) = 2,5xm(32). C'est le seul groupe qui calcule avec des nombres non entiers. Beaucoup d'élèves, comme ceux dont le dialogue est retranscrit ci-dessous, se limitent aux nombres entiers, et, de ce fait, ne trouvent pas la procédure multiplicative.

Elève 1 : « On prend que 32. On dit le nombre de fois 32 jusqu'à 80.
Elève 2 : Non. 32 et 32, ça fait 64. 64 et 32, ça dépasse 80.
Elève 1 : On prend 33.
Elève 2 : Non, j'ai essayé, regarde. 33 et 33, 66. 66 et 33, ça va pas. »

Deux groupes ont calculé la masse d'une bille : l'un à partir de la masse de 33 billes, l'autre à partir de la masse de 79 billes. Ces deux groupes n'ont pas déterminé la masse unitaire en effectuant une division mais par tâtonnements successifs à l'aide d'une multiplication. Le fait que la masse d'une bille soit un nombre entier très petit (3g) leur a permis de découvrir ce nombre en procédant par essais. D'ailleurs, le groupe qui a déterminé la masse d'une bille à partir de la masse de 33 billes n'avait pas su la découvrir avec la masse de 79 billes. En effet, ils avaient acheté l'indice concernant la masse de 79 billes en premier mais cette information ne leur a pas servi. Ils restaient bloqués sans savoir comment ils pouvaient déterminer la masse d'une bille. C'est la masse de 33 billes à savoir 99 g qui les a aiguillés vers des essais multiplicatifs. Le coefficient multiplicateur est plus facilement recherché avec les nombres 33 et 99 qu'avec les nombres 79 et 237. Ce groupe est un groupe composé de trois élèves en grande difficulté. Leur réussite ne laisse pas apparaître leurs difficultés mais l'analyse plus précise de leur fonctionnement montre une grande différence entre leur raisonnement et celui des autres groupes. Cette analyse permet de comprendre quelques blocages des élèves en difficulté.

Analyse des différences de raisonnement entre le groupe composé de trois élèves en grande difficulté et les autres groupes

Le groupe constitué par trois élèves en grande difficulté se différencie des autres principalement par le manque total d'anticipation.
Les cinq autres groupes recherchent dès le départ comment décomposer le nombre total de billes avec les nombres proposés sur le bon de commande. Le but est de trouver la masse de 80 billes mais ces groupes négligent, dans un premier temps et à bon escient, la recherche de la masse pour se focaliser sur le nombre de billes. Cette recherche s'effectue parce qu'implicitement ils connaissent la propriété additive de la fonction linéaire. Si l'on réfléchit pour déterminer les nombres dont la somme permet d'obtenir 80, c'est qu'implicitement on sait que la masse de cette somme est égale à la somme des masses. Autrement dit, en reprenant l'expression de Vergnaud[4], tous ces élèves disposent du théorème en acte : m(x + y) = m(x) + m(y). Sans ce théorème en acte, l'élève ne peut pas orienter sa recherche vers la décomposition additive du nombre 80. C'est ce qui se passe pour le groupe d'élèves en difficulté.
Le but est de trouver la masse de 80 billes en dépensant le moins d'argent possible. Ils se focalisent donc sur le fait de dépenser le moins d'argent possible. Leur première proposition est d'acheter l'indice concernant la masse de 79 billes parce que c'est le moins cher (1 euro). A aucun moment, ils n'essaient d'imaginer ce qu'ils calculeront avec cette information. Même ma demande pour savoir si la masse de 79 billes leur permettra de trouver la masse de 80 billes ne les guide pas vers une anticipation quelconque du calcul

[4] G. VERGNAUD (1987) : Les fonctions symboliques de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. Psychologie. La Pléiade. Gallimard

menant au résultat. Ne disposant pas du théorème en acte de l'additivité de la fonction linéaire, ils ne peuvent pas anticiper et ils restent fixés sur le but de la tâche.
Contrairement aux autres groupes pour lesquels je refusais de vendre rapidement les indices, j'ai fourni, à ce groupe, l'indice souhaité pour qu'il puisse prendre conscience de la nécessité de rechercher une décomposition de 80. Mais cela n'a pas suffit.
Ayant pris connaissance de la masse de 79 billes, un des élèves du groupe propose d'ajouter la masse d'une bille qu'il détermine approximativement : « Tu fais 237 g plus une bille. Une bille, ça fait combien ? 2 g un truc comme ça. Ben, oui, tu rajoutes 2 g. »
Un autre élève propose 316 g, valeur trouvée en ajoutant 79 et 237 (masse de 79 billes). C'est l'exemple typique de la réponse due à une règle du contrat didactique selon laquelle, pour trouver le résultat du problème, il faut prendre les nombres de l'énoncé et effectuer un calcul. Aucun contrôle par rapport aux unités de mesures des valeurs additionnées n'est effectué puisqu'il ne cherche pas à donner du sens à son calcul.
Le troisième élève du groupe n'est pas d'accord avec les deux autres mais sans pouvoir expliquer pourquoi. Il propose d'acheter un nouvel indice.
Leur dialogue pour se mettre d'accord sur quel indice acheter, retranscrit ci-dessous, montre que leur recherche ne concerne toujours pas la décomposition de 80, sauf pour le troisième élève cité précédemment qui entrevoit une solution en proposant d'acheter la masse de 40 billes, mais, faute de pouvoir argumenter, sa proposition n'est pas retenue par les autres.

> *Elève 1 : « Je vais acheter 33 billes, pour voir.*
> *Maître : Mais, est ce que vous êtes d'accord ? Tu ne peux pas acheter tout seul. Il faut que le groupe soit d'accord.*
> *Elève 1 : Attends, on va acheter 33 billes, on va voir.*
> *Elève 2 : laisse-moi. (Il regarde le bon de commande)*
> *Maître : Qu'est ce que vous voulez acheter ? Dépêchez-vous parce que les autres, ils ont fini. Tant pis, dépensez de l'argent pour avoir la bonne réponse.*
> *Elève 1 : 33 billes.*
> *Elève 3 : 40.*
> *Maître : 40 billes ? Est-ce que vous êtes d'accord ?*
> *Elève 1 : Non, je ne suis pas d'accord, ça fait trop. (trop d'argent)*
> *Maître : Oui mais il faut au moins avoir la bonne réponse.*
> *Elève 1 : Je ne suis pas d'accord.*
> *Elève 2 : D'accord.*
> *Maître : D'accord pour quoi ?*
> *Elève 2 : Pour les 33 billes.*
> *Elève 1 : On vous donne 2 euros.*
> *Maître : Et tu vas savoir avec 33 billes ? Avec 33 billes ? Tu ne veux pas 40 billes ? Lui, il voulait 40 billes.*
> *Elève 1 : C'est trop cher.*
> *Maître : Oui, c'est trop cher mais il faut avoir la bonne réponse aussi. Alors quoi ? 40 billes ?*
> *Elève 1 : Non, c'est trop cher.*
> *Elève 3 : D'accord 33.*
> *Maître : 33. Combien ça coûte 33 billes ?*
> *Elève 1 : 2 euros.*
> *Maître : Voilà. Alors ? Il faut trouver maintenant. Dépêchez-vous. Qu'est ce que vous faites avec ça ?*
> *Elève 3 : Ben, rien. Moi, je sais pas. »*

La transcription de ce dialogue montre que l'élève 1 est fixé sur le prix des indices et attend d'avoir l'information pour réfléchir à ce qu'elle lui apporte. L'élève proposant 40 billes avait peut-être une très vague idée mais beaucoup trop implicite pour qu'il puisse argumenter sa proposition. Mes relances étaient destinées à les orienter vers les 40 billes, mais ils n'anticipent pas les calculs et restent fixés sur le prix. La tâche n'est pas située dans leur zone proximale de développement mais au-delà et, comme l'a indiqué Vygotski[5], cela ne leur permet pas de réussir même avec de l'aide.
Et pourtant, ce groupe va trouver le résultat. En essayant de déterminer, avec la calculatrice, le nombre qui multiplié par 33 donne 99 (la masse des 33 billes), l'élève 2, qui n'a presque pas participé au dialogue antérieur, trouve 3 et comprend que la masse d'une bille est 3 g. On peut avancer que sa procédure ne repose pas sur la propriété additive de la fonction linéaire qui ne permet pas de trouver le résultat avec cet indice, mais sur la recherche de la valeur unitaire ; procédure que l'on peut penser beaucoup plus difficile que la procédure additive. Le fait de connaître la masse de 79 billes l'a orienté sur la recherche de la masse d'une bille pour compléter. Le choix de la masse de 33 billes (parce que l'indice n'est pas cher) l'a ensuite guidé vers la recherche du coefficient multiplicateur. Ici, la bonne réponse ne prouve pas une véritable compréhension des propriétés de la fonction linéaire, puisque le choix des indices à acheter ne s'est pas basé sur une décomposition du nombre 80 mais sur leur prix. Néanmoins, le fait d'avoir calculer la masse d'une bille reflète un début de prise de conscience de la proportionnalité. Le chemin est encore long avant d'établir des procédures efficaces pour tout type de situation. Pourtant, cela n'a pas été inutile, ne serait ce que pour leur valorisation. En effet, ils étaient très fiers d'avoir trouvé le bon résultat et d'être deuxièmes au classement de l'argent dépensé, eux qui, habituellement, ne réussissent rien.

Conclusion

Le cheminement de ce groupe illustre bien les difficultés qui peuvent être rencontrées pour arriver à une maîtrise de la proportionnalité. La séance a permis à tous les élèves de déterminer une procédure juste mais dont l'efficacité est pour l'instant limitée à cette situation. Elle n'est pas forcément transférable. Il faut beaucoup de temps pour parvenir à une maîtrise complète du concept de proportionnalité. Comme l'indique les programmes, celui-ci est simplement abordé au cycle 3. « Des situations relevant de la proportionnalité sont proposées et traitées en utilisant des raisonnements personnels, adaptés aux données en jeu dans la situation et aux connaissances numériques des élèves. [...] A partir de cette première approche dont l'importance ne doit pas être sous-estimée, l'étude organisée de la proportionnalité sera mise en place au collège. »

[5] VYGOTSKI L.S. (1934) : *Pensée et langage* 1985. Messidor. Editions Sociales

BIBLIOGRAPHIE

CHARNAY R (1998) *: De l'école au collège : les élèves et les mathématiques*. Grand N n°62. IREM Grenoble

ERMEL (1995) : *Apprentissages numériques CE2*. Hatier

Ministère de l'Education Nationale (2002) : *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* CNDP

VERGNAUD G (1987) : *Les fonctions symboliques de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant.* Psychologie. La Pléiade. Gallimard

VYGOTSKI L. S. (1934) : *Pensée et langage.* 1985. Messidor. Editions Sociales.

ANNEXE 1 : Bon de commande

Bon de commande		
Nous souhaitons savoir la masse de :	Prix :	Mettre une croix dans les cases correspondantes
14 billes	3∈	
24 billes	4∈	
32 billes	2∈	
33 billes	2∈	
40 billes	10∈	
47 billes	4∈	
48 billes	4∈	
79 billes	1∈	
79 billes	1∈	
Prix total de la commande :		

ANNEXE 2 : Trace écrite à compléter

Après la mise en commun des procédures utilisées par les élèves, trois procédures différentes sont rédigées avec les élèves en inscrivant le raisonnement permettant de calculer la masse de 80 billes, dans les cadres suivants.

Bon de commande		
Nous souhaitons savoir la masse de :	Prix :	Mettre une croix dans les cases correspondantes
14 billes	3 ∈	
24 billes	4 ∈	
32 billes	2 ∈	X
33 billes	2 ∈	
40 billes	10 ∈	
47 billes	4 ∈	
48 billes	4 ∈	X
79 billes	1 ∈	
79 billes	1 ∈	
Prix total de la commande : 6 ∈		

La masse de 32 billes est 96 g.
La masse de 48 billes est 144 g.

Bon de commande		
Nous souhaitons savoir la masse de :	Prix :	Mettre une croix dans les cases correspondantes
14 billes	3 ∈	X
24 billes	4 ∈	
32 billes	2 ∈	
33 billes	2 ∈	X
40 billes	10 ∈	
47 billes	4 ∈	
48 billes	4 ∈	
79 billes	1 ∈	
79 billes	1 ∈	
Prix total de la commande : 5 ∈		

La masse de 14 billes est 42 g.
La masse de 33 billes est 99 g.

Bon de commande		
Nous souhaitons savoir la masse de :	Prix :	Mettre une croix dans les cases correspondantes
14 billes	3 ∈	
24 billes	4 ∈	
32 billes	2 ∈	
33 billes	2 ∈	
40 billes	10 ∈	
47 billes	4 ∈	
48 billes	4 ∈	
79 billes	1 ∈	
79 billes	1 ∈	X
Prix total de la commande : 1 ∈		

La masse de 79 billes est 237 g.