ACTIVITE ... AUTOUR DES POLYEDRES DE PLATON

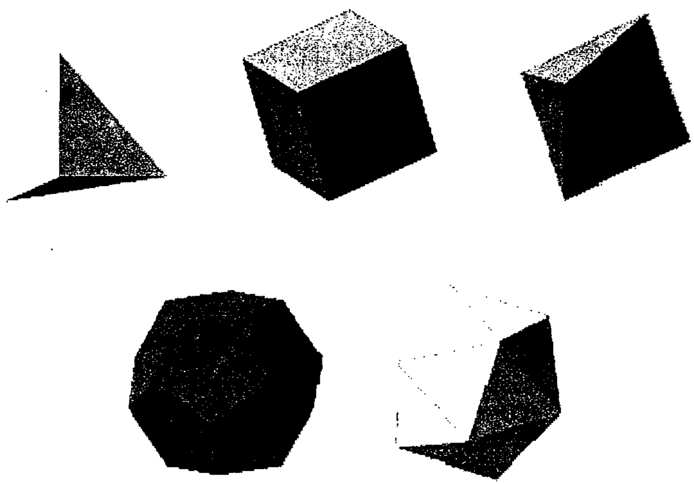
Roland BACHER,
Léa CARTIER,
Denise GRENIER,
Marie-Jo SCHMITT
Groupe « modélisation » IREM de Grenoble

Notre groupe travaille depuis plusieurs années à la construction et l'analyse de situations pour la classe (c'est-à-dire des problèmes et leur mise en scène) dans lesquelles la modélisation, en particulier dans son aspect intra-mathématique, est présente soit pour la résolution du problème, soit comme activité propre.

Nous vous présentons ici des éléments de réflexion autour des polyèdres réguliers, qui ont donné lieu à une activité réalisée en classe de seconde, avec matériel de construction (barres et billes magnétiques ou pâte à modeler et cure-dents). Ce texte est préliminaire à un travail mathématique et didactique plus approfondi qui fera l'objet d'une publication ultérieure développant les différents points abordés ici.

I. Les polyèdres réguliers dans les manuels

Les **5 polyèdres réguliers** de l'espace, dits polyèdres de Platon, sont respectivement le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre :



Les polyèdres, en particulier les polyèdres réguliers, sont présents dans les manuels de mathématiques de seconde dans les chapitres de géométrie dans l'espace. Un certain nombre de manuels proposent des activités spécifiques aux polyèdres réguliers, accompagnées parfois de la formule d'Euler, ou élargies aux polyèdres

Petit x 70, 73-79, 2006

archimédiens (polyèdres réguliers tronqués). Cependant, la place des polyèdres réguliers est généralement dans des parties de manuels semblant « annexes » : « interdisciplinarité », « thème d'ouverture », « un peu d'histoire », « module », etc. De plus, le fait qu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers, est donné comme allant de soi, et leur représentation figure avant tout travail sur l'objet[1].

II. Une activité de définition et de construction des polyèdres réguliers

Cette activité a pour but de travailler la définition de polyèdre régulier, puis de les découvrir par construction matérielle. Nous avons construit une activité adaptable à différents niveaux (dès la quatrième jusqu'en terminale, ou même à l'université), qui permet, tout en restant proche des programmes du secondaire, d'étudier en particulier :

- la caractérisation des polyèdres réguliers (type de faces, nombre de faces partant d'un sommet, convexité, etc.) et leur nombre.
- les liens entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre (formule d'Euler),
- les positions relatives des plans déterminés par les sommets ou les faces d'un polyèdre,
- le lien entre construction de polyèdres et pavages,
- les notions de régularité, de rigidité, de co-planarité, ou encore de convexité.

Il permet aussi, voire il nécessite, un travail dans le plan, sur les polygones et leurs angles.

Cette activité est basée sur un matériel spécifique : arêtes et billes aimantées, ou plus simplement tiges de bois (cure-dents par exemple) et pâte à fixer (pour ne pas citer le nom de la marque associée). Ce matériel permet, entre autre, de :

- Faciliter l'entrée des élèves dans les questions de **définition et caractérisation des polyèdres réguliers de l'espace**
- **Visualiser** des éléments difficiles à repérer avec papier/crayon, en particulier **les positions respectives des faces, des sommets, le parallélisme des plans**, etc.

III. Compte-rendu synthétique d'une séance de recherche d'élèves de seconde

Notre situation a été réalisée dans le cadre de l'option « Démarches et expérimentations scientifiques » dans une classe de seconde[2]. Nous décrivons ci-dessous de manière succincte le déroulement de la séance et les principales productions des élèves en groupes.

[1] Sur les 9 manuels de seconde édition 2004 que nous avons étudiés, 6 traitent des solides de Platon, un lors d'un exercice « classique », les autres dans des rubriques « activités » ou « travaux pratiques ».

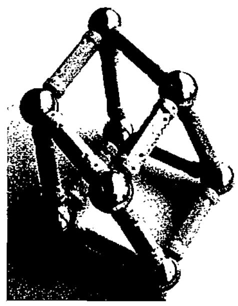
[2] Le lycée Charles Poncet à Cluses (Haute-Savoie) avec les deux enseignants de mathématiques de cette « Option Sciences », Marie-Jo Schmitt et Michel Lamarre (également formateur à l'IUFM de Bonneville)

La consigne donnée au départ aux élèves est : Construire des polyèdres réguliers

Première étape : Qu'est-ce qu'un polyèdre régulier ? Vers la construction d'une définition

Pour la lecture de ce compte-rendu, les consignes, les réponses du professeur et ce qu'il montre aux élèves sont bordés d'un trait noir, les réponses et réflexions des élèves sont précédées du signe ☼, nos propres remarques sont *en italique.*

☼ Confusion des termes polyèdre et polygone.
Un polyèdre est un solide de l'espace.



☼ Les faces sont planes.
Ni sphère, ni cylindre.

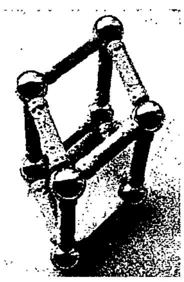
☼ Les arêtes sont égales.
Le cube déformé (un rhomboèdre « pas trop » régulier) ne convient pas (*voir ci-contre*).

Le matériel de construction est distribué aux élèves : le distribuer plus tôt aurait pu induire les propriétés précédentes.

☼ Les faces sont superposables

Le professeur exhibe un exemple de polyèdre qui ne correspond pas à ce qu'il nomme « régulier ».

Ce rhomboèdre à faces losanges superposables ne convient pas.



☼ Toutes les faces sont des polygones réguliers.
Le double tétraèdre ne convient pas.

☼ Recherche des élèves sur ce qui ne convient pas dans ce solide.
Quelle que soit la façon dont on tourne le solide, on veut voir le même objet.

☼ Certains sommets sont reliés à 4 faces, d'autres à 3.

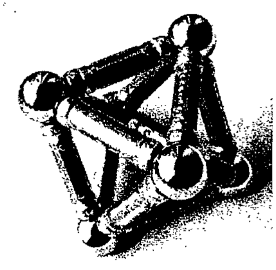
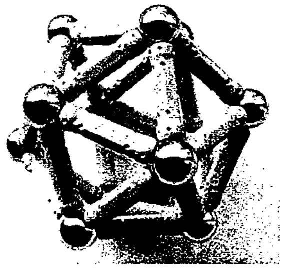
De cette réflexion naît une première caractérisation d'un polyèdre régulier :

☼ **Solide de l'espace dont les faces sont des polygones réguliers superposables, les arêtes sont égales et tel que quelque soit la façon dont on tourne le solide, on peut voir le même objet.**

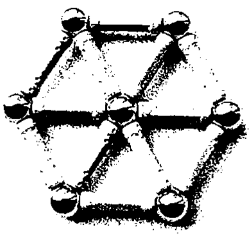
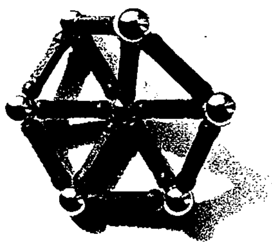
Cette caractérisation ne contient pas explicitement la notion de convexité, cachée derrière la propriété : « quelle que soit la façon dont on tourne le solide, on peut voir le même objet ».

Deuxième étape : Constructions effectives de solides

Les élèves commencent par chercher des solides dont les faces sont des triangles équilatéraux, en construisant successivement à partir de chaque sommet 3 triangles, puis 4, puis 5, ce qui donne le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.

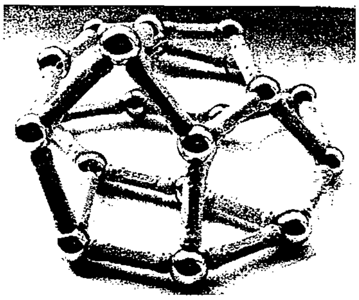
Les élèves cherchent alors à construire un solide pour lequel de chaque sommet partent 6 faces. Les formes obtenues deviennent rapidement instables, leurs courbures ayant tendance à s'inverser (photos ci-dessous).

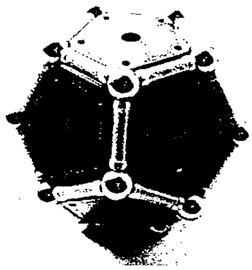



Cette instabilité amène à l'hypothèse qu'un tel solide n'existe pas, alors que le matériel semble le permettre (les tiges en bois/pâte à fixer amplifiant ce phénomène). Ceci amène à un travail avec papier/crayon qui permet d'invalider la possibilité d'une telle construction : puisque 6 triangles équilatéraux pavent le plan, on ne peut construire un solide avec une telle base. Un travail sur les polygones réguliers, en particulier sur le calcul des angles de ces figures permet de retourner aux polyèdres et d'exhiber les 5 solides de Platon.

Un nouveau problème de construction se pose alors avec le dodécaèdre, son 1-squelette[3] n'étant pas rigide géométriquement et donc matériellement (figure de gauche). Une réflexion conjointe des élèves et du professeur conduit à un travail sur les degrés de liberté de chaque arête. Un matériel complémentaire (non utilisé dans cette séance) aurait permis de rigidifier la construction précédente et donc de visualiser le dodécaèdre régulier (figure de droite).

[3] Le 1-squelette d'un polyèdre est un graphe dont l'ensemble des sommets et des arêtes sont ceux du polyèdre. C'est en quelque sorte sa structure.





En faisant tourner un polyèdre sur un de ses axes, le matériel aimanté permet aussi de montrer la coplanarité de 2 sous-ensembles de sommets et le parallélisme de certains de ses plans.

Cette activité n'a pas produit de preuves pour toutes les propriétés abordées. Nous en étudions un prolongement de ce point de vue.
En attendant voici quelques éléments mathématiques pour enrichir la réflexion.

IV. Eléments d'étude mathématique

Le tableau ci-dessous donne, d'une part, le nombre de sommets, arêtes et faces des 5 solides de Platon, et d'autre part, le nombre des isométries qui conservent chacun de ces solides.

Nom	Sommets	Arêtes	Faces	Isomorphismes
Tétraèdre	4	6	4	24
Cube	8	12	6	48
Octaèdre	6	12	8	Idem
Dodécaèdre	20	30	12	120
Icosaèdre	12	30	20	Idem

Remarques

• Les trois premières colonnes permettent de vérifier la formule d'Euler, qui donne la relation $\boldsymbol{s - a + f = 2}$ entre le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f du polyèdre.

• Le nombre des isométries d'un solide est égal au nombre d'isométries conservant une face, multiplié par le nombre de faces du solide. Ainsi, le dodécaèdre, formé de 12 pentagones réguliers, chacun étant conservé par 10 isométries, admet 120 isométries.

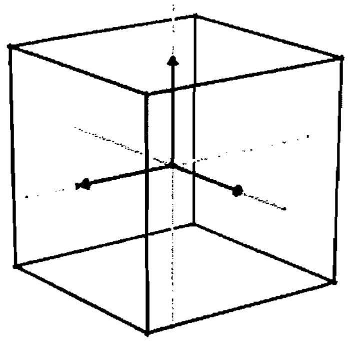
Le tétraèdre

Les 4 faces du tétraèdre sont des triangles réguliers (c'est-à-dire équilatéraux). Trois faces se rencontrent en chaque sommet.

Une construction possible du squelette d'un tétraèdre dans un repère orthonormé de $\mathbf{R}^3$ consiste à choisir pour sommets les 4 points de coordonnées (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1) et (-1, 1, -1), chaque sommet étant relié aux trois autres par une arête de longueur $2\sqrt{2}$. Trois quelconques de ces 4 points déterminent une des faces du tétraèdre.

Le cube

Le cube peut être décrit dans un repère orthonormé comme le produit des intervalles [-1, 1] sur chacun des axes qui s'écrit aussi : $[-1, 1]^3 \subset \mathbf{R}^3$. En voici une représentation :

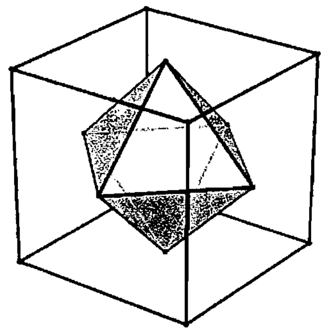


Les 6 faces du cube sont des carrés. Trois faces se rencontrent en chaque sommet. Les 4 droites déterminées par les 4 paires de sommets opposés du cube se rencontrent selon un angle constant $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ en le centre du cube. Les sommets du cube se partagent en deux sous-ensembles de 4 sommets (à distance $2\sqrt{2}$ pour le cube $[-1, 1]^3$) contenant un seul sommet dans chaque paire de sommets opposés et formant deux tétraèdres réguliers.

Cette construction se généralise à toute dimension et donne les *hypercubes réguliers.*

Octaèdre

Les 8 faces de l'octaèdre sont des triangles réguliers. 4 faces se rencontrent en chaque sommet. L'octaèdre est le dual du cube, c'est-à-dire le solide obtenu en prenant comme sommets les centres des 6 faces du cube. On trace une arête entre 2 sommets, si les 2 faces correspondantes du cube sont adjacentes.



La généralisation, appelée *hyperoctaèdre* existe également en toute dimension.

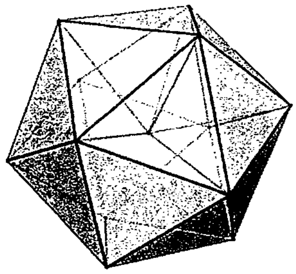
Dodécaèdre et icosaèdre

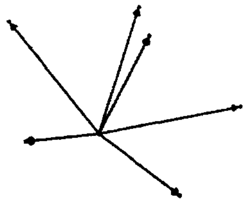
Les 20 faces de l'**icosaèdre** sont des triangles équilatéraux. 5 faces se rencontrent en chaque sommet.

Le **dodécaèdre** est le dual de l'icosaèdre. Ses 20 sommets sont obtenus en prenant les centres des 20 triangles formant les faces de l'icosaèdre. Les 12 faces du dodécaèdre sont des pentagones réguliers. 3 faces se rencontrent en chaque sommet.

Remarquons que le ballon de foot est un dodécaèdre (sphérique) noir modifié dans lequel on a remplacé chacun des 20 sommets du dodécaèdre par un hexagone sphérique régulier blanc de taille convenable.

Le dodécaèdre et l'icosaèdre sont des « accidents » (exceptions liées à la dimension 3) et sont donc plus difficiles à construire que les précédents. Une construction élégante repose sur l'observation que les 12 sommets d'un icosaèdre centré à l'origine sont les extrémités des 6 vecteurs unitaires de la forme $+v_1, \ldots, +v_6$, et leurs opposés $-v_1, \ldots, -v_6$.





Les 6 droites par les vecteurs $v_1, \ldots, v_6$ ($L_1 = \mathbf{R}\, v_1, \ldots, L_6 = \mathbf{R}\, v_6$) forment un système *équiangulaire* (deux droites distinctes $L_i \neq L_j$ se croisent à l'origine selon un même angle α).

Pour construire ces deux solides, il suffit donc de construire un tel système équiangulaire, de six droites dans $\mathbf{R}^3$. Les intersections de ces droites avec la sphère unité donnent les 12 sommets de l'icosaèdre.

On construit ensuite le dodécaèdre par dualité.

Le dodécaèdre cache un cube (qui lui même cache un tétraèdre régulier), obtenu en choisissant de manière judicieuse pour le cube 8 des 20 sommets.

V. En guise de conclusion

Au-delà d'une activité de construction d'objets tri-dimensionnels, cette situation permet d'aborder avec les élèves des questions fondamentales comme l'existence d'objets de l'espace vérifiant des propriétés données, ou les relations entre preuve et construction géométrique, ou encore les relations entre modélisation et preuve. Une publication plus approfondie sur ces sujets est en cours.

Toutes vos remarques sont les bienvenues, merci de les transmettre à Denise Grenier : denise.grenier@imag.fr.