LA RESOLUTION DE PROBLEMES EN QUESTION

Catherine HOUDEMENT
IUFM de Haute Normandie
DIDIREM Paris 7

La résolution de problèmes a toujours été jugée difficile par les enseignants. Pourtant les nouveaux programmes 2002 renforcent son utilisation dans l'enseignement. Quel regard porter sur la résolution de problèmes ? Peut-on découper son enseignement en questions de lecture, de traitement de l'information… avant de passer aux connaissances mathématiques en jeu… comme le préconisent certains manuels scolaires ? La question est plus complexe.

Ce texte complète une série d'articles dans Grand N consacrés à la résolution de problèmes[1]. Il apporte de nouveaux éléments, essentiellement sur les problèmes numériques, et rappelle pour mémoire des questions déjà traitées (auquel cas il renvoie aux articles antérieurs).

De la place des problèmes dans les mathématiques à l'école

Les problèmes à l'école ont une spécificité et un rôle à jouer dans les apprentissages. Ils ne sont jamais assimilables à des problèmes de la vie courante.

Problèmes et élève

A l'école c'est le maître qui décide des problèmes à traiter ; en particulier il les choisit. Quoi que le maître fasse, les problèmes sont en général artificiels face aux préoccupations des élèves. Ils sont rarement issus de la réalité et ne font souvent que l'évoquer. Si l'élève décide de les traiter, c'est parce qu'il fait son métier d'élève (entre autres qu'il obéit à l'injonction du maître) et/ou parce qu'il a confiance en son maître et qu'il sait que cela va lui apprendre des choses et/ou parce qu'il a plaisir à exercer sa réflexion…

Problèmes et mathématiques

Les problèmes sont constitutifs des progrès en mathématiques : l'homme a commencé à représenter des quantités pour contrôler leur permanence[2], la géométrie serait née de la nécessité de redessiner les limites des propriétés terriennes après chaque crue du Nil, en conservant l'aire d'avant la crue… Mais la publication des textes mathématiques ne montre qu'un aspect du travail mathématique : les résultats. Les savoirs présentés sont dépersonnalisés[3] et souvent décontextualisés pour gagner en universalité. La partie humaine des mathématiques est occultée.

---

[1] Cf. recensement bibliographique en fin d'article.

[2] le berger qui fait des encoches sur un bâton pour garder la mémoire du nombre de moutons allant paître plus loin.

[3] Les savoirs ne sont pas rattachés aux hommes qui ont contribué à leur création souvent sur un long temps.

Pourtant, comme le rappelle[4] Laurent SCHWARTZ (mathématicien français, né en 1915, médaille Fields[5] en 1950), l'activité des mathématiciens eux-mêmes est laborieuse, demande du temps, des essais, des erreurs :
« *Un chercheur doit savoir sécher une heure, un jour, ou toute la vie. Il sèche beaucoup plus qu'il ne trouve, il se pose une série de questions, tâtonne, avance pas à pas. C'est très difficile ; puis, à un moment donné, une certaine illumination vient. Elle est souvent très brusque, mais c'est le résultat d'une accumulation énorme de réflexions infructueuses.* »
L'erreur est souvent cachée aux confrères…
« Une fois, par exemple, j'ai cherché à démontrer un théorème et, pendant huit jours, je n'y suis pas parvenu. Tous les jours, la fatigue aidant, je croyais l'avoir démontré, et, au réveil, instantanément, je voyais l'erreur de mes résultats de la veille : au septième jour, les murailles tombèrent et je trouvai un contre-exemple. Le théorème cherché était faux, et il suffisait de six lignes pour écrire le contre-exemple. J'ai alors rédigé l'article ainsi : "On pourrait se poser la question suivante....C'est manifestement faux, comme le montre tout de suite[6] le contre-exemple suivant... »

Problèmes et enseignement des mathématiques

Dans l'enseignement les problèmes jouent deux rôles : d'abord ils permettent de contrôler les aptitudes des élèves à utiliser des *outils* mathématiques (opérations, calculs d'aires, etc.) et à raisonner ; mais le plus important, d'après le postulat actuel[7] sur l'apprentissage, est que les problèmes sont *constitutifs de l'apprentissage des mathématiques*, ce que résume l'expression : apprendre par la résolution de problèmes.
« *C'est dans l'activité de résolution de problèmes que se trouve la source de la connaissance* » dit Jean JULO[8]. Cependant il ne s'agit pas seulement de chercher, « *mais de réussir à aller jusqu'au bout de l'élaboration d'une procédure nouvelle (non connue)* ».

Dans les Programmes de 2002[9], dès le cycle 2, l'intérêt des problèmes *pour permettre la construction de connaissances nouvelles ou favoriser une évolution dans la connaissance de notions déjà rencontrées* est rappelé. Les compétences qu'il est conseillé de développer spécifiquement chez les élèves de cycle 2 sont les suivantes :

- *s'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme ;*
- *rendre compte oralement de la démarche utilisée, en s'appuyant éventuellement sur sa feuille de recherche ;*
- *admettre qu'il existe d'autres procédures que celle qu'on a soi-même élaborée et essayer de les comprendre ;*
- *rédiger une réponse à la question posée ;*
- *identifier des erreurs dans une solution.*

Dans le document consacré au cycle 3, sont explicitement distingués trois types de problèmes :

- *les problèmes de recherche, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée ; certains de ces problèmes sont utilisés pour permettre la construction de connaissances nouvelles, d'autres sont*

---

[4] cité par Dossier Les mathématiciens dans *POUR LA SCIENCE* Belin janv.94

[5] La médaille Fields est une récompense équivalente au prix Nobel qui, lui, n'existe pas en mathématiques

[6] souligné par nous

[7] fondé entre autres sur les travaux de psychologie cognitive

[8] *Actes du 26è* colloque COPIRELEM *pour Formateurs de maîtres en mathématiques* Limoges 99

[9] qui explicitent ce point des Instructions Officielles 1995

davantage destinés à placer l'élève en situation de chercher, d'élaborer une solution originale ;

- *les problèmes destinés à permettre l'utilisation des acquis antérieurs dans des situations d'application et de réinvestissement,*
- *les problèmes destinés à permettre l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances dans des situations plus complexes.*

Un même problème, selon le moment où on le propose, les connaissances des élèves à qui on le destine et la gestion qui en est faite peut relever de l'une ou l'autre des catégories ci-dessus.
Cette catégorisation incite le professeur à multiplier auprès de ses élèves les activités de résolution de problèmes : même s'il prend appui sur des manuels scolaires et des aides pédagogiques, c'est le maître de la classe qui choisit les problèmes qu'il donne à ses élèves en fonction de l'objectif qu'il vise (recherche à visée notionnelle – de quelle notion ? –, recherche sans visée notionnelle spécifique, application et réinvestissement – de quelle notion ? – , réinvestissement plus complexe).

Mais, pour les élèves, il n'y a que deux types de problèmes, tous imposés : ceux qu'ils reconnaissent et savent traiter rapidement et les autres, ceux qui les bloquent, qui les amènent à prendre des risques.
Essayons d'avancer sur quelques pistes d'analyse de la complexité de la résolution de problèmes.

Quelle sensibilité l'enseignant peut-il développer pour ses choix ?

Les travaux des dernières années se sont surtout intéressés aux problèmes arithmétiques. Ils ont permis de montrer que la difficulté de ces problèmes était liée à au moins deux grandes catégories de facteurs : des facteurs d'ordre conceptuel et sémantique et des facteurs d'ordre linguiste et rhétorique.
Ainsi, du côté conceptuel, on sait maintenant grâce aux travaux de G.VERGNAUD[10] que les opérations expertes pour résoudre un problème –addition versus soustraction- ne préjugent en rien de la difficulté (relative) de ces problèmes. Une analyse en termes de caractéristiques conceptuelles et sémantiques permet de dresser une typologie des problèmes additifs et multiplicatifs[11]. Les *Documents d'application des Programmes Mathématiques* cycle 2 et cycle 3[12] proposent une prise en compte de cette typologie dans la hiérarchisation des niveaux exigibles de compétences de fin de cycle (procédures personnelles, procédures expertes).
Nous ne reprendrons pas cet aspect[13], mais nous nous intéresserons plutôt à certains facteurs du deuxième type sur lesquels l'enseignant peut exercer sa vigilance. Nous présentons notamment un certain nombre de résultats issus de travaux sur les problèmes additifs, catégorie très étudiée depuis 1985. La possibilité que ces résultats s'étendent à

---

[10] bien décrits dans *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3 Résolution de problèmes numériques.* Fichier pédagogique dirigé par VERGNAUD. Editions Nathan 1997.
[11] idem
[12] Ces documents sont édités en brochures par le CNPD avec les références 755A0281 (cycle 3) et 755A0282 (cycle 2) ou disponibles en ligne sur http://www.cndp.fr/docadministrative/zoomadmin/accueil.htm
[13] nous renvoyons au fichier pédagogique *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3 Résolution de problèmes numériques* dirigé par VERGNAUD. Editions Nathan 1997

d'autres catégories de problèmes n'est pour le moment, sauf mention contraire, ni confirmée, ni infirmée.

Sur la donnée du problème

Nous appellerons *donnée du problème* les différentes façons qu'a le professeur ou le manuel d'amener la ou les questions. La donnée du problème comprend le mode de communication choisi par le professeur vers les élèves (oral supporté ou non par une illustration, écrit supporté ou non par un dessin, un schéma) et le contexte choisi (voir plus loin). Naïvement on pourrait penser que cette *donnée du problème* n'a d'influence que sur la compréhension de la situation. En réalité elle influe aussi sur le traitement du problème.

Le rôle du contexte

PORCHERON[14] rappelle que, pour les problèmes additifs au cycle 2, la familiarité avec la situation (l'habillage du problème) augmente la réussite. Rappelons les différents supports possibles pour les contextes des problèmes : le problème peut prendre appui sur une situation vécue (projet de sortie, construction d'un objet, poursuite écrite d'un jeu, début de simulation avec du matériel…) ; il peut rester à l'intérieur des mathématiques (par exemple *: combien de nombres est-il possible d'écrire avec seulement les 3 chiffres 2, 5, 7* ?) ; il peut s'appuyer sur une évocation de la réalité (problèmes d'achat, calcul du nombre de places d'un stade…) : il est alors présenté par un récit… Divers auteurs ont souligné l'absence de transparence du récit lié à un problème et notamment les inférences souvent nécessaires à la compréhension de la tâche demandée. Nous en reparlerons plus loin. Il est certain qu'à compétences mathématiques égales, certains contextes peuvent ralentir l'entrée des élèves dans le problème.

Examinons par exemple cet énoncé

> *Pour fabriquer des bracelets tressés, il faut 2 fils de coton de 75 m chacun. Le fil se vend en écheveaux de 8 m. Combien le maître doit-il acheter d'écheveaux si chacun des 28 élèves de la classe confectionne un bracelet ?*[15]

Un élève qui a l'intuition de la structure mathématique sous-jacente au problème saura réorganiser les informations pour, d'une part, calculer la longueur de fil nécessaire, d'autre part mettre en relation avec un écheveau. Un élève sans ces aptitudes restera démuni, essayant d'imaginer comment se fabrique un tel bracelet et sans comprendre que les informations sont toutes là, dans ce contexte évoqué. Si le contexte n'est pas suffisamment évocateur pour l'élève, il ne peut démarrer. Le contexte choisi ici (et le mot *écheveau*) peut paraître complexe.

Pour débloquer des élèves qui ne démarrent pas, il peut être bon de les inciter à simuler la situation, en ayant prévu du matériel approprié : encore faut-il que le passage au matériel ne lance pas l'élève dans une autre tâche (par exemple ici fabriquer effectivement le bracelet ne sert absolument pas à la résolution du problème). Un jeu de questions appropriées (par exemple « *que dois tu préparer pour un élève* » « *pour deux* »..) préparées comme des aides écrites peut aussi l'aider à entrer dans le problème. C'est pourquoi il est intéressant de prévoir des situations possibles à mimer, où le matériel permet une entrée dans la tâche, sans permettre la résolution complète. Ainsi la classique recherche du nombre de boîtes de 12 œufs pour ranger tant d'œufs (*A la ferme Lecoq, jeudi, on a récolté 387 œufs. La fermière les emballe par boîtes de 12. Combien obtient-elle de boîtes ?)* ne

[14] PORCHERON(1998) *Production d'inférences dans la résolution de problèmes additifs* Thèse de l'Université de Paris 8.

[15] *Nouvel Objectif Calcul CM1*. Editions Hatier 1995. Exercice 8 page 73

débutera, pour certains élèves, qu'avec, à disposition, quelques boîtes d'œufs vides et des objets à y mettre ; de même le calcul du nombre de rangées de tant de carreaux que l'on peut obtenir pour un nombre de carreaux donné est à prévoir avec, à disposition, une feuille comportant un réseau carré que l'élève pourra utiliser si nécessaire, comme support pour entrer dans le problème…
Bien entendu, le vrai problème commence quand la réponse n'est pas immédiate, quand il est nécessaire d'anticiper les résultats d'une action ou de prévoir les effets à long terme. Si, dans la phase de recherche, le matériel disponible permet à l'élève de trouver la réponse sans avoir à anticiper, l'élève a certes trouvé la réponse, mais il n'a pas résolu de problème.

Le rôle de la présentation du problème

Souvent le mot problème renvoie à un énoncé écrit. Mais il existe bien d'autres modes de communication « d'énoncés ». En particulier une présentation mimée minimise les difficultés de lecture et d'entrée dans la situation. Un énoncé oral permet aussi de mettre au travail les élèves, quand le nombre de renseignements donnés est particulièrement court. Il est aussi possible de donner un énoncé partiellement ou totalement imagé.
En particulier, FAYOL,[16] pour les problèmes additifs, précise que les sujets mauvais lecteurs bénéficient plus que les autres d'une représentation imagée. Cela faciliterait le traitement sémantique des données et soulagerait la « charge cognitive » de la mémoire de travail. En effet, l'image a le mérite de donner simultanément plusieurs informations.
Il est du ressort du maître de varier les formes d'énoncés proposés. Mais revenons désormais sur les énoncés écrits et restons modestes :
« *L'enseignant dit veiller à ce qu'aucune perturbation autre qu'une méconnaissance normale des connaissances mathématiques en jeu ne pose obstacle à l'élève… Mais il n'y a pas d'énoncés (résultant d'une énonciation) transparents, complètement compréhensibles… La compréhension apparaît toujours à conquérir »* [17] PEROZ 2000

Le maître doit exercer sa vigilance sur les possibles difficultés engendrées par l'organisation lexicale (mots ou expressions plus difficiles, par exemple « *de plus (que)* », « *de moins (que)* »…), l'organisation rhétorique (la succession des apports d'informations dans le texte du problème) ; l'organisation syntaxique (l'organisation de phrases). Si son but est de faire travailler les élèves sur certains aspects mathématiques, il doit veiller à choisir des énoncés minimisant ces effets perturbateurs ou offrir à certains élèves des énoncés reformulés.

Certaines formulations ont été plus spécifiquement étudiées.
Considérons ces deux énoncés

> *(1) Jean a gagné 3 billes. Maintenant il a 5 billes. Combien Jean avait-il de billes au départ ?*
> *(2) Jean avait quelques billes. Il a gagné 3 billes. Maintenant il a 5 billes. Combien a-t-il de billes au début ?*

Le taux de réussite entre les versions (1) et (2) passe au CP de 13% à 33%, au CE1 de 61% à 79%[18] . Par contre pour des enfants plus âgés, il n'y aurait pas de différence significative.
L'analyse de ces deux énoncés montre une différence en termes d'*inférence*[19] .

---

[16] FAYOL *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*. Page 169. Delachaux et Niestlé 1990

[17] Pour une approche linguistique des textes mathématiques, nous renvoyons à la lecture de cet article, « Des problèmes dans les énoncés », paru dans *Grand N* 63

[18] FAYOL 1990 déjà cité, page 179

[19] PORCHERON 1997 déjà cité, page 19.

Dans le premier énoncé, la collection de billes au départ n'est pas explicitement mentionnée, aucune phrase ne fait référence à une collection de billes au départ ; pour résoudre le problème, il est cependant nécessaire de s'appuyer sur son existence, *d'inférer une variable* (au sens de PORCHERON). Par contre, dans le deuxième énoncé, la première proposition indique la présence d'une collection. PORCHERON pointe la difficulté supplémentaire pour les jeunes enfants qu'il y a à *créer une variable* (le nombre de billes de Jean dans la version 1) pour résoudre le problème. Dans la version 2, la variable est déjà créée par le texte.

Pour RICHARD et PORCHERON, la résolution de problème exige des inférences pour créer des variables et préciser ces variables par une mesure. Ils distinguent en gros deux types d'inférences nécessaires pour résoudre des problèmes, celles basées sur des connaissances du monde environnant (une culture du monde) et celles produisant de nouvelles connaissances pour établir la cohérence ou enrichir la situation de départ.

Illustrons par quelques exemples.

Pour commencer à traiter le problème *« Les parents de Zoé ont recouvert le sol de leur appartement avec de la moquette. Ils ont dépensé 4 140 F pour une moquette à 92 F le m^2. Quelle est la surface recouverte ? »*[20], il faut inférer que la moquette correspond à une surface, dont l'aire s'exprime en m^2. Les variables utiles pour la résolution sont créées, mais la situation peut amener à créer les variables dimensions de la pièce pour calculer la surface. Celles ci ne sont pas pertinentes. Remarquons que pour traiter le problème, il faut aussi oublier certaines connaissances du monde : on achète de la moquette en prévoyant les chutes… Ce qui nous fait dire que, dans les problèmes mathématiques, le concret n'est qu'évoqué[21]…

De même dans l'énoncé suivant : *« Monsieur Dupont, récoltant, vient d'expédier pour 162 525 F de vin de Bordeaux. Chaque bouteille coûte 45 F auquel il faut ajouter 10 F de transport. Combien de bouteilles a-t-il expédiées ? »*[22], il faut inférer que le vin est vendu en bouteille et que le port se compte par bouteille (ce qui n'est pas toujours vrai dans la réalité où il s'agit plutôt d'un forfait de transport lié à un nombre minimum de bouteilles commandées).

Des inférences sur la connaissance du monde sont souvent nécessaires, en particulier dans certains problèmes de proportionnalité, ceux de recherche de quatrième proportionnelle. Prenons par exemple, le texte suivant :

> *« Longueur et masse. Un électricien utilise du câble sous gaine en bobines de 75 m. Une bobine de ce câble pèse 2,025 kg. Combien pèsent 100 m, 150 m 200 m de ce câble ?... »*[23]. Pour le résoudre, il faut inférer que 150 m de câble pèsent le double de 75 m, donc que le modèle de proportionnalité s'applique (à moins qu'il ne suffise d'inférer à partir du tableau traditionnellement proposé par le manuel pour la proportionnalité, et que « *tu peux construire et utiliser pour répondre* »).

Par contre, dans l'exercice qui suit sur la même page,

> *« Masse et allongement. Des élèves ont observé dans un musée un peson à ressort.*
> *Ils pensent que l'allongement du ressort est proportionnel à la masse de l'objet.*
> *Pour vérifier cette hypothèse, ils construisent un dispositif (voir schéma ci contre).*

[20] *Nouvel Objectif Calcul CM1*. Editions Hatier 1995. Exercice 3 page 95.

[21] Cf. *Grand N* n°61 Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes

[22] *Nouvel Objectif Calcul CM1*. Editions Hatier 1995. Exercice 2 page 95

[23] *Optimath CM2*. Editions Hachette 1998. Page156

Ils font ensuite des essais dont voici les résultats :

Masse (en g)	*50*	*100*	*300*
Allongement du ressort (en cm)	*1,2*	*2,4*	*7,2*

a) L'hypothèse des élèves est-elle vérifiée ?
Quel serait l'allongement du ressort pour une masse de 200g ? de 250g ?
b) *Quelle est la masse de l'objet suspendu lorsque l'allongement du ressort est de 0,6cm ?de 3 cm ? de 1,8 cm ?* »,

les auteurs fournissent suffisamment de données numériques pour que l'élève puisse lui-même vérifier la pertinence du modèle de proportionnalité, en constatant, par exemple, qu'une masse double (ou triple) donne un allongement double (ou triple).

L'organisation énonciative d'un texte peut aussi avoir un impact sur la réussite des élèves. FAYOL[24] indique que le placement en tête de la question entraîne une amélioration systématique des scores, cela à tout âge et pour tout type de problèmes additifs. L'ordre d'apparition des informations, selon qu'elles suivent ou non le traitement nécessaire à la résolution, jouerait aussi un rôle. Peut-être pourrait-on, pour certains élèves, reformuler (ou faire reformuler) certains énoncés pour que la question soit isolée (voire arrive en tête), que l'énoncé apportant les informations soit détaché de la question, plutôt que de laisser l'élève gérer seul des énoncés entremêlant question et informations ? Par exemple,

> « *Le confiseur prépare des cornets de dragées pour un baptême. Il y a 23 dragées dans 100 g. Combien fera-t-il de cornets avec 3 kg de dragées s'il en met 25 dans chacun d'eux ?* »[25]

pourrait être formulé pour certains élèves en

> *Un confiseur prépare des cornets de dragées pour un baptême. Il a fabriqué 3 kg de dragées. Il y a 23 dragées dans 100 g. Il met 25 dragées dans chaque cornet. Combien fera-t-il de cornets ?*

ou encore

> *Il s'agit de trouver le nombre de cornets de dragées préparés par un confiseur pour un baptême. Il a fabriqué 3 kg de dragées. Il y a 23 dragées dans 100 g. Il met 25 dragées dans chaque cornet.*

De même

> « *Les 52 élèves et les 2 instituteurs de l'école Miremont partent en excursion par le train. Le directeur de l'école a loué des compartiments de 2ème classe. Combien de compartiments les élèves et les instituteurs occupent-ils ? Il y a 8 places assises dans un compartiment de 2ème classe.* »[26]

reformulé en

> *Les 52 élèves et les 2 instituteurs de l'école Miremont partent en excursion par le train. Le directeur de l'école a loué des compartiments de 2ème classe. Il y a 8 places assises dans un compartiment de 2ème classe. Combien de compartiments les élèves et les instituteurs occupent-ils ?*

L'exercice précédent nous rend aussi vigilant sur la présence de l'implicite dans les textes : les compartiments doivent être vides au départ et progressivement remplis avec des personnes de l'école pour que la réponse attendue puisse émerger. Mais cet implicite est bien plus flagrant dans d'autres textes.

---

[24] FAYOL 1990 déjà cité, page 174.

[25] *Nouvel Objectif Calcul CM1*. Editions Hatier 1995. Exercice 5 page 91

[26] *Optimath CE2*. Editions Hachette 1996. Page 35

Par exemple, dans :

> « *Les fauteuils d'une salle de spectacle sont disposés sur deux niveaux : 17 rangées de 35 fauteuils « orchestre » et 11 rangées de 28 fauteuils « balcon ». A l'occasion d'une soirée, les places sont vendues 75 F. Quel est le montant du prix de la recette ?* »[27],

le texte suppose que la salle est complète lors de la soirée.

Ce parcours dans des énoncés de problèmes nous montre les écueils que l'élève doit éviter pour se lancer dans le traitement effectif. Si aucun énoncé ne peut être rendu complètement transparent, l'enseignant peut toutefois exercer une certaine vigilance dans ses choix, pratiquer ou faire pratiquer par ses élèves des reformulations, analyser des propositions d'élèves à la lumière d'interprétations différentes possibles.

Cependant le plus important n'est pas là : pour qu'un élève résolve des problèmes, il faut d'abord qu'il accepte de s'engager dans cette résolution, qu'il accepte un temps d'incertitude sachant que ce temps débouchera sur de la certitude, bref qu'il croit à sa possibilité d'avancer dans la résolution. Il est donc nécessaire qu'il développe une certaine attitude face aux problèmes.

Sur l'attitude de l'élève face aux problèmes

Si les élèves sont habitués

- à attendre que l'enseignant donne la solution ou que la classe l'élabore collectivement,
- à croire que tout problème se résout par une opération (ou une suite d'opérations) comme le laisse penser la présentation classique Solution / Opération,
- à penser que tout problème n'a qu'une solution effective,
- à croire qu'il n'y a qu'une manière de trouver, celle que donne ou qu'approuve l'enseignant au moment de la correction au tableau,
- à accepter un argument d'autorité,

il y a fort à parier que peu d'entre eux prendront le risque de s'engager seuls dans l'incertitude d'une résolution, sauf si, dès la lecture du problème, ils savent déjà le résoudre. Auquel cas, il est urgent et nécessaire de travailler le changement d'attitude des élèves face aux problèmes. L'enseignant peut mettre en place des séances visant à développer des attitudes plus ouvertes face aux problèmes, visant à développer les essais, les erreurs, les confrontations, les justifications. C'est un processus qui a déjà été décrit par DOUAIRE et HUBERT dans *Grand N* n°68[28](2001). Nous n'y revenons que très brièvement.

Dans ces séances, on pourra adopter le dispositif suivant : d'abord une recherche individuelle de 10 minutes, chacun sur son brouillon, avec production d'un écrit personnel privé[29], non corrigible par l'enseignant (même si l'enseignant observe), puis discussion par petits groupes (au moins 30 minutes) pour se mettre d'accord sur une ou plusieurs solutions, se mettre d'accord sur une présentation du « comment on a trouvé » (l'explicitation de la procédure), pouvoir expliquer dans le groupe pourquoi l'autre n'a pas raison, bref argumenter à propos des propositions de solutions ; enfin une présentation de certains groupes à l'ensemble de la classe. Les moments les plus importants seront les échanges à l'intérieur du petit groupe ou du groupe classe entier.

[27] *Optimath CM1*. Editions Hachette 1997. Page 38

[28] Mise en commun et argumentation en mathématiques

[29] A été évoquée à ce propos l'idée d'un cahier de recherche mathématique, analogue d'un cahier d'expériences en sciences.

Le choix des problèmes (voir par exemple CHARNAY 1993[30]) joue un rôle particulier : des problèmes d'énoncés courts, dans lesquels les élèves entrent rapidement, dont ils se représentent facilement le but à atteindre, mais tels que ce but ne soit pas immédiat, seront préférés dans un premier temps[31]. Dans les moments de recherche individuelle, l'enseignant incite à des reformulations, des mimes, des dessins, des schémas…
Les problèmes proposés dans certains défis répondent souvent à ces conditions. Les dispositifs de défis interclasses, par la stimulation et la préparation pour le jour J visent ce changement d'attitude. Rappelons brièvement le principe des défis : des classes sont confrontées les unes aux autres ; elles doivent le jour J, sans l'enseignant, gérer en coopération la résolution de problèmes affectés de points, parmi une liste fixée au départ. Si, à l'issue du temps imparti, la résolution des problèmes est correcte, la classe reçoit les points ; pour chaque problème choisi et mal résolu, la classe perd les points affectés au problème.
Ce type de dispositif peut tout à fait être mis en place dans une seule classe avec des groupes constitués par l'enseignant. Bien entendu si le jour J trouve une place d'honneur dans ce dispositif, son efficacité pour les progrès des élèves en résolution de problèmes vient surtout de la régularité de séances de classe plus *ordinaires* qui servent à préparer le jour J.
On trouvera en annexe des exemples de tels problèmes défis.

Il est donc nécessaire que les enseignants développent chez les élèves une attitude ouverte face aux problèmes, pour qu'ils acceptent de se lancer dans une recherche. Et de faire entrer des dispositifs développant cette attitude à l'intérieur de la vie habituelle de la classe. Si les défis sont un moyen de commencer, il semble nécessaire d'instaurer à l'intérieur de la classe « des environnements spécifiques » à la résolution de problèmes (là nous renvoyons à l'article de. JULO 2002[32]).
Mais, au fait, lors de la résolution de problèmes, quels processus permettent de ne pas stagner trop longtemps dans des impasses et de parvenir à la réussite ? C'est ce que JULO étudie sous le nom de représentation des problèmes.

Comment se construit la représentation de problèmes

Nous nous appuierons sur les travaux de J. JULO (1995)[33], dont voici une courte synthèse.
Les trois processus qui paraissent actuellement les plus importants dans la représentation des problèmes sont :

1. le processus d'interprétation et de sélection,
2. le processus de structuration,
3. le processus d'opérationnalisation.

Attention : ce ne sont pas des processus linéaires, mais des processus simultanés, qui interagissent. Le découpage proposé n'a comme but que de mieux les analyser.

1. Il est faux de croire que les informations dont on a besoin pour résoudre le problème sont là, bien visibles ; ce qui est donné, c'est un **contexte sémantique qu'il faut interpréter** pour avoir accès aux informations. Le contenu de notre représentation est le résultat du processus d'interprétation qui est aussi, entre autres, un processus de

[30] Cf. CHARNAY (1993) Problème ouvert, problème pour chercher dans *Grand N* n°53.
[31] Il est en effet nécessaire que les élèves aient au plus vite la possibilité de se lancer dans une action pour comprendre que ce premier »mouvement » est une des conditions de l'avancée vers la solution.
[32] JULO (2002) *Grand N* n°69 page 47.
[33] *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* Presses Universitaires de Rennes.

sélection d'informations. **Ce sont les connaissances que nous avons à un moment donné qui guident notre interprétation**.

2. La représentation d'un problème ne se construit pas de façon juxtaposée, mais elle forme **un tout cohérent qui se structure**, c'est aussi pour cela qu'il ne s'agit pas seulement d'apprendre des éléments juxtaposés pour réussir. C'est ce processus que JULO nomme le processus de structuration.

3. Le processus d'opérationnalisation est le processus qui permet **le passage à l'action effective** (calculs, tracés…) **ou mentale** (déductions…..) : ce passage à l'action résulte de la mise en œuvre de connaissances opératoires, issues de nos expériences passées. C'est le côté visible de la résolution.

Pour éclairer ces processus, nous allons citer quelques problèmes, scolaires ou non. Pour un éclairage plus pertinent de nos propos, nous demandons au lecteur de résoudre effectivement et à chaque fois le problème proposé avant de passer à la suite.
Pour le premier processus, prenons l'exemple suivant :

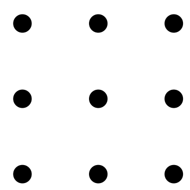
Il s'agit de calculer à chaque fois le nombre d'arbres :

a) il y a 25 arbres et un peu plus loin 60 arbres ;
b) il y a 25 rangées d'arbres et une rangée contient 60 arbres ;
c) il y a 60 plantations, des arbres et des buissons : il y a 25 buissons.

Dans les trois textes a) b) c), les informations numériques sont identiques. Comment l'adulte sait-il immédiatement comment calculer le nombre d'arbres ? Il interprète le contexte sémantique et, **grâce à ses connaissances**, associe instantanément un traitement pertinent, différent pour chaque texte[34].

Pour le processus de structuration, reprenons l'exemple, déjà cité par J.JULO, du problème des neuf points, que le lecteur devra chercher avant de lire la suite. Il s'agit bien d'un problème, non numérique.

Reliez ces neuf points par une ligne brisée de quatre segments et en passant une et une seule fois par chacun



A tout moment le lecteur peut penser qu'il est impossible… et se décourager. En effet la disposition des points amène à limiter le déplacement du crayon à l'intérieur d'un carré fictif. Ce carré symbolise la structure que l'on crée artificiellement sur tout problème, structure qui parfois nous donne une solution, mais parfois aussi nous empêche parfois d'aller vers une solution.
L'individu se crée progressivement des « *schémas de problèmes* » (JULO 1991 et JULO 2002 *Grand N*), structures de la représentation qui lui permettent de reconnaître un problème qui relève d'un « *schéma* » déjà rencontré et de s'engager rapidement dans une procédure de résolution.

[34] Remarquons aussi qu'un enfant qui **ne connaît** des opérations **que** les techniques opératoires ne peut faire un choix entre les diverses opérations qu'il connaît.

Voici d'autres exemples illustrant le « schéma de problèmes ». Pour que l'exemple illustre au mieux notre propos, nous conseillons au lecteur de prendre le temps de résoudre les deux problèmes avant de lire la suite.

Premier problème

> « *L'autre jour, nous avons pris trois cafés et quatre croissants et payé 57 F.*
> *Aujourd'hui pour deux cafés et deux croissants nous payons 34 F.*
> *Quel est le prix d'un café ? Quel est le prix d'un croissant* ? »

Second problème

> « *Deux croissants et quatre cafés coûtent ensemble 62 F.*
> *Combien paierons-nous pour cinq croissants et dix cafés ?* »

Le premier problème est un bon problème de recherche pour le cycle 3, de type défi. En effet il peut nécessiter de faire des hypothèses sur le prix du café et du croissant, de tester ces hypothèses sous la contrainte des données du texte ou encore de déduire progressivement le prix d'un café de la combinaison des deux lignes d'informations. L'enseignant y reconnaît un problème relevant d'un système d'équations à deux inconnues.

Quant au second problème, la proximité du précédent problème et le contexte similaire peuvent amener le lecteur à ne pas toujours voir immédiatement que celui-ci relève de la proportionnalité. En effet, le premier problème bien résolu a (ré)activé, a fait appel à un certain *schéma* de problème (liés à la formulation d'hypothèses ou à la déduction par combinaison) et la ressemblance du second avec le premier fait souvent que, dans un premier temps ce même *schéma* s'impose, alors qu'il n'est plus adapté.

Divers éléments peuvent renforcer la structuration. La performance est augmentée quand on demande à des sujets de verbaliser leurs actions de résolution, de se représenter le problème sous forme d'une image mentale[35]. Le passage à l'image, au verbe, à la schématisation (ici le mot schéma garde son sens classique de dessin très stylisé)[36] peut augmenter l'opérationnalisation car elle permet de mobiliser d'autres connaissances. Mais les connaissances ne sont jamais absentes de ce processus.

Prenons deux exemples cités par DENIS[37].

> Premier exemple : « *Un cube est peint en rouge. Il est ensuite découpé en 27 petits cubes. Combien de petits cubes ont 3 faces rouges* ? »

On voit le cube mentalement, on limite notre image aux petits cubes ayant une face au moins externe dans le grand cube, on recherche ceux qui ont trois faces externes : ce sont les sommets du grand cube. Il suffit alors de les compter (ou de se rappeler leur nombre).

> Second exemple : « *Un voyageur s'endort après que le train ait parcouru la moitié de son trajet. Quand il se réveille, il reste à parcourir la moitié de la distance parcourue pendant son sommeil. Sur quelle longueur du trajet la passager a-t-il dormi ? Un quart ? Un tiers ? Un sixième ? Un cinquième ?* »[38]

Ici le passage par le dessin d'un segment représentant le parcours allège la charge mnémonique car elle structure plusieurs informations simultanées.

---

[35] JULO 1995 page 85.

[36] Voir dans ce même numéro l'article de MONNIER (2003) « Les schémas dans la résolution de problèmes »

[37] DENIS 1982 « Représentation imagée et résolution de problèmes » dans *Revue Française de Pédagogie* N°60

[38] Réponses : 8 pour le cube et un tiers pour le trajet.

Mais n'oublions pas que l'efficacité de l'imagerie visuelle dépend de la nature des problèmes susceptibles de conduire plus ou moins directement à des figurations et aussi de notre capacité (habitude...) à imager, capacité qui peut se travailler.

Attention aux propositions des manuels

La revue *Grand N* a déjà proposé une lecture critique des progressions dites « Résolution de problèmes » dans trois articles parus dans les numéros 63[39] et 69[40]. Nous reprenons très rapidement quelques éléments de cette étude, mais uniquement pour inciter le lecteur à consulter ces articles ...

Par exemple, les exercices demandant aux élèves de trier les informations avant de résoudre un problème sont problématiques. Le contre-exemple suivant, déjà cité dans nos précédents articles, convaincra le lecteur de l'impossibilité d'un tel tri avant de résoudre.

> *A chacun sa place*[41]
> *Damien, Franck, Isabelle, Nathalie, Raphaël et Simon ont posé pour une photo souvenir de vacances. Les indices suivants permettent de retrouver la place de chacun. Toutefois certains indices sont inutiles. Lesquels ?*
> *1 Damien et Raphaël n'ont qu'un seul voisin.*
> *2 Les filles ne sont pas côte à côte.*
> *3 Franck est le plus petit des garçons.*
> *4 Franck est cependant plus grand qu'Isabelle, qui est à sa gauche.*
> *5 Damien et Isabelle portent des lunettes.*
> *6 Si Nathalie tourne la tête vers la gauche, elle peut voir tous ses camarades, sauf Damien.*
> *7 Franck est le seul à avoir deux voisines.*

Le tri d'informations fait partie du processus de représentation décrit par JULO, il est intimement lié à la résolution effective et à la disponibilité de connaissances mathématiques adaptées. On ne peut trier que lorsqu'on a résolu ou qu'on est très avancé dans la résolution.

De même, en quoi le tri d'informations peut-il aider les élèves dans le problème suivant ?

> *Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde partie, il a perdu 7 billes. Quand il compte ses billes à la fin, il s'aperçoit qu'il a gagné en tout 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?*

Il y est question de billes, les élèves peuvent imaginer la situation, ce problème se résout par une simple addition. Or ce problème[42] met en échec 75% des enfants de 6ème. Actuellement les connaissances sur les problèmes additifs[43] permettent d'anticiper la difficulté que représentent de tels problèmes numériques à une opération pour les élèves d'école primaire. Mais revenons à notre propos : il existe des problèmes difficiles à résoudre, mais simples du point de vue des informations fournies par l'énoncé.

---

[39] BALMES et COPPE (1999), HOUDEMENT (1999)

[40] COPPE et HOUDEMENT (2002)

[41] *Quadrillage* CM1. Editions Istra 1997. Page.29

[42] Ce problème relève de la composition de deux transformations, type perte et gain (selon la typologie de VERGNAUD déjà cité) : la première transformation est inconnue, la seconde est une perte de 7, la composition des deux est un gain de 5. Pour résoudre ce problème, il est donc nécessaire d'inférer la première transformation (au sens de PORCHERON), de la composer avec la deuxième pour obtenir la troisième ; donc en quelque sorte de résoudre l'équation $x-5=7$. Ce qui explique a priori sa difficulté.

[43] Voir le fichier pédagogique dirigé par VERGNAUD *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3 Résolution de problèmes numériques.*. Editions Nathan 1997

De même, la recherche de questions intermédiaires n'est pas possible tant qu'on n'a pas soi-même résolu le problème : alors que penser d'une consigne du type « *Tu n'as pas à résoudre les problèmes suivants. Dis seulement quelle(s) question(s) tu dois d'abord te poser pour pouvoir les résoudre* »[44]. Remarquons en plus que, dans une problématique de sens, on ne pose une question que si l'on a un interlocuteur dont la réponse peut nous faire avancer…

Ce très rapide parcours de quelques activités non fondées doit nous inciter à rester vigilants…

En conclusion

La résolution de problèmes n'est pas dissociable de la maîtrise des connaissances mathématiques nécessaires pour les résoudre. Les problèmes numériques dans les champs additifs et multiplicatifs en offrent suffisamment d'exemples[45].
Il n'existe pas de méthodologie générale de résolution, chacun recourt à une mémoire personnelle des problèmes.
Cette *mémoire des problèmes* est une mémoire de « schémas de problèmes » (JULO 2002); c'est elle qui facilite le processus essentiel de structuration. Elle se forme à partir des différents problèmes que nous rencontrons, des représentations que nous en construisons et des analogies que nous percevons.
Encore faut-il que nos élèves aient la possibilité de résoudre, par eux-mêmes, jusqu'au bout, certains problèmes afin de prendre confiance dans leurs capacités à penser. Encore faut-il qu'ils aient des occasions d'échanger, d'argumenter et de justifier.
Des chercheurs en didactique travaillent maintenant plus précisément sur les aides à la représentation de problèmes[46]. Ainsi s'élaborent de nouveaux outils pour traiter ces questions.

---

[44] *Nouvel Objectif Calcul* CM1. Editions Hatier 1995. Page 63.

[45] Voir le livre du maître du *Moniteur de Mathématiques cycle 3 Résolution de problèmes numériques.* Dirigé par VERGNAUD. Editions Nathan 1997

[46] voir en particulier JULO (2002) dans *Grand N* n°69 "Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes »

QUELQUES ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

- *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire 2002.* BO Hors Série N°1 du 14 février 2002. En ligne sur http://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/default.htm
- *Documents d'application des programmes. Mathématiques.* Cycle 2 (brochure CNDP n°755A0282, juillet 2002) et Cycle 3 (brochure CNDP n°755A0281, juillet 2002). En ligne sur http://www.cndp.fr/docadministrative/zoomadmin/accueil.htm

- CHARNAY R. (1987). *Des problèmes pour apprendre en CM2 et en 6ème*. I.R.E.M. de Lyon
- DESCAVES A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes,* Ed Hachette Education.
- ERMEL (1978-1980) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire :* CE, tome 1, pages 32 à 46 et *CM,* tome 1, pages 30 à 95. Editions Hatier
- ERMEL (1991 à 1999) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes : CP* 1991, pages 74 à 111 ; *CE1* 1993 pages 39 à 96 ; *CE2* 1995 pages 35 à 88 ; *CM1* 1997 pages 43 et suivantes ; *CM2* 1999 pages. Première partie et « Des problèmes pour apprendre à chercher. » Editions Hatier
- ERMEL (1999) *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. INRP Didactiques des disciplines
- INRP (1984) *Comment font-ils?* (*l'écolier et le problème de mathématiques*). Rencontres Pédagogiques n°4. Ed INRP, Paris.
- INRP (1986) *En math peut mieux faire (l'élève face à l'erreur en mathématiques).* Rencontres Pédagogiques n°12. Ed INRP, Paris.
- INRP (1987) *Apprentissage à la résolution de problèmes au cycle élémentaire.* Ed CRDP de Grenoble, 11 avenue du Général Chambon, 38031 Grenoble Cedex
- PEAULT H. *Un rallye pour débattre des mathématiques* 89-93 CRDP des Pays de Loire
- VERGNAUD dirigé par (1997) *Le Moniteur de mathématiques cycle 3 Résolution de problèmes numériques.* Fichier pédagogique Ed Nathan.

- Revue *Grand N*, I.R.E.M. de Grenoble
  - n°42
    - F.BOULE, C.WASSERER (1988) "Lecture des énoncés mathématiques"
    - R.CHARNAY (1988) "Apprendre par la résolution de problèmes"
    - D.VALENTIN (1988) "Est-il possible d'apprendre à résoudre des problèmes ?"
  - n°50
    - R.PROSPERINI, J.RUCKA (1992), "Faire des mathématiques différemment : une expérience"
    - R.NEYRET (1992) "Lecture d'énoncés et progression thématique"
  - n°51
    - R.CHARNAY (1993) "Problème ouvert, problème pour chercher"
    - J.BOLON (1993) "Regards insolites sur quelques manuels"
  - n°54
    - J.TRUCHET (1994), "Le problème ouvert en classe de mathématiques dans un institut médico-pédagogique"
  -

- n°60
    - DE GRAEVE R, RANVILLE H. (1996) "Les couleurs du carré magique" activité de résolution de problème à partir de l'observation d'un tableau dans une grande section
    - LEPINE L. (1996) "Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche"
- n°61
    - GRUGNETTI, JACQUET. (1997) "La résolution de problèmes par classe" considérations suisses sur les rallyes
- n°63
    - BALMES, S.COPPE (1999) "Les activités dans la résolution de problèmes au cycle 3"
    - *C.HOUDEMENT (1999) "Le choix des problèmes pour « la résolution de problèmes »"*
- n°66
    - PEROZ (2000) "Des problèmes dans les énoncés"
- n°68
    - THOMAZET (2001) "Influence du contexte sur un questionnement d'élèves"
    - DOUAIRE, HUBERT "Mises en commun et argumentation en mathématiques"
- n°69
    - JULO (2002) "Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? "
    - COPPE, HOUDEMENT (2002) "Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire"

ANNEXES

Quelques exemples de défis

Référence *Un rallye pour débattre de mathématique* CDDP du Maine et Loire 1993

Organisation logique d'informations

CE2 Pierre est plus grand que Paul ; Paul est plus grand que Jacques ; chacun d'eux mesure l'une des tailles 135 cm ; 127 cm ; 142 cm
Quelle est la taille de Jacques ?

CM Dans une famille, les 5 frères et sœurs ont du mal à se lever le matin. Alain est toujours levé avant Brigitte. Brigitte est parfois levée avant Corinne et toujours avant Denis. Corinne ne se lève jamais avant Alain mais est parfois levée avant Eric. Eric n'est jamais levé avant Alain et Denis est toujours levé le dernier. Lequel de ces enfants se lève le plus tôt ?

Contexte interne aux mathématiques

Trois nombres qui se suivent ont pour somme 69. Quels sont ces trois nombres ?

Trois nombres qui se suivent ont pour somme 156. ……..

Trois nombres qui se suivent ont pour somme 207. ………

Problèmes contextualisés

CE2 Sur une cible à trois zones (dessin associé), on lance des fléchettes : on marque 5 points dans la zone A, 3 dans la zone B et 2 dans la zone C. J'ai lancé quatre fléchettes cela me fait 13 points. Dans quelles zones ai je lancé des fléchettes ?

CM Sur une cible à deux zones (dessin associé), Pierre lance 3 fléchettes, deux dans le disque A et une dans la couronne B ; il marque 17 points. Eric lance aussi 3 fléchettes, une dans le disque A et deux dans la couronne B et marque 22 points. Combien rapporte une fléchette pour chacune des zones ?

CE2 Alix est sur l'escalier d'une haute tour, sur la neuvième marche à partir du bas. Elle monte 3 marches puis en descend 5 et remonte de 7 marches. Il lui reste encore 6 marches à escalade avant d'arriver en haut. Quel est le nombre de marches de l'escalier ?

CM1 Alix est sur l'escalier d'une haute tour, sur la trente septième marche à partir du bas. Elle monte 34 marches puis en descend 18 et remonte de 42 marches. Il lui reste encore 6 marches à escalade avant d'arriver en haut. Quel est le nombre de marches de l'escalier ?

CE2 Claude habite sur une île reliée au continent par un pont. Depuis qu'il s'est levé ce matin il a traversé 7 fois le pont. Est-il sur l'île ou sur le continent ?

CM Claude habite sur une île reliée au continent par un pont. Depuis qu'il s'est levé ce matin il a traversé 127 fois le pont. Est-il sur l'île ou sur le continent ?

Consulter par exemple

* les fiches Points de départ de *Grand N* - Numéro Spécial Grand N - 2003

* les sites Internet, entre autres :

www.ac-toulouse.fr/math/defi
www.mathkang.org
www.eljm.org/ffjm
http://www.rmt-sr.ch/archives.htm (Rallye Mathématique Transalpin où 8ème suisse =CM1 et 7ème suisse =CM2) etc.

Attention ! Il est toujours nécessaire de contrôler la pertinence des problèmes proposés en analysant les énoncés proposés et en cherchant préalablement (1) les solutions, (2) en déterminant comment les élèves pourraient les résoudre, (3) et quelles compétences minimum sont nécessaires pour cela.