

LE TRAVAIL "PERSONNEL" AU COLLEGE

Ou le partage des responsabilités didactiques entre
le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation
des devoirs en mathématiques

Partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves

Florence ESMENJAUD-GENESTOUX
DAEST, Université Bordeaux 2

Résumé : Dans la première partie (*Petit x* n° 69) nous avons présenté, à partir de résultats expérimentaux, ce que les parents des collégiens pouvaient raisonnablement (ou ne pouvaient pas) faire pour aider à la réalisation des devoirs du soir en mathématiques. Nous nous étions interrogée sur la manière, pour un enseignant, de conjuguer l'égalité des chances avec la diversité socioculturelle de notre société. La seconde partie tire les conséquences des premiers constats pour suggérer comment aménager les conditions du travail à la maison. Par le truchement de ses 'assortiments' d'exercices, le professeur peut accompagner l'étude personnelle des élèves avec toute son expertise professionnelle.

Mots clés : étude personnelle des élèves – inégalités scolaires – accompagnement parental – organisation du travail à la maison – entraînement – devoirs du soir – table de multiplication – algèbre.

I. Le partage des responsabilités

I.1 Le suivi de la scolarité

Citoyens et pouvoirs publics sont engagés dans l'évaluation des acquisitions scolaires, puisque des décisions majeures seront prises à partir de certains indicateurs (orientations des individus, mesures spéciales à assumer collectivement, etc.). L'obligation d'instruction s'impose à tous les parents pour une durée fixée. Un contrat social leur garantit en échange d'être tenus au courant des avancées et des difficultés rencontrées.

Les parents de collégiens ne peuvent se soustraire à cet assujettissement, en revanche ils peuvent déléguer à d'autres le suivi individuel et les régulations des apprentissages. Les transactions entre institutions se calent sur les repères objectifs d'une notation. Les enseignants disposent bien évidemment d'outils plus fins pour organiser leur travail. Il est utile également que les familles puissent disposer d'autres moyens que ceux qui sont chiffrés (qui ne peuvent transmettre qu'une petite partie des informations nécessaires) pour estimer ce qui a été effectivement acquis et pour réagir

avant qu'il ne soit trop tard. Tout proposer à leur appréciation engendrerait toutefois des comportements inappropriés et augmenterait l'inquiétude. En effet, certains faits seraient alors détachés des instruments permettant de les interpréter de manière pertinente (rôle des savoirs professionnels). Un compromis stable a été trouvé : à l'école élémentaire tout au moins, certains cahiers jouent depuis longtemps un rôle de navette entre la classe et la maison pour compléter les bulletins. Mais il serait envisageable d'imaginer encore d'autres supports pour donner à voir les progrès des élèves.

I.2 Qui corrige ?

Trois constats au moins interrogent les limites d'une coopération entre l'école et les parents (et tous ceux qui prolongent leur action) qui soit directement en lien avec les contenus d'enseignement. Quotidiennement, concernant les devoirs du soir, les enseignants prennent des décisions qui portent le risque de banaliser le recours à un appui extérieur. Sachant que la référence en matière d'évaluation est celle instituée par le système scolaire, il n'est pas nécessaire de confier aux accompagnateurs la correction systématique de ce que l'élève produit (un temps est ménagé dans la classe pour établir la validité des résultats et pour vérifier la présentation des réponses). L'enjeu du travail prescrit qui s'effectue hors de la classe ne peut guère être la mesure des connaissances (les réponses sont produites dans des conditions fort diverses et difficilement contrôlables pour un professeur).

Pourtant l'étude en autonomie présente des avantages qui ne sont pas dénués d'intérêt pour le professeur, comme pour l'élève :

- estimer l'implication des élèves relativement à une tâche bien précise / montrer sa bonne volonté, indépendamment de sa capacité à résoudre ;
- faire vivre publiquement la nécessité d'assumer le projet d'étudier sans l'arbitrage immédiat de celui qui sait déjà / comparer en toute légitimité sa production avec des pairs, demander activement conseil puis tirer soi-même les conséquences (plutôt que de se laisser porter, ou de négocier une réponse qui dispensera de toute correction ultérieure).

I.3 Un accompagnement transitoire

Avant que les élèves puissent assumer complètement leur travail personnel, l'entourage proche semble bien placé pour apporter le réconfort nécessaire. En effet, il faut une certaine dose de courage pour s'astreindre à une même tâche dans la longue durée. Contrairement à l'apprentissage, un entraînement n'améliore pas aussi visiblement la prise sur le monde. Il n'augmente pas la collection des savoirs acquis qui peuvent être fièrement énumérés. Il n'apporte pas de gratification immédiate comme la découverte d'un nouveau territoire à explorer. Il réclame plus de ténacité qu'un zapping. Il faut déjà "s'y connaître un peu" pour percevoir l'intérêt de travailler une technique. Sinon la répétition paraît lassante, injuste, rébarbative. Heureusement, l'enthousiasme renaît dès que s'ouvre la perspective d'autres possibles avec un ancien objet¹. Mais en attendant, cet espoir doit être relayé par d'autres, qui d'expérience connaissent les avantages que procure le patrimoine savant.

¹ S. Freud a théorisé le plaisir du jeune enfant qui découvre sa maîtrise sur un jeu et le réitère inlassablement (je lance un objet, l'autre me le rapporte, je le lance à nouveau, ... : le « fort-da »).

La classe de 6^{ème} joue un rôle charnière dans la formation au métier d'élève. L'autonomie de l'étudiant est encore en devenir. Il serait vain de vouloir écarter les familles d'une construction qui s'effectue en privé, ou de compter sur les relations conflictuelles de l'adolescence pour tenir les parents à distance. Il n'est guère réaliste non plus de vouloir passer brutalement d'une absence de devoirs du soir à un travail personnel soutenu. Or la plupart de ceux qui s'adressent aux parents (mais aussi aux acteurs du périscolaire ou encore aux tuteurs) oscillent entre valorisation des efforts entrepris (au risque d'entretenir des illusions) et disqualification des pratiques qui imitent naïvement le modèle professoral sans jamais pouvoir l'égaliser.

Une manière de sortir de cette impasse serait de développer une ingénierie spécifique pour organiser une évolution progressive. Nous pensons que la participation d'un tiers au "travail à la maison" mérite en effet d'être professionnellement assumée dès la conception. Une nouvelle culture didactique pratique serait à inventer². Une culture qui serait commune à tous ceux qui accompagnent l'étude personnelle des élèves. Une culture qui reconnaisse, respecte et défende le caractère transitoire de cette coopération domestique ou professionnelle. Une culture qui se populariserait facilement, tout en s'harmonisant mieux avec l'enseignement actuel. Une culture qui rénovait l'ancien contrat (le partage des responsabilités) et le stock des exercices à donner à résoudre.

Dans une telle perspective, les conditions de l'étude accompagnée pourraient tenir compte des résultats empiriques suivants :

- un accompagnateur amateur (même doté de certaines connaissances mathématiques et pédagogiques) est facilement en difficulté pour suivre un élève ordinaire (a fortiori un élève en difficulté d'apprentissage) ;
- il est plus commode et efficace d'agir directement sur les comportements des acteurs de l'étude par le biais de situations prescrites, que de tenter de les convaincre (les seules déclarations sont souvent vaines et stériles ; les moyens méthodologiques généraux s'avèrent impuissants s'ils ne peuvent être coordonnés avec le problème posé, avec les erreurs produites, avec les impasses à dépasser).

Nous reviendrons dans la quatrième partie de ce texte sur le projet d'associer ponctuellement l'entourage familial des jeunes collégiens à certaines activités mathématiques. Intéressons-nous d'abord aux contenus des devoirs à réaliser en autonomie (c'est à dire lorsque les élèves conduisent eux-mêmes leur étude en endossant certaines responsabilités didactiques).

² A cet égard, le tout récent fascicule officiel « mon journal de 6^{ème} » ne semble pas à la hauteur des enjeux.

II. L'entraînement des savoirs

II.1 Réhabiliter la pratique des exercices

Des activités variées sont maintenant proposées durant les séquences de mathématiques. Certaines situations sont d'une conduite bien trop sophistiquée pour être reproduites par un non professionnel. En comparaison, les exercices paraissent des objets banals, moins intéressants ; ils demeurent pourtant incontournables.

Lorsque les élèves ont compris et identifié une manière de résoudre, les professeurs savent bien que le travail n'est pas terminé pour autant : l'approfondissement d'un objet d'étude exige une certaine familiarité préalable et toute pratique routinière requière un entraînement. Chaque étape d'un processus d'enseignement correspond à des intentions, des conditions et des enjeux différents. Il ne semble donc pas déraisonnable de chercher à adapter les dispositifs à ces variations. Distinguer avec plus d'expertise les différentes fonctions que nous attribuons aux exercices, devrait redonner sa dignité à un pan essentiel du métier d'enseignant.

II.2 Le contrat du "travail à la maison"

Le travail prescrit qui s'effectue hors de la classe prolonge la temporalité scolaire, allonge la durée des pratiques individuelles et permet des ajustements selon les rythmes de chacun. Pour l'enseignant qui l'organise, l'étude personnelle est un moyen supplémentaire d'atteindre certains objectifs pour tous les élèves (il prescrit les mêmes devoirs, indépendamment des difficultés différentielles), mais pas tous ses objectifs.

La résolution d'un problème nouveau n'est guère adaptée au travail à la maison des écoliers et des collégiens. Pour répondre à une question problématique, hors de l'arbitrage d'un professeur de mathématiques, il faudrait que les élèves soient déjà bien rôdés à la recherche de solutions originales et qu'ils soient capables de résister à l'instabilité propre à cette posture. Nous avons présenté, dans la partie 1 du présent article, une expérimentation qui nous a permis d'observer l'accompagnement parental. Cette recherche met à jour plusieurs distorsions de "l'aide apportée" lorsque l'élève est confronté à un énoncé problématique (qui n'est associé à aucune procédure experte déjà enseignée). Dans de telles conditions, c'est l'accompagnateur qui produit la réponse (éventuellement fausse d'ailleurs). Avec les collégiens de 3^{ème}, les observations ont montré au contraire que l'adulte laissait au jeune plus d'initiative. Indépendamment du fait que chaque partenaire sache ou non résoudre, l'élève tendait à prendre la résolution à sa charge et l'accompagnateur tendait à s'effacer (ou résolvait lui-même de son côté). Selon nous, il s'agit de comportements mutuels qui se répondent l'un l'autre et qui sont à rapprocher plutôt du statut scolaire des savoirs en jeu et de la nature de la tâche demandée, bien plus que de l'âge ou du niveau de l'élève (ou du niveau du parent). Contrairement à ce que se passait pour les autres, les élèves de 3^{ème} reconnaissaient un type d'exercice en lien avec leur programme (un système de deux équations à deux inconnues), ils pouvaient lui associer une méthode canonique (même s'ils ne savaient pas pleinement la mettre en œuvre pour établir un résultat correct). L'incertitude était alors beaucoup moins importante pour chaque protagoniste.

Certains élèves, *sensibles au contrat didactique*³, paraissent plus attentifs à la forme qu'au fond. D'autres, s'estiment quittes dès qu'ils ont compris et peuvent produire une réponse ; ils attachent d'emblée peu d'importance à la présentation d'une solution ou d'une démonstration (ou même au moyen de parvenir au résultat, comme ceux qui persistent dans le secondaire à compter sur leurs doigts au lieu d'utiliser un répertoire numérique commode, mais coûteux à acquérir). Dans les deux cas, une pratique régulière les aide à percevoir ce qui est attendu et pourquoi. Au professeur de désigner la 'meilleure' méthode à adopter (relativement à un projet, à un niveau de connaissance, à une fréquence d'utilisation, à des conditions futures d'application, etc.). A l'élève de se faire la main sur les savoirs qui lui sont signalés comme efficaces. Un étudiant aguerri n'arrêtera son étude personnelle que lorsqu'il se sentira assuré.

Fabriquer une évidence ne passe pas par une accumulation de réussites (la validité des réponses peut être fortuite ou incommunicable), mais par l'identification d'un type de questions. Ces questions sont à mettre en relation avec des moyens de résoudre d'une part, et avec un répertoire de contrôle d'autre part (qui fait souvent appel à la compréhension). La possibilité de s'auto-évaluer participe à l'assurance en sa réponse, et à la confiance en ses capacités. L'enjeu didactique des devoirs à la maison est rarement l'établissement d'une réponse supplémentaire. Bien souvent, il concerne une reproductibilité potentielle d'une réponse fiable à volonté, dans la perspective d'un usage émancipé des savoirs (dans lequel l'utilisation porte seul les conséquences de ses décisions). Un tel contrat d'étude ne peut concerner que des savoirs déjà enseignés et déjà relativement familiers. Il organise collectivement l'entraînement, en vue d'un maniement sûr et rapide. C'est un rôle essentiel à préserver dans l'enseignement obligatoire, pour les savoirs qui sont désignés comme fondamentaux par la société (c'est à dire qui ont vocation à devenir des outils pour la suite du parcours scolaire, pour la formation professionnelle ou pour la vie ordinaire).

II.3 Percevoir des manettes de commande

Celui qui étudie seul chez lui, règle la durée, l'intensité, la cible de son entraînement, il apprend à identifier ses points faibles et s'acharne sélectivement pour les estomper. Durant le temps de l'étude personnelle, le professeur passe ponctuellement le relais aux élèves sur des questions qui ne leur sont plus étranges. L'élève qui se saisit du projet de les étudier, agit lui-même sur certains curseurs didactiques. Pour qu'il accepte ces nouvelles responsabilités, il convient qu'il soit muni des moyens d'y parvenir (en particulier, qu'il bénéficie des exercices adéquats). Un jour, il deviendra capable de compléter le dispositif d'étude prévu (souvent conçu comme un minimum), en puisant de lui-même dans des ouvrages le type de questions sur lequel il a besoin de développer et d'entretenir ses performances.

A l'entrée en 6^{ème}, le premier travail personnel en autonomie peut facilement s'actualiser sur l'étude des répertoires numériques (ceux déclarés exigibles dès la fin du cycle des approfondissements en primaire, auxquels viendront peut-être s'ajouter d'autres résultats utiles à connaître et à savoir : équivalences d'écritures pour des quotients courants, valeurs approchées de nombres non rationnels, etc.). La familiarité avec le numérique permet en effet d'explicitier avec les élèves ce qui est attendu d'eux

³ Pour le concept de contrat didactique, voir Brousseau (1998) et Sarrazy (1995). Pour celui de sensibilité au contrat didactique, voir Sarrazy (1996).

lorsqu'ils doivent y travailler hors de la classe (réponse directe/calcul réfléchi, signification de l'égalité qui se lit dans les deux sens, etc.). Apprendre une table de résultats pour les utiliser (et non pour seulement les réciter) ne correspond pas à une simple mémorisation. Les moyens mnémotechniques ne sont que localement efficaces, tandis que la pratique mathématique appelle en renfort la compréhension et la cohérence (ici, de la numération décimale, des propriétés des nombres et des opérations, etc.). Moyennant quelques aménagements, un accompagnement domestique peut soutenir ce projet d'étude, tout en respectant la prise de responsabilité de l'étudiant novice. Est-ce à dire que le professeur de 6^{ème} n'a pour autant plus de rôle à jouer ?

Le cas des tables de multiplication

Lorsque 'toute' la Table de multiplications est désignée pour être révisée, certains élèves astucieux (ou parents cultivés) optimisent leur travail (un tel retient bien 7×8 contre toute attente, mais butte toujours sur 4×6 et 3×8 ; tel autre est imbattable sur la table de 9, mais ne connaît pas les autres produits dont les facteurs sont supérieurs à 6). D'autres élèves obéissent scrupuleusement à l'injonction, ils reprennent dans l'ordre chaque produit (peut-être même sans penser à bénéficier de la commutativité) et abordent chaque fois en fin de parcours (au moment où ils sont le plus fatigués) la partie la plus épineuse, diluant ainsi leurs forces au lieu de les réserver au bon endroit. Pourquoi ne pas désigner plus précisément la cible sur laquelle s'entraîner (en prenant quelques libertés transitoires avec les poncifs culturels) ?

Une Table de Pythagore rassemble un grand nombre de résultats (121, si l'on consigne tous les produits dont les facteurs entiers sont compris entre 0 et 10), mais le nombre de formules à connaître directement peut significativement se réduire à 36 (ce qui modifie considérablement l'appréciation des efforts à fournir)⁴. Au contraire, à d'autres moments du processus d'enseignement, le répertoire gagne à paraître grand : lorsqu'il s'agit de représenter les potentialités que l'apprentissage permet (le gain escompté est une justification des efforts à entreprendre) ou de mesurer ce que l'on sait déjà.

En CE1 ou en 6^{ème}, l'enseignant n'établit pas les mêmes objectifs, ni les mêmes priorités sur les produits élémentaires :

- le langage évolue (une première formulation langagière comme 3 fois 4, qui accorde un statut différent au multiplicateur et au multiplicande en référence à l'addition, devient par la suite un énoncé utilisant le symbole standard et fixant indifféremment un ordre pour les facteurs : 3×4 ou 4×3) ;

- l'utilisation se diversifie (une décomposition multiplicative sollicitera plus tard les formules dans le sens réciproque, pour les divisions, le calcul avec les rationnels, l'algèbre, etc.: 15 c'est 3×5)

- pour rester opératoires, les connaissances doivent évoluer en fonction des formes de la question car le temps laissé pour répondre et les conditions matérielles (jetons, papier/crayon, aucun instrument, etc.) influent sur la production (et la vérification) du résultat.

⁴ L'idée n'est pas récente et correspond à une optimisation des pratiques du calcul, lorsque le calculateur humain ne disposait pas d'instrument aussi sophistiqué que nos calculatrices électroniques. Voir par exemple le manuel de Condorcet, réédité par Coutel, Picard et Schubring (1988).

Pour les élèves également, l'étude de chaque savoir ne fonctionne pas toujours au même régime : acquérir une dextérité uniformément répartie sur le répertoire (maîtriser 7×8 comme 2×5), demande en général une différenciation du temps et des moyens à consacrer à chacun.

II.4 Fabriquer de l'égalité pour l'étude

L'optimisation des conditions didactiques de l'étude constitue une aide précieuse pour les élèves. Concernant la partie qui peut leur être déléguée, pourquoi ne pas les mettre au courant pour prévenir les malentendus au moment de préparer une évaluation⁵ et pour contrecarrer les effets de l'hétérogénéité sociale ? Il est en effet établi⁶ que la capacité à s'affranchir des habitudes culturelles dépend à la fois des connaissances et d'un certain nombre d'arrière-plans familiaux (comme les pratiques éducatives, les systèmes de valeurs, etc.). Aussi, refonder plus démocratique l'enseignement passerait par la transmission à tous les élèves de la manière de conduire son étude personnelle (non seulement du point de vue méthodologique, mais aussi de manière particulière à chaque contenu disciplinaire). Peut-on conclure pour autant qu'il suffit de l'explicitement verbalement ? La pratique prescrite est un moyen indirect et rapide de communication (une communication pragmatique⁷) qui peut même se révéler meilleur que le dialogue dans certains cas.

La dimension didactique a donc un rôle à jouer pour l'organisation scolaire de l'étude personnelle (détermination des conditions favorables), y compris, ce qui peut sembler étonnant, pour les objets très largement diffusés dans la société (une table de multiplication, une calculatrice, une règle graduée, etc.). Puisque la vie pratique et quotidienne tend à réduire la part de connaissances laissée sous la responsabilité de l'utilisateur, il est difficile (a fortiori pour le néophyte en mathématiques qu'est souvent l'accompagnateur des devoirs à la maison) de réintroduire une activité mathématique durant le temps de l'apprentissage. Les objets ordinaires ne sont donc pas, contrairement à l'opinion courante, de bons milieux didactiques pour le travail hors de la classe.

III. Des assortiments d'exercices

Depuis des décennies, la recherche en sciences de l'éducation et en didactique a surtout porté son attention à la construction des connaissances qui donnent du sens à l'usage des savoirs. Il s'agissait de rompre avec des conceptions séculaires et de proposer des alternatives au seul mode transmissif. L'espoir d'améliorer l'enseignement des mathématiques s'en est trouvé renforcé. Hélas, tel un contrepoids, les gestes professionnels qui organisent l'entraînement de ces savoirs ont été laissés dans l'ombre. Certes les textes officiels ne manquent pas de rappeler régulièrement le caractère indispensable d'une résolution intensive d'exercices. Mais cette pratique, si souvent ridiculisée ou dévaluée (spécialement hors des établissements scolaires), aurait bien besoin de redorer son blason (ce qui n'implique pas pour autant de revenir stricto sensu

⁵ Pour une analyse des gestes de l'étude en mathématiques au collège, voir Félix (2002).

⁶ Lautrey (1980).

⁷ Watslawick P. (1972).

aux pratiques ancestrales ou de remettre systématiquement en question les avancées apportées au cours du XX^e siècle).

III.1 Choisir et adapter une suite de questions

Préserver les conditions de l'institutionnalisation (une phase qui peut s'étaler sur une durée relativement longue), c'est entre autres s'intéresser à la manière d'assortir plusieurs exercices ou plusieurs questions, qui seront donnés à résoudre ensemble, dans une même foulée, en vue de faciliter l'étude. Certains questionnements sont si essentiels à la pratique mathématique que le professeur, non seulement les soumettra de nombreuses fois aux élèves, mais les intensifiera aussi par moments. La notion d'assortiment didactique vise à modéliser les critères de choix liés à cette densification de questions (en particulier lors de l'entraînement). Un assortiment didactique est "une suite ordonnée de questions, réunies sous une même intention didactique, réalisables dans une unité de temps didactique" (Esmenjaud-Genestoux, 2000). Toute question peut évidemment être analysée pour elle-même, mais l'analyse en terme d'assortiment considère plus globalement l'effet de ce qui sera donné à résoudre de manière groupée ; elle focalise l'attention non pas sur une collection de questions prises chacune isolément, mais sur les liens qu'elles entretiennent entre elles, leur succession, l'intercalation, etc.

S'entraîner à factoriser à l'aide des identités remarquables

Pour illustrer l'intérêt de ce concept, nous nous intéresserons à l'autre extrémité du parcours du collégien, la classe de 3^{ème} et à un autre répertoire à étudier, celui des "identités remarquables" (soit classiquement 3 formules algébriques). Les élèves, en cette 4^{ème} année d'enseignement secondaire, sont en principe mieux rodés au travail en autonomie que leurs jeunes collègues. Mais la complexité de l'algèbre leur rend difficile l'étude spécifique de l'usage de ces formules⁸. La nature des 'bonnes' questions à se poser peut leur échapper. Aussi le professeur peut apporter son aide en proposant des exercices qui soulignent les variables de commande de l'étude (et qui sont conçus a priori pour limiter un hypothétique soutien extérieur).

L'exemple qui suit se bornera à un usage particulier des identités remarquables : la factorisation de polynômes et n'abordera que partiellement les questions didactiques qu'une analyse en terme d'assortiment est susceptible de soulever. Nous avons constitué notre corpus à partir d'exercices puisés dans des manuels scolaires (niveau 3^{ème}). Nous considérerons ici comme indicateur d'une densification du questionnement le fait que plusieurs exercices relativement courts réfèrent à une consigne commune. Nous avons volontairement choisis deux manuels d'époques contrastées pour diversifier notre illustration (il ne s'agit pas de les comparer en vue de conclure à une éventuelle évolution des pratiques d'entraînement).

⁸ Voir par exemple la brochure *La règle dans tous ses états* éditée par l'APMEP.

Voici les exercices que nous avons extraits de la sorte (à droite, nous avons numéroté les questions) :

- dans la collection *Trapèze* aux éditions Bréal en 2003⁹

Factoriser chacune des fonctions polynômes p suivantes (n° 60 à 64).

$$60 \quad p(x) = x^2 + 4x + 4 ; \quad (1)$$

$$p(x) = x^2 - 4x + 4. \quad (2)$$

$$61 \quad p(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 ; \quad (3)$$

$$p(x) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3. \quad (4)$$

$$62 \quad p(x) = x^2 + \sqrt{5}x + 5/4 ; \quad (5)$$

$$p(x) = -x^2 + \sqrt{5}x - 5/4. \quad (6)$$

$$63 \quad p(x) = 9x^2 + 3\sqrt{2}x + 1/2 ; \quad (7)$$

$$p(x) = 9x^2 - 3\sqrt{2}x + 1/2. \quad (8)$$

$$64 \quad p(x) = 3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2 ; \quad (9)$$

$$p(x) = 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2. \quad (10)$$

- aux éditions Belin en 1972¹⁰ :

Pour les exercices 92 à 103, factoriser les expressions données.

$$92 \quad A = (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x + 3) + (2x - 1)(2x + 1). \quad (1)$$

$$B = (x + 5)^2 - (2x - 1)(x + 5). \quad (2)$$

$$C = (2x - 1)(x + 4) + (2x - 1)(x + 3) + (2x - 1)(2x + 3). \quad (3)$$

$$93^* \quad A = (2x - 3)(5x - 1) - (2x - 3)(x + 1). \quad (4)$$

$$B = (x - 5)(2x + 3) - (x - 3)(x - 5) + x^2 - 5x. \quad (5)$$

$$C = (2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(x - 3) + (2x + 1)(3x + 1). \quad (6)$$

$$94^* \quad A = (x + 2)^2 - (x + 2). \quad (7)$$

$$B = (x + 3)(x - 1) + (3 + x)(2x - 1). \quad (8)$$

$$C = (5x + 3)^2 - (5x + 3). \quad (9)$$

$$95^* \quad A = (x + 2)(2x - 1) - (x + 2). \quad (10)$$

$$B = (x + 2)(2x - 1) + (-x - 2)(3x + 7). \quad (11)$$

$$C = (5x + 3)^2 - 5x - 3. \quad (12)$$

$$96^{**} \quad A = (x + 3)^2 - (2x + 3)(x + 3). \quad (13)$$

$$B = (2x + 3)(5x - 2) - (2x + 3)(x + 1). \quad (14)$$

$$C = (x - 5)(2x - 3) - (x - 3)(x - 5) + x^2 - 5x \quad (15)$$

$$97^{**} \quad A = (x + 3)^2 - (3x - 2)^2. \quad (16)$$

$$B = (x + 2)^2 - (3x - 1)^2. \quad (17)$$

⁹ Auteurs : Gérald, Jacob, Riou, Courivaud, Dodard et Roncin ; exercices n° 92 à 103 pp 38-39.

¹⁰ Auteurs : Monge, Guinchan et Pelle ; exercices n° 60 à 64, p 73.

$$98^{**} \quad A = (3x - 4)^2 - 49. \quad (18)$$

$$B = (2x + 5)^2 - (x - 3)^2. \quad (19)$$

$$99^{**} \quad A = (x^2 - 2x + 1) - (x - 3)(3x + 4). \quad (20)$$

$$B = (4x^2 - 9) + (2x - 3)(5x + 4) - (4x^2 - 12x + 9). \quad (21)$$

$$100^{**} \quad A = (x^2 - 6x + 9) - (x - 3)(3x + 4). \quad (22)$$

$$B = (16x^2 - 9) + (4x - 3)(5x + 4) - (16x^2 - 24x + 9). \quad (23)$$

$$101^{**} \quad A = (4x - 6)(3x + 5) - (2x - 3)^2. \quad (24)$$

$$B = (3x - 5)(x + 2) + 18x^2 - 60x + 50. \quad (25)$$

$$102^{**} \quad A = (3x + 2)^2 - (5x - 7)^2. \quad (26)$$

$$B = 4(3x - 5)^2 - (7 - 2x)^2. \quad (27)$$

$$C = (3x - 5)^2 - 9(2x - 1)^2. \quad (28)$$

$$103^{**} \quad A = (2x - 6)(x + 5) - (x - 3)^2. \quad (29)$$

$$B = (x - 5)(3x + 2) + 9x^2 + 12x + 4. \quad (30)$$

$$C = (5x + 2)^2 - (3x - 7)^2. \quad (31)$$

$$D = 16(x - 5)^2 - (3 - 2x)^2. \quad (32)$$

$$E = (x - 5)^2 - 4(x - 1)^2. \quad (33)$$

Nous avons constitué deux assortiments (que nous désignerons par A et B) en négligeant volontairement les 'frontières' entre les exercices de numéros différents. Chaque suite de 'questions' ainsi obtenue devient une unité pour l'analyse (chaque question étant un polynôme à factoriser).

Par exemple, l'assortiment A est constitué des questions :

$$x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$$

$$x^2 + \sqrt{5}x + 5/4$$

$$-x^2 + \sqrt{5}x - 5/4$$

$$9x^2 + 3\sqrt{2}x + 1/2$$

$$9x^2 - 3\sqrt{2}x + 1/2$$

$$3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2$$

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$$

III.2 La redondance

L'organisation des savoirs répond à plusieurs impératifs d'ordre axiomatique, logique et théorique. Elle vise entre autre l'exhaustivité, la pérennité, l'universalité, la commodité de stockage et de consultation (une 'table' répond très bien à tous ces critères). Mais l'apprentissage appelle d'autres types de contraintes. Il passe par une certaine *redondance* du questionnement, qui dépend bien sûr des individus, mais qui peut être aussi estimée a priori en fonction de la difficulté de la notion à acquérir et du degré de familiarité visé.

L'assortiment A sollicite systématiquement les formules sur les mêmes valeurs numériques familières : chaque question est donc comme doublée. Chaque formule est également fréquentée (5 fois sur 10 questions). Une fréquence non négligeable de rencontre est ménagée avec des nombres non entiers. Les questions de A fonctionnent à l'intérieur d'un mini domaine numérique ($1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 9 ; \sqrt{2} ; \sqrt{3} ; \sqrt{5} ; \sqrt{6} ; \frac{5}{4} ; \frac{5}{2}$).

Soit elles répètent les mêmes calculs, soit elles rapprochent deux savoirs dont la ressemblance est souvent source de confusion pour les élèves. Par exemple : le carré de 3 est sollicité dans les questions 7 et 8 ; le double de 3 est mobilisé dans les questions 9 et 10 ; les élèves rencontrent également les nombres 9, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ et certains doubles et carrés de ces valeurs.

Dans B, toutes les questions mobilisent des nombres entiers (libérant l'attention des élèves pour d'autres variables). Le contexte numérique évolue doucement. Au démarrage, il se cantonne à quelques petites valeurs entières (1 à 6). En guise de diversion, la valeur 7 fait de courtes entrées (aux questions 6, 11 et 18), de même pour les valeurs 8 et 10. Puis le champ s'ouvre un peu à partir de la question 24. Cet ancrage sur un domaine numérique très réduit peut participer à l'élaboration de routine, puisqu'elle soulage momentanément de certains contrôles et focalise les décisions sur des éléments caractéristiques (identification de facteurs communs ou d'une formule, contrôle sur les signes, sur le nombre et l'ordre des termes, itération éventuelle de la procédure). D'autres proximité aménagent des formes répétitives, par exemple deux questions peuvent se faire écho, sans se suivre, tout en restant proches (ici les questions 12 et 9 ne diffèrent que d'une parenthèse).

Dans B, les formules sont mobilisées tardivement (les exercices n° 92 à 96 n'étaient pas destinés à les entraîner). C'est la troisième qui est la plus sollicitée (11 fois, contre 5 et 1 fois pour la seconde et la première formule). La redondance est ici relativement faible si l'on réfère à notre découpage (puisque'elle est de 11 pour 33 questions) ; elle est relativement élevée si l'on réfère à un assortiment qui éliminerait les 15 premières questions. Cette redondance favorable à l'identification de la troisième formule concorde avec une présence plus marquée de la seconde (les élèves tendent à les confondre) et un rapprochement avec l'univers plus vaste de la factorisation (la question 24 ne mobilise aucune formule). Ici la succession des questions (choix d'une juxtaposition au lieu d'une intrication des questions) conduit à distinguer deux procédures (factoriser sans ou avec les identités remarquables) plutôt qu'à insérer des prises locales et opportunes de décisions dans une démarche plus large (le projet de factoriser).

III.3 La taille

S'interroger sur la *taille* des assortiments ouvre plusieurs pistes de réflexion. Le nombre de questions à poser dépend du nombre de savoirs à solliciter. Or, au fur et à mesure qu'un processus d'enseignement se déroule, la collection des questions possibles s'accroît considérablement : de plus en plus de savoirs sont potentiellement mobilisables, de plus en plus de variables sont à prendre en compte (généralisation offerte par les savoirs), sans oublier l'indispensable répétition propre à l'apprentissage. Le problème se pose donc de contenir une taille qui tend à enfler, en hiérarchisant des

priorités pour chaque assortiment et en déterminant des sous-répertoires sur lequel focaliser les interactions.

Ici, la taille du répertoire est si petite (3 formules), que le problème ne se pose pas dans les mêmes termes que pour le répertoire multiplicatif par exemple. Nous remarquons que des choix ont tout de même été faits : A mobilise seulement deux formules (identiques d'un point de vue algébrique), tandis que B les sollicite toutes les trois (avec des proportions différentes nous l'avons dit, ce qui concentre l'intérêt des questions sur la troisième formule).

D'autres contraintes pèsent sur la taille des assortiments : la capacité d'attention et la fatigue des élèves. Celui qui organise un entraînement (l'élève autonome, l'accompagnateur, l'enseignant) rencontre le même dilemme : il faut trouver les moyens d'extraire un nombre raisonnable de questions, sans faire d'impasse épistémologique, pour fréquenter suffisamment souvent les savoirs, sans toutefois laisser (sans rompre la relation didactique). C'est pourquoi une 'bonne' taille ne peut être que relative (elle dépend en particulier de la fonction que l'on fait jouer à l'assortiment dans son contexte didactique). Signalons tout de même deux écueils : un trop fort appauvrissement des rencontres avec chaque formule (cela tend à arriver lorsque l'éventail des variations se veut systématique, exhaustif), ou la mise à l'écart de certaines formules pourtant essentielles (l'inventaire du sous-répertoire associé à l'assortiment devient un moyen de contrôler que la réduction ne s'effectue pas au détriment de telle ou telle).

Outre la cognition, la dimension anthropologique de l'enseignement s'impose parmi les critères à prendre en compte. En effet, la quantité de questions est un moyen indirect d'exprimer l'intensité de l'attente institutionnelle. L'enjeu est un indicateur appréciable pour celui qui va devoir étudier seul chez lui, car le 'prix' à payer (ses efforts) sera le plus souvent fonction de la valeur annoncée (et des questions de factorisations explicitent bien mieux qu'un discours allusif, les circonstances dans lesquelles les élèves devront devenir capables de factoriser).

Considérons donc le geste professionnel qui consiste à créer un effet d'accumulation pour "marquer le coup" (donner à résoudre un volume conséquent de travail pour en désigner l'importance). Dans le premier manuel cité, les exercices étaient regroupés en petits lots (la même consigne était répétée pour chaque lot), tandis que dans l'autre, tous les exercices du même type avaient été rassemblés sous un même chapeau. La stratégie que nous nous étions fixée a priori pour déterminer des assortiments a donc eu ici pour conséquence une importante différence de taille (l'assortiment A se compose de 10 questions, l'assortiment B de 33 questions). Rappelons que chaque manuel prévoit un découpage réaliste et que l'écart de taille est d'abord la conséquence d'un artefact dû à cet exposé. Mais le fait en lui-même suggère que ce caractère n'est pas si neutre qu'il n'y paraît (la caricature peut être utile pour le percevoir). Pour l'utilisateur comme pour les auteurs, un manuel peut se concevoir diversement : constituer une progression minutieusement élaborée qu'il convient de suivre pas à pas pour bénéficier de ses avantages ; ou bien jouer le rôle d'un réservoir de questions, dans lequel professionnels, accompagnateurs, étudiants viennent puiser. Les conséquences qui découlent de ces choix éditoriaux seront évidemment différentes (quatre configurations en découlent). Un enseignant élabore ses propres assortiments en rassemblant plusieurs exercices (qu'il pioche éventuellement en des lieux divers) auxquels il attribue le statut d'une sous-unité (qui est ou non prédécoupée).

III.4 Le rythme induit par l'assortiment

Plusieurs questions peuvent être accolées sans provoquer pour autant d'effet d'ensemble particulier. Mais une succession peut aussi impulser un certain *rythme* dans la résolution, en jouant sur des similitudes et des différences.

Ainsi la présence de '*bruit*' qui parasite l'attention de l'élève, interroge la robustesse des connaissances qu'il doit mobiliser. Une diversité ponctuelle joue comme un signal qui renouvelle l'attention. Dans l'assortiment A, les valeurs $\frac{5}{4}$, $\sqrt{5}$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ font une courte apparition (questions 5 et 6) qui se remarque, parce qu'elle tranche avec la coloration d'ensemble.

L'assortiment A appelle inmanquablement l'une des identités, tandis que B plonge la décision à prendre dans une plus grande complexité. Ce procédé a pour effet de maintenir chez l'élève une vigilance qui n'est pas uniquement cognitive, mais qui touche de près aux connaissances visées : il doit reconnaître seul les conditions d'application des formules.

L'assortiment A procède d'un autre tour de main professionnel : la régularité (cachée à première vue) crée une forme de *complicité didactique* entre celui qui a conçu le dispositif d'étude et celui qui étudie et qui découvre en cours de résolution certaines règles de construction de l'assortiment. Dans l'assortiment A, les formules sont systématiquement sollicitées de manière alternée, sur les mêmes valeurs numériques. Cette structure est tout à fait identifiable par un élève ; les changements de signe lui apparaîtront alors comme surlignés (dès la question 2, une présomption s'élabore, puis se renforce en question 4, en permettant des prévisions pour les autres questions de rang pair).

Disposer d'un rythme cyclique permet de revenir sur un point important en l'entrecoupant d'une *pause* (une question plus facile pour reprendre son souffle) ou d'une perturbation (pour distraire l'attention de manière à ce qu'elle apprenne à résister, à se concentrer). Par exemple, dans l'assortiment B, la question 9 fait écho à question 7 ($a^2 - a$ et $ab - a$) en soulignant l'importance et la spécificité du facteur 1. Ce projet est bien sûr détachable de l'entraînement sur les formules, mais il peut utilement en être rapproché (1 est un carré moins reconnaissable que d'autres, il passe inaperçu dans un double produit). La question 8 fournit l'occasion d'un petit repos, dans le sens où elle met en scène quatre termes bien visibles et répète les premiers termes de la question précédente (les concepteurs des questions ont tout de même introduit une difficulté qui se retrouve dans la question suivante, et qui concerne le parenthésage et les changements de signes).

III.5 Jouer sur le profil de difficulté

Le second manuel propose d'estampiller les exercices, de manière à distinguer trois degrés de difficulté (un codage composé de zéro à deux étoiles). Déterminer soi-même une progression devient alors plus aisé ; les indicateurs fournis par les auteurs (pour qui se fie à leur avis) permettent en effet la ponction d'un ou de plusieurs représentants d'une catégorie donnée et une fabrication "à la carte" d'assortiments.

Les assortiments A et B ont été construits en juxtaposant les exercices successifs d'une présentation écrite (nécessairement figée). Pour B, l'ordre des questions correspond donc à un profil ascendant de difficulté (une suite d'exercices de plus en plus compliqués). Cette organisation logique paraît aller de soi dans un manuel, car elle est aussi commode qu'un index. Mais dans un assortiment, l'ordre des questions influence la réalisation. Un accroissement de difficulté agit comme une colonne de tamis, qui retient plus longtemps dans des mailles de plus en plus resserrées les élèves les plus expérimentés. Une telle représentation des performances correspond plus à un tournoi de champions (qui désigne les vainqueurs de chaque épreuve) qu'à un entraînement ordinaire.

Or ce profil de résolution, bien que courant, n'est pas le seul imaginable, observons celui de l'assortiment A. La résolution est rythmée sur deux temps :

- pour les questions de rang impair : la réflexion est dirigée sur le numérique (détermination des termes de la formules, racines carrées de ces deux termes ; vérifications des doubles produits) ;
- pour les questions de rang pair : la décision se focalise sur les signes.

L'usage de la seconde formule est facilement anticipé par les élèves, mais la forme de présentation, qui varie légèrement à mi-parcours (question 6), réactive l'attention de celui qui résout (cette modification d'apparence minime entraîne d'ailleurs un gros effort de réflexion).

Le profil de difficulté présente un maximum à la question 6 ; puis une phase en plateau maintient un certain niveau de difficulté jusqu'à la fin (niveau moindre relativement au maximum, mais plus élevé qu'au démarrage) ; les deux dernières questions se présentent comme une synthèse simplifiée (présence de deux radicaux, mais pas de dénominateur).

Ici la cohorte d'élèves n'est pas filtrée par l'organisation de l'assortiment : tous démarrent ensemble, certains s'essouffleront peut-être dans la pente, seuls quelques uns arriveront probablement victorieux au sommet, mais les retardataires pourront reprendre la course en route et passer tout de même la ligne d'arrivée avec leurs condisciples (un élève tenace peut, après s'être un peu embourbé sur des questions ardues, terminer ce qui lui était demandé par un succès).

Un tel scénario est bien entendu fictif, mais il peut devenir une représentation rituellement partagée de l'opiniâtreté qui est nécessaire durant l'étude (et s'expliciter dans la classe le moment venu). Si la compétition sélectionne les concurrents (en particulier dans les moments d'évaluation), l'entraînement, lui, peut ménager systématiquement :

- un temps d'échauffement ;
- une montée progressive vers un pic de performance (ceux qui lâcheront un moment la barre, auront tout de même une idée de ce qui est visé) ;
- un long palier quasi constant et adapté à une grande majorité d'élèves (pour développer la robustesse) ;
- une conclusion plus facile (représentant un niveau de base exigible), qui permet à chacun de prouver sa bonne volonté malgré les éventuelles difficultés rencontrées plus haut.

Reprenons le détail des variations dans l'assortiment A :

- le démarrage s'effectue en douceur (d'autant que le choix de la valeur 2 aplatit la distinction double/carré, le phénomène n'apparaissant qu'une fois) ;
- la question 3 fournit la tonalité générale : il s'agit de rapidement reconnaître des carrés (même pour des nombres familiers qui ne sont pas des carrés parfaits) ;
- les nouvelles difficultés s'actualisent d'abord sur des valeurs familières ($\sqrt{5}/2$; le premier dénominateur est 2 ; le numérateur radical se distingue nettement), puis le premier dénominateur non entier est $\sqrt{2}$ (avec une simplification du carré très familière : $4/2$ ce qui permet de vérifier l'ensemble) ;
- les dénominateurs n'entrent en scène qu'à la question 5 ; ils accompagnent les radicaux durant 4 questions, puis s'effacent à nouveau derrière eux, pour les laisser seuls sous les projecteurs (cette nouveauté est une avancée épistémologique importante, qui illustre la puissance généralisante de l'algèbre¹¹).

L'agencement des questions de l'assortiment B est tout autre. Il pourrait s'apparenter au 'désordre' intentionnel qui sollicite un répertoire de manière aléatoire (comme celui qui vérifie que les produits élémentaires sont sus indépendamment les uns des autres, sans être attachés en chapelet comme une portion de table). La pertinence didactique de telle ou telle forme d'organisation n'est pas une propriété intrinsèque de l'assortiment, elle est relative à l'intention du professeur et à l'instant choisi. Au terme de la transmission, l'élève joue lui-même de cette modalité ("demande moi ce que tu veux, tu vas voir que je sais tout !"). Par contre, avant d'avoir atteint cette conviction intérieure, il est extrêmement inconfortable de se sentir ballotté de manière imprévisible entre difficulté et facilité, sans pouvoir déchiffrer ni piste, ni but. Les appuis (sur le familier, sur la régularité) sont utiles pour ne pas perdre pied, pour relancer l'espérance, pour ne pas baisser les bras dans les moments délicats. Lorsqu'un élève peut les repérer, il peut se caler avec confiance sur le dispositif. Il sent que des balises vont bientôt lui apparaître, qu'il pourra s'y accrocher et ainsi se préparer à résister devant le prochain grain à venir.

¹¹ Dans la page du manuel, il s'agit effectivement d'une vraie nouveauté ; par contre les rationnels non entiers ont déjà été rencontrés en amont, dans d'autres exercices.

III.7 Fabriquer ses assortiments à l'aide des ressources disponibles

Parler "des mathématiques en général" éclaire certains aspects de notre discipline. Les ouvrages destinés aux amateurs de mathématiques, invitent souvent le lecteur à sauter d'exemples en exemples, empruntés des performances des élèves de maternelle ou de l'université, des chevaux, des oiseaux ou des bébés, des patients cérébro-lésés ou des Indiens d'Amazonie ... Ces illustrations insolites, hétéroclites, sont de nature à montrer l'universalité de certains phénomènes ; elles ouvrent à de nouvelles idées. Elles n'apportent pas toutefois (ce n'est d'ailleurs pas leur finalité, la plupart du temps) d'argument pour concevoir une progression, une différenciation, une régulation.

A l'autre bout de la lorgnette professionnelle (les prises locales de décisions), il est envisageable de concocter ses questions comme on agrémenterait un plat culinaire, en dosant les épices avec une expertise gourmande pour équilibrer les saveurs (pas trop à la fois, assembler celles qui sont compatibles, instaurer des hiérarchies entre elles).

L'accompagnement de l'étude s'exprime discrètement, en tentant de réduire le sentiment de contrainte arbitraire, en faisant place à l'initiative et à la prise de responsabilité sur un domaine maintenu à portée de main. Entre directive et abandon, il existe heureusement bien des alternatives pour les professionnels. Nous rappelons les principaux leviers didactiques qu'un enseignant peut manier pour adapter ses assortiments (à son projet, aux conditions de l'étude, etc.) :

- la taille de l'assortiment (le nombre de questions) et celle du répertoire de savoirs qui lui est associé (contrôle de l'effet de dilution des questions) ;
- l'ordre des questions et le rythme de résolution (des pauses pour reprendre son souffle, des paliers pour travailler la robustesse, des pics pour accroître la performance, une régularité pour anticiper les efforts à fournir, quelques ruptures pour maintenir l'attention) ;
- une redondance ciblée sur ce qui est fondamental.

IV Des aménagements plus fins pour d'autres types de devoirs du soir

Les nouveaux programmes de 6^{ème} sont entrés en application à la rentrée 2005. C'est durant le cycle d'adaptation que les jeunes collégiens sont initiés aux "méthodes de travail propres à l'enseignement secondaire" et que leurs enseignants apportent un soin particulier à l'accompagnement du travail personnel¹². Le paragraphe qui en précise l'organisation en mathématiques s'est enrichi¹³. La nouvelle "introduction générale pour le collège" allonge maintenant à six la liste des formes possibles d'activité (sans toutefois clairement distinguer ce qui se déroule en dehors de la présence du professeur) :

Désormais le travail personnel des élèves *en étude ou à la maison*, "nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et les réinvestir dans des exemples simples *mais aussi pour élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt*

¹² Article 3, décret du 29 mai 1996.

¹³ Il s'agit des paragraphes II.G du programme du cycle d'adaptation : classe de 6ème (BO du 20 juin 1996) et 3.7 (BO du 9 septembre 2004).

pour l'activité mathématique" peut prendre les diverses formes suivantes : "résolution d'exercices d'entraînement, combinés avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ; travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ; résolution de *problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques ...)* pour mettre en œuvre des démarches heuristiques en temps non limité ; construction d'objets géométriques divers (*frises, pavages, solides ...*) en utilisant ou non l'informatique ; lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances ; constitution de dossiers sur un thème donné".

La liste précédente (en 1996) déclinait pour le travail personnel des élèves *en classe, en étude ou à la maison* trois fonctions diversifiées : "la résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et de les mettre en œuvre *sur des exemples simples* ; les travaux individuels de rédaction sont nécessaires au développement des capacités d'expression écrite et de la maîtrise de la langue ; les *devoirs de contrôle, courts et peu nombreux*, permettent de vérifier les acquis des élèves"¹⁴.

En tenant compte des résultats de nos recherches, risquons une interprétation raisonnée des ces textes en vue d'éviter de renforcer les phénomènes les plus néfastes.

IV.1 Chercher une solution originale

De nombreux manuels commencent leurs chapitres par des "activités de découverte" (parfois adaptées ou s'inspirant de situations utilisées pour la Recherche expérimentale) qui sont rarement accompagnées des conditions permettant d'atteindre les objectifs annoncés sur les contenus d'enseignement. Les faire résoudre (ou même seulement 'chercher') loin des régulations expertes d'un professeur de mathématiques paraît peu opportun et peu productif (même si beaucoup de temps semble ainsi gagné).

L'expression 'énigme' dénote une question insolite, dont la résolution fait appel à une démarche personnelle astucieuse, originale, qui n'est pas convertie par le professeur (ni avant, ni après la résolution) en 'méthode' identifiée et réutilisable ailleurs et par tous. Les mathématiques ont toujours fait place à cette dimension récréative qui sollicite des connaissances et un raisonnement intellectuellement stimulant. Il n'est donc pas absurde de la faire rencontrer aux collégiens. Mais si l'enseignement obligatoire souhaite faciliter pour tous les élèves l'entrée dans la culture mathématique, il ne peut se passer de l'arbitrage de l'enseignant (cette culture n'est actuellement pas uniformément répartie dans notre société). Porter publiquement le projet de résoudre l'énigme, organiser collectivement la *dévolution*¹⁵ du problème par une première exploration, conduire une discussion qui permet à chaque élève de s'assurer au moins d'une piste à explorer, semblent les conditions indispensables à aménager pour que le "temps non limité" de résolution hors de la classe (il le sera bien toujours, il serait plus réaliste d'indiquer une durée maximale ou un indice d'arrêt) devienne un bénéfice. Cette forme d'activité (les élèves suivent chez eux une des pistes désignées et reviennent mettre en commun le fruit de leurs réflexions avant de conclure en classe) requière un contrat didactique hors du commun (rarement partagé par les accompagnateurs

¹⁴ C'est nous qui soulignons.

¹⁵ Pour le concept de dévolution, se reporter à Brousseau (1998).

d'aujourd'hui) et il serait imprudent de lui confier les contenus des programmes. Plus que jamais, l'enjeu d'une telle activité annexe devrait se déplacer vers une exploration soutenue, et non sur la validité des réponses ou sur l'élaboration du premier pas. Il semble également mal venu d'associer l'environnement familial à cette pratique en l'absence de dispositif permettant de la réguler in situ (cela ne tendrait qu'à renforcer l'incertitude des uns et des autres, accroître la gêne mutuelle, et provoquer d'éventuelles comparaisons dépréciatives).

IV.2 Pratiquer les mathématiques dans sa famille

Pourtant, il est envisageable d'organiser des activités mathématiques à pratiquer en famille, même si à première vue il paraît difficile à la fois :

- d'atténuer les effets d'une intervention parentale intempestive ;
- de tenir compte du fait qu'un élève n'apprend pas comme ses parents ont appris ;
- de ne pas saboter le projet de préparer les élèves à une étude personnelle autonome.

Un projet de cette nature ne relève en rien de l'improvisation (fut-elle généreuse). Au vu de nos travaux, certaines conditions nous paraissent essentielles à maintenir lorsque l'étude est accompagnée par un non spécialiste :

- ne pas confier la responsabilité de la validité de la réponse à l'accompagnateur ;
- lui fournir un moyen de relancer l'activité de l'élève (pour éviter que le silence et l'inaction s'installent), sans pour autant dévoiler précocement la solution ;
- prévoir un générateur de questions relativement fermées qui canalisent les interactions ;
- indiquer un signal d'arrêt ou fixer la durée du travail dans une limite raisonnable.

Dans une situation ainsi conçue, le rôle confié à la famille est celui d'un entraîneur-supporter, qui vérifie que l'élève fait ce qu'il a à faire, sans prendre sa place, sans faire à sa place (et sans corriger sa résolution), mais qui l'encourage à ne pas renoncer trop vite et à ne pas se contenter de la première réussite.

Mettre en place une telle coopération ne se justifierait pas pour tous les savoirs enseignés à un même niveau. Par contre, pour les savoirs 'élémentaires'¹⁶ que notre patrimoine scolaire a depuis longtemps distingués, il est avantageux de s'exercer intensément et de bien identifier que la seule récitation du 'texte' des théorèmes (même valide et connue sur le bout du doigt) est insuffisante pour un usage éclairé. Reprenons le cas de la Table de multiplication.

¹⁶ "Le mot grec 'stoicheïon' (élément) renvoie d'abord à l'idée de 'rang', de 'file', de mise en ordre par alignement. L'écriture alphabétique a marqué les philosophes grecs : des composants en nombre limité [...] suffisent à constituer l'ensemble des syllabes, des mots, des discours [... Ils] ont projeté sur les êtres naturels et les productions humaines ce mode de composition d'un Tout à partir de constituants élémentaires." Vitrac (2004).

L'accompagnateur fait fonctionner le dispositif fourni par le professeur

Un jeu de cartes recto-verso peut servir de dispositif autocorrectif (questions d'un côté, solutions au dos des cartes) qui engendre des questions fermées selon un certain ordre (fixé ou aléatoire).

En écrivant indépendamment sur chaque carte un produit (3 x 5 d'un côté ; 15 de l'autre), on libère l'apprentissage du carcan additif qui compose une table de multiplication (un étayage additif local peut rendre service, mais une organisation systématique selon l'ordre des facteurs sert d'autres objectifs que l'apprentissage : vérifier l'exhaustivité, faciliter la consultation).

Lorsque l'enseignant réduit la taille du paquet de cartes à 36 formules élémentaires, il soulage le travail de stockage en mémoire (un 'plus' qui est apporté par l'expert, par rapport aux habitudes culturelles) ; lorsqu'il introduit d'autres cartes (comme 3 x 10 ou 1 x 5), il peut accroître la visibilité du domaine de maîtrise des élèves ou ponctuer le questionnement par des questions reposantes ou gratifiantes (pour celui qui a compris une signification de l'opération). Il peut aussi plonger l'intégralité du répertoire visé dans un champ plus vaste balayé par un jeu de type "jeu de société" (loto, bataille, jeu de l'oie, etc.). Contrôler les fréquences de rencontre avec les formules constitue une amélioration didactique (la table complète n'a pas besoin d'être systématiquement rencontrée, mais certaines formules récalcitrantes gagnent à l'être souvent).

Les "règles du jeu"/(ou le scénario de la situation) doivent rester facilement communicables. Par exemple pour l'entraînement, l'enseignant peut expliciter comment extraire soi-même un sous répertoire (pas trop de cibles nouvelles à la fois, quelques cartes faciles, un paquet de taille raisonnable), comment se rôder par un questionnement impromptu (en battant bien les cartes avant chaque utilisation) ...

Des regroupements judicieux des cibles de l'entraînement peuvent être suggérés (ou imposés, ou laissés à la libre appréciation de l'élève) par le professeur. Ainsi, la classique partition en plusieurs tables peut être remplacée par d'autres sous-répertoires qui éventuellement se recouvrent partiellement (renforçant encore les redondances). Certains rapprochements de formules permettront de les étayer entre elles par un calcul mental rapide, afin de soulager la charge mnésique ("8 fois 3, c'est le double de 4 fois 3"). De petits assortiments (une liste sélective de cartes soigneusement déterminée par l'enseignant) importeront donc au domicile des élèves des conditions didactiques plus adéquates au projet collectif du moment.

Le même dispositif ménage également des places pour d'autres partenaires (décider d'un temps de réponse ou d'un ordre de questionnement en manipulant les cartes ; jouer au concurrent en répondant alternativement, etc.). L'accompagnateur qui participe de la sorte peut rester neutre au moment de la validation (c'est la carte qui porte la bonne réponse) ; il est aussi déchargé de la relance de l'activité (c'est le paquet de carte qui questionne).

La possibilité de répartir les cartes en trois tas (au lieu d'une modalité binaire de type je sais/je ne sais pas) fournit un moyen plus fin pour l'élève et son entourage d'apprécier ce qui reste à faire, tout en identifiant où on en est : par exemple en distinguant sûr/encore peu fiable/non correct ou encore, direct/ retrouvé/pas su). Les

trois paquets de cartes sont des métaphores de l'étude régulière (et non d'une évaluation finale) ; tout comme l'exécution des gammes se différencie d'un concert. L'accompagnateur est témoin des efforts entrepris, il assiste à l'élaboration de la fiabilité, de la rapidité, il contrôle la bonne volonté et la durée du travail (le paquet de cartes limite la taille du questionnement).

Le parent spectateur des prouesses de son enfant

Tout scientifique lutte contre la pensée magique. Mais il est un artiste qui joue rationnellement avec le merveilleux sans se laisser lui-même leurrer : le prestidigitateur. La référence sportive n'est pas la seule à promouvoir l'entraînement régulier et intensif, qui concerne tout autant le professionnel chevronné que le débutant.

Toujours dans l'idée de rendre plus robuste l'usage des produits élémentaires au collège, voici une adaptation d'un exercice d'entraînement de CM2, adaptation qui s'inspire de l'illusionnisme.

Dans la collection ERMEL, les auteurs ménagent une place importante à la fabrication des répertoires multiplicatifs, dès le CE1. On trouve donc, dans ces manuels, des exercices qui font fonctionner l'utilisation d'un résultat pour en obtenir d'autres grâce au calcul réfléchi. L'exercice que nous avons retenu ici présente une particularité, celle d'exploiter un phénomène numérique surprenant.

A partir du produit donné aux élèves : $3 \times 37 = 111$, six questions leur sont posées :

- 6 x 37
- 30 x 37
- 3 x 370
- 9 x 37
- 12 x 37
- 300 x 37.

Les réponses font appel à des calculs simples, alors que les produits paraissent à première vue difficiles (à cause des facteurs peu familiers, a priori moins 'sympathiques' que d'autres nombres). Le décalage avec ce qui est anticipé fonctionne donc comme un effet humoristique (le point de vue se modifie dès que l'astuce est identifiée). Alors qu'un calculateur prodige préserve jalousement ses trucs, il s'agit ici de les dévoiler aux élèves afin qu'ils puissent monter un mini-spectacle en dehors de la classe. Même si nous allons ici analyser l'assortiment proposé dans ERMEL, il serait préférable en sixième de le compléter en mobilisant aussi d'autres multiples de 3 (comme 7 fois 3 ; 9 fois 3), de manière à faire gagner de la familiarité avec le dernier noyau dur des tables (celui qui fait tendre la main vers la calculatrice à tout âge).

Le dispositif se compose d'un lot de cartes posant des questions d'apparence difficiles (la réponse peut être validée après coup à l'aide d'une calculatrice). Le scénario prévoit un "tour de passe-passe" en public. Un des spectateurs (la fratrie, les parents, les amis, etc.) tire une carte au hasard, pose la question à voix haute et l'élève répond publiquement de tête.

Cette situation ne confie pas de responsabilité excessive aux parents et il est probable que dans ce contexte l'élève ne lésine pas à s'entraîner préalablement (il ne montera sur scène que lorsqu'il se sentira prêt). Le temps de la représentation sera peut-

être même allongé par les questions des spectateurs : "comment tu fais ? Je vais le refaire encore une fois !" ou "Je vais t'expliquer pourquoi ça marche". Ici le rôle de la famille est du côté de l'émulation et du partage du plaisir de la maîtrise.

Analysons rapidement les propriétés de cet assortiment. La redondance s'exprime 3 fois sur la "règle des zéros".

L'ordre des questions ne semblent pas avoir été choisi au hasard :

* dans Q1 on reconnaît le double de 3 (très familier)

* pour Q2, on reconnaît $30 = 10 \text{ fois } 3$ (une formule qui n'a pas besoin d'appartenir au répertoire direct mais qui peut être reconstruite rapidement), le plus dur est de dire oralement la réponse : "mille cent dix" ;

* tiens ! pour Q3 c'est le second facteur qui doit être transformé, avec la même règle (la réponse est curieusement la même malgré la différence des facteurs), il suffit de répéter "cent dix" ;

* dans Q4 on reconnaît la colonne vertébrale de l'assortiment, c'est à dire le type de questions qui le constitue : "qu'est ce qui fait 9 dans la table de 3 ? 3 fois" (c'est relativement familier, peut-être pas autant que 2×3 , et c'est une occasion de maintenir la formule disponible).

Avec l'identification des invariants, un certain confort apparaît pour la résolution, ainsi qu'une certaine 'complicité' didactique avec celui qui pose les questions. Le jeu auquel on joue change alors de nature : on joue maintenant avec son propre répertoire.

Pour mieux faire sentir l'effet induit par l'ordre des questions, comparons cet assortiment avec un exercice bâti sur le même fait numérique. Nous l'avons trouvé dans un ancien manuel de 1956¹⁷ :

"Peut être avez-vous remarqué que $37 \times 3 = 111$. Par conséquent, imaginez et vérifiez quel sera le produit de : 37×6 ; 37×9 , 37×12 , 37×15 , 37×18 , 37×21 , 37×24 , 37×27 ".

Une fois que le raisonnement est élaboré (décomposer le second facteur pour trouver le facteur 3) sur des produits très familiers (2×3 ; 3×3) ; il est reconduit pour chaque question, sans irrégularité. L'ordre formel des questions (rangées selon l'ordre des entiers naturels pour les formules à mobiliser) modifie les règles du jeu : lorsque l'élève a compris la structuration, lorsqu'il peut anticiper la question suivante, il n'a plus besoin de solliciter de formule directe pour répondre, il lui suffit d'ajouter 111 au résultat précédent (ou de suivre lui aussi la suite des entiers naturels (222, 333, 444 ...)). La connivence qui s'installe alors entre le concepteur et le réalisateur de l'exercice n'est plus ici didactique. Elle n'est plus au service d'un apprentissage, elle est détournée de l'utilisation des savoirs mathématiques visés, au profit d'une facilitation de la réponse.

¹⁷ Joly R. (1956), Cours moyen, n° 403 p 61.

IV.3 L'appropriation des connaissances

Partager les responsabilités didactiques

L'émancipation des élèves par rapport à l'autorité institutionnelle fait partie des paradoxes de l'enseignement¹⁸. Il arrive qu'un enseignant déplore de la part d'un élève qu'il soit "trop scolaire". L'expression sonne curieusement aux oreilles des parents. Elle signifie que cet élève semble régler son activité seulement par rapport à ce qui lui est explicitement demandé, sans jamais aller au delà de sa propre initiative, sans approfondir ses connaissances pour lui-même (comme s'il visait uniquement à obtenir une bonne note, dans les conditions présentes).

Or l'autonomie de l'étude sous-entend que l'élève se projette dans une future utilisation de ses connaissances en toute indépendance, dans un univers totalement dénué d'intention didactique à son égard. Au début d'un processus, le professeur porte l'intégralité du projet d'enseignement, il en conçoit tous les détails pour faciliter l'accès à de nouveaux savoirs. Progressivement l'élève aura à se débrouiller seul pour les reconnaître et les utiliser dans d'autres contextes, souvent plus accidentées que ceux qu'il a rencontrés en classe.

D'autres types d'exercices

L'entrée dans l'algèbre marque un saut épistémologique important. Pour devenir capable de substituer, dans une formule littérale, chaque 'lettre' (chaque variable) par un type de nombre (a fortiori par un monôme), un rodage spécifique est souvent indispensable. Dès la 4^{ème}, l'identification des invariants pertinents (un produit de deux facteurs présentant certaines caractéristiques, avec association de simplifications) prépare le projet d'apprendre les identités remarquables (elles apparaîtront en 3^{ème} comme une conclusion motivée par cette reconnaissance de conditions).

Les assortiments adaptés à cette intention du professeur (mobiliser des connaissances et non des savoirs) présentent d'autres caractéristiques que les assortiments qui aménagent l'entraînement. Par exemple, la vigilance cognitive (ingrédient du raisonnement) sera mieux sollicitée par des présentations variées et imprévisibles des différents facteurs, comme :

$$\begin{aligned} &(x + 3) (5 - y) ; \\ &(2 - 3x) (5 - y) ; \\ &(2 - 3x) (5 - x) ; \\ &(5 - x) (5 + x) ; \\ &(x - 3) (5 - x) ; \\ &(x - 3) (3 - x) ; \\ &(x - 3) (3 + x). \end{aligned}$$

Il semble préférable aussi que l'ordre des termes dans chaque facteur ne privilégie pas une seule configuration sémiotique (une bonne forme). Par contre, une fois les formules sues, l'écriture des expressions à manipuler gagnera à se standardiser. Car

¹⁸ Brousseau (1998) et Sarrazy (1996).

devenue 'transparente' à la compréhension, une présentation canonique économise la communication. Tout comme dans l'expression d'un produit, l'ordre de l'écriture ou de l'énonciation deviennent non significatifs pour celui qui maîtrise l'opération ; alors qu'un recours à une procédure additive rend le rôle des facteurs dissymétriques : un multiplicateur et un multiplicande.

D'autre part, si l'on souhaite limiter la surenchère de difficulté au moment où l'attention se porte sur la nouveauté, il vaut mieux au début faire fonctionner la pensée sur un domaine numérique familier. Plus tard, la routine apparaîtra comme un gain cognitif en cas de généralisation du raisonnement primitif sur des domaines numériques beaucoup plus étendus et encore mal connus.

Il existe un décalage entre les compétences exigibles et celles qui sont effectives dans l'exercice quotidien des classes. Ce décalage est considéré comme normal par les professionnels de l'enseignement. Entre les attendus officiellement déclarés (dans la phase d'institutionnalisation) et la réalisation du projet (qui devient alors susceptible d'être évalué), l'enseignant compte un certain délai. Ce n'est qu'à terme, que l'élève prendra en charge le maintien en bon état de marche de ses répertoires ; il adaptera son travail aux singularités qui lui sont propres jusqu'à ce que les savoirs deviennent pour lui une évidence, des éléments qui s'imposent dans son univers personnel (il en viendra à oublier le temps où il n'en disposait pas). Cette ultime *responsabilité didactique*¹⁹ peut aussi être partagée entre professeur et élèves. Le premier usant de sa position institutionnelle pour imposer une réactivation sélective et régulière ; les autres découvrant ce qu'est l'autonomie didactique pour un répertoire donné.

V Conclusion

Ainsi il est envisageable d'apprendre progressivement au collège comment étudier en mathématiques. L'étude personnelle sera fréquemment sollicitée au lycée, au cours des études supérieures, lors de la formation professionnelle, et même durant toute la vie. Les enjeux du travail personnel à la maison dépassent donc largement la simple préparation de la prochaine évaluation et concernent toutes les couches sociales de la population.

Concernant la scolarité obligatoire, il serait donc dommage de laisser au hasard (ou aux appétits de quelques adeptes de l'ésotérisme) l'aménagement des conditions de l'étude. "Quand on discute des questions touchant l'Ecole, il ne faut jamais oublier qu'elle baigne dans une société profondément inégalitaire. [...] Le mouvement premier est de chercher à résoudre les difficultés nouvelles en se tenant apparemment au plus près de chaque élève [...] mais c'est au mieux une impasse, au pire un remède qui aggravera le mal."²⁰ Et la sociologie de l'éducation²¹ insiste pour que nous nous n'oublions pas que le 'sens' à attribuer à la scolarité ne peut se chercher uniquement dans l'utilitarisme ou la sociabilité (qui ne sont pas de taille à éviter le désinvestissement

¹⁹ Esmenjaud-Genestoux (2000).

²⁰ Johsua (1999).

²¹ Par exemple, Charlot, Bautier et Rochex (1992).

éducatif), mais que "le problème qui nous est posé doit d'abord trouver sa solution au plus près des enseignements, au cœur des actes éducatifs les plus traditionnels"²².

A fortiori concernant les devoirs du soir : insister prioritairement sur leurs aspects socio-économiques n'encourage pas à porter l'attention sur son aménagement à partir de ses fonctions principales. Or le travail prescrit hors des murs de la classe soulève aussi des questions didactiques. Aussi, n'ouvrons pas encore plus grand la porte aux hétérogénéités sociales sous prétexte d'une "aide aux difficultés individuelles". Les enseignants ne sont pas dupes de l'écart qui peut exister entre les discours et les actions possibles ; cet écart est considérable pour l'aide périscolaire.

C'est pourquoi, une organisation raisonnée du travail à la maison confie les principales responsabilités didactiques au professeur, même si d'autres accompagnateurs (domestiques ou professionnels, institutionnels ou 'privés') participent à la réalisation de ces devoirs (en contrôlant la durée nécessaire, les occasions de pratiquer les mathématiques, la fiabilité des réponses). Le partage de ce qui peut être donné à la maison et ce qui doit être fait en classe ne tient pas aux objets eux-mêmes, ni à une seule décision organisationnelle (ou pire, à une contrainte temporelle), mais à des caractéristiques qui renvoient aux objectifs attribués à la tâche, aux conditions de la résolution, aux connaissances effectivement mobilisables par les partenaires. C'est par l'analyse des savoirs et des connaissances mathématiques que se maintient la qualité des médiateurs didactiques qui transitent entre la classe et le domicile des élèves, en attendant que l'étudiant aguerri puisse disposer de tests d'arrêt (et s'auto-évaluer), identifier les bonnes questions à travailler (puiser dans les ressources disponibles ses propres assortiments adéquats), doser lui-même la bienveillance et l'exigence nécessaires à ses progrès.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1989), Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x*, n° 21.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations didactiques*, La Pensée Sauvage.

CHARLOT B., BAUTIER E., ROCHEX J.P. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues ... et ailleurs*, Armand Colin.

COMIN E. (2000), *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*, thèse, Université Bordeaux 1, DAEST.

COUDEL C., PICARD N., SCHUBRING G. (1988), *Condorcet – Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, Deledic.

DAHAN-DALMEDICO A. et PFEIFFER J. (1986), *Une histoire des mathématiques Routes et dédales*, Seuil.

²² Johsua (1999).

ESMENJAUD-GENESTOUX F. (1995), *Quelle institution d'appui aux élèves en difficulté en mathématiques ? Etude des conditions spécifiques*, mémoire de DEA, Université Bordeaux 1, LADIST.

ESMENJAUD-GENESTOUX F. (1996), *Combien en reste-t-il ? Il suffit d'enlever !*, *Journal des Instituteurs* n° 3, Dossier "Nul en maths ?", Nathan.

ESMENJAUD-GENESTOUX F. (1997), *Pour la réussite de tous en Mathématiques : des Coups de Pouce ?*, in *Mathématiques de base pour tous ? Tous les enfants peuvent-ils connaître la réussite en Mathématiques, en début de scolarité ?*, APFEE (Association pour favoriser une école efficace), ALEAS.

ESMENJAUD-GENESTOUX F. (2000), *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*, thèse, Université Bordeaux 1, DAEST.

ESMENJAUD-GENESTOUX F. (2001), *Médiation entre la classe et le travail à la maison : le rôle des assortiments*, in *Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques*, équipe DIDIREM, Université Paris 7.

ESMENJAUD-GENESTOUX F. (2004), *7 fois 8 ? $(a + b)^2$? La mémorisation des réponses relève-t-elle de la responsabilité des professeurs ?*, *Le bulletin vert*, n° 454, APMEP.

FELIX C. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire*, thèse, Université d'Aix-Marseille.

JOHSUA S. (1999), *L'école entre crise et refondation*, La Dispute.

La règle dans tous ses états (2005), APMEP et université Montpellier 2.

LAUTREY J. (1980), *Classe sociale, milieu familial, intelligence*, PUF.

SARRAZY B. (1995), *Le contrat didactique*, *Revue Française de Pédagogie*, n° 112.

SARRAZY B. (1996), *La sensibilité au contrat didactique – Rôle des Arrières-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*, thèse, Université Bordeaux 2, DAEST.

TERRAIL J-P. (1997), *La scolarisation de la France*, La Dispute.

VITRAC B. (2004), *Euclide le fondateur*, *Les Génies de la Sciences*, revue n° 21, novembre 2004-février 2005 (p 55).

WATSLAWICK P. (1972), *Une logique de la communication*, Seuil.