ENGAGER LES ELEVES DANS UNE REELLE ACTIVITE MATHEMATIQUE

Un exemple : le cercle circonscrit en cinquième

Annie BERTE
Joëlle CHAGNEAU
Catherine DESNAVRES
Jean LAFOURCADE
Marie-Christine MAURATILLE
Claire SAGEAUX
Groupe « Didactique des mathématiques » - IREM d'Aquitaine

Résumé : L'objectif de cet article est de montrer comment nous avons construit une séquence de plusieurs leçons dans lesquelles les élèves ont une réelle activité mathématique en classe. Pour cela nous avons choisi un objet d'enseignement : le cercle circonscrit en cinquième. Dans une première partie, nous analysons une "activité" de manuel, qui tire cette appellation de la nature "concrète" du problème posé. Cela ne permet pas d'engager les élèves dans une véritable activité mathématique. Dans une deuxième partie, nous menons une double analyse mathématique et didactique du problème, afin de définir les conditions pour qu'il devienne un enjeu pour la classe. Dans une troisième partie, nous détaillons le déroulement de ces situations en classe afin de définir les conditions qui peuvent permettre aux professeurs d'utiliser ce travail avec leurs élèves.

Mots-clés : géométrie au collège, cercle circonscrit, situations mathématiques en classe, gestion de la classe.

Le but de notre groupe est de concevoir des situations pour enseigner au mieux dans nos classes, dans le cadre des programmes en vigueur. Les situations que nous décrivons ont été testées de nombreuses fois dans différentes classes.

Cet article suit un exposé que nous avons présenté au séminaire de la Commission Inter-IREM de Didactique en juin 2005. Nous devions y débattre de la façon de donner du sens pour les élèves à l'apprentissage des mathématiques, une des pistes suggérées étant d'introduire les notions mathématiques « comme outils pour résoudre des problèmes qui se posent aux hommes »[1].

Les programmes de collège de 2005 reprennent les mêmes termes que ceux de 1995 pour définir « l'activité mathématique véritable » à laquelle devrait se livrer l'élève : «...A travers la résolution de problèmes... les élèves peuvent prendre conscience de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème,

[1] Les nouveaux programmes de collège (2005) font référence de façon explicite à " l'outil mathématique " pour résoudre des problèmes courants ou posés par d'autres disciplines.

conjecturer un résultat...., bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence..., communiquer une recherche, mettre en forme une solution. »

En outre, ces programmes de 1995 et de 2005 contiennent le mot « activités » au pluriel, dans le sens des « activités » choisies par le professeur c'est à dire des problèmes proposés aux élèves. De ce fait les manuels contiennent des propositions d'« activités » qui sont en fait des propositions pour introduire une notion nouvelle, parfois titrées « découverte ». Presque toujours c'est le recours à un problème « concret » ou bien à une activité manuelle (découpage, coloriage) qui permet de qualifier ces propositions d'« activités » en opposition aux exercices classiques d'application.

Notre objectif ici est de montrer que ce n'est pas tant la nature concrète du problème posé que la façon de le mettre en œuvre, qui permet sa dévolution aux élèves et l'existence d'une réelle activité mathématique dans la classe. Pour cela, nous prenons l'exemple d'une séquence sur le cercle circonscrit à un triangle en cinquième. Nous voulons également attirer l'attention sur quelques difficultés dans la transmission à nos collègues de ce qu'est une situation d'enseignement.

L'exposé de ce travail comporte quatre parties :

1. Analyse d'une situation proposée par un manuel.

Nous montrons que les élèves font très peu de mathématiques pour répondre aux questions du manuel à propos d'un problème qui se veut «concret ».

2. Analyse mathématique du problème et choix didactiques qui en résultent.

Cette analyse et des observations d'élèves permettent de choisir la conjecture vers laquelle le professeur va conduire les élèves et de structurer la séquence par rapport aux étapes qu'ils devront franchir dans leur raisonnement.

La formulation du résultat est importante pour qu'il devienne utilisable par les élèves quand il s'agira de trancher mathématiquement un débat dans les leçons suivantes.

3. Analyse didactique pour le déroulement de la séquence

D'autres observations de classe permettent de fixer l'enchaînement des situations dans le temps, de choisir les variables et de préciser l'utilisation des supports (papier et tableau).

4. Déroulement en classe.

I. Le problème « concret » du manuel

Le problème « concret » : Est-il possible de placer une pompe à égale distance des trois chalets ? [2]

La question mathématique : Existe-t-il un point P, situé à égale distance des trois points A,B,C représentant les chalets ?

[2] Voir extrait du manuel en annexe.

I.1. La référence à la « réalité » crée un obstacle supplémentaire pour les élèves

Avant de résoudre le problème « concret », il faut modéliser la situation, passer du problème concret à la question mathématique, et alors de nombreuses questions se posent :

–Est-il bien naturel d'assimiler un chalet à un point et dans ce cas, à quel endroit va-t-on choisir de mettre le point ? (voir les hésitations du manuel lui-même)

–Comment va-t-on mesurer les distances alors que la représentation donnée sur le manuel est en perspective ?

–Les angles droits ne sont pas conservés, comment peut-on tracer les médiatrices ?

D'autre part, la façon de résoudre ce problème concret dans la réalité n'aurait sans doute pas grand chose à voir avec la façon de résoudre la question mathématique, car dans la réalité, il y a des contraintes dont le modèle mathématique ne tient pas compte :

- On mettrait probablement la pompe près du chemin afin qu'elle soit facilement accessible.
- Il faudrait tenir compte de la place des arbres, de la nature du sol pour creuser les canalisations amenant l'eau.
- Peut-être serait-on confronté à de problèmes de propriété du terrain.

Toutes ces questions n'ont strictement rien à voir avec le problème mathématique et pourtant certains élèves se les posent plus ou moins implicitement de sorte qu'ils ne peuvent pas entrer dans l'activité mathématique qu'on leur propose.

I.2. Comment le manuel prend-il en compte la difficulté de la modélisation?

Il évite tout simplement les questions en donnant la modélisation aux élèves dans l'énoncé. Mais alors il est à la charge des élèves de la comprendre avant de pouvoir entrer dans l'activité mathématique et c'est une difficulté supplémentaire, d'autant plus qu'on leur demande de décalquer un triangle dessiné en perspective et de le traiter comme s'il était, à l'échelle, une représentation plane du sol.

De plus :

–Le problème concret ne sera pas résolu, puisqu'on parle uniquement du point P, dans la solution et plus du tout de la pompe.

–L'existence du point est seulement évoquée et immédiatement résolue sans plus d'interrogations : « Désignons par P l'emplacement de cette pompe… »

–Quant à l'unicité du point, on n'en parle pas explicitement, cependant elle est admise implicitement par le simple usage de l'article « l' »... Subtile distinction de langage à laquelle nous savons bien que nos élèves ne sont pas sensibles.

1.3. Tâches proposées aux élèves dans les différentes questions

Question a) :

Le mot « médiatrice » est donné, de peur peut être que les élèves n'y pensent pas.

Au contraire, nous faisons le pari dans notre proposition, que nos élèves peuvent, sans aide, avoir l'idée de faire intervenir une médiatrice (pari gagné dans nos classes depuis plusieurs années). Il suffit auparavant de réactiver cette notion par des situations liant cercle et médiatrice.

Question b) Recopie et complète :

Est-ce une activité mathématique ?

Question c) Le dessin :

Que fait l'élève dont les trois médiatrices ne se coupent pas en un même point ? Cette question n'est pas évoquée, la réponse semble sûrement évidente. Pourtant, si nous dessinons trois droites au hasard, il n'y a pas beaucoup de chances pour qu'elles se coupent en un seul point, en général elles forment plutôt un triangle !

La démonstration de cette propriété n'est pas un exercice très facile mais elle est recommandée dans les instructions officielles comme exemple de raisonnement mathématique en $5^{\text{ème}}$ (programmes de $5^{\text{ème}}$ commentaires).

Question d) : On répond à une question que l'on ne s'est pas posée !

Jusque là, la question était : « existe t'il un point situé à égale distance des trois points A, B, C ? ». On montre dans cette dernière partie qu'il existe un cercle passant par les trois points A, B, C ! L'existence de ce cercle n'a qu'un lointain rapport avec le problème concret posé jusque là !

De plus la réponse à cette question n'est pas très difficile à trouver, elle est écrite juste en dessous dans le cadre bleu.

Conclusion de cette première partie :

Dans une «activité » ainsi conçue, la référence à la réalité crée un obstacle supplémentaire, sans pour autant donner du sens ni au problème posé, ni au savoir que le professeur veut enseigner à travers ce problème.

Ce n'est qu'un exemple pris dans un manuel et, c'est vrai, nous n'avons pas choisi le meilleur. Mais parfois les leçons proposées dans les manuels ne sont pas si éloignées de ce que nous venons de décrire, et pas seulement pour le cercle circonscrit... Les manuels étant parfois les seuls documents consultés par les professeurs pour des raisons multiples (manque de temps, de formation...), il est probable que certains cours se déroulent plus ou moins ainsi dans des classes.

Il est assez facile de se convaincre que dans ce type de situations, les élèves n'ont que peu de chance d'avoir une activité mathématique quelconque. Il est vrai qu'alors il est légitime pour eux de se demander « A quoi ça sert les maths ? »

Si l'enseignant se trouve dans un collège situé dans la savane africaine, la question de trouver l'emplacement d'un puits à creuser à égale distance de trois villages provoquera immédiatement l'intérêt des élèves. Le problème de la modélisation est relativement plus simple : paysage et terrain assez uniforme et sans obstacles en se limitant à l'espace restreint entre trois petits villages. Le professeur pourra expliquer comment on passe du problème réel à un problème sur la feuille de papier. Mais ensuite la difficulté pour faire entrer les élèves dans l'activité mathématique de recherche du point représentant le puits reste entière. Si le professeur dit « tout » comme dans le manuel, les élèves n'auront pas fait de mathématiques. Peut-on espérer qu'ils en auront compris davantage puisqu'ils auront écouté attentivement, essayé de réfléchir et de répondre aux questions pendant quelques instants ?....

Choisir un problème proche de la « réalité » de nos élèves pour les initier à la modélisation n'est pas un effort vain, même si l'objectif essentiel pour nous reste de les faire entrer dans une activité mathématique pour tous les objets du programme. Mais pour réussir à éveiller leur intérêt il faut bien les connaître, savoir ce qui les concerne vraiment, et cela dépend parfois des conditions dans lesquelles ils vivent. A propos de la question du cercle circonscrit nous allons montrer qu'il est possible de les conduire à faire vraiment des mathématiques sans recourir à aucun problème « concret ».

II. Analyse mathématique du problème et choix didactiques qui en résultent

II.1. La façon de poser le problème

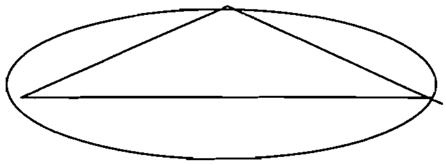
Il y a deux options pour poser le problème :

a. Demander de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et en déduire les propriétés du point d'intersection
b. Poser la question de la construction d'un cercle passant par les trois sommets d'un triangle et en déduire que son centre est nécessairement le point d'intersection des trois médiatrices.

Il va être difficile pour le professeur d'amener les élèves à prendre en charge le problème posé selon la première formulation. D'autant plus que, pour certains élèves, le fait que les trois médiatrices d'un triangle soient concourantes paraît évident. Peut-être ont-ils déjà vu cette propriété, sans la démontrer, pour les trois hauteurs ou médianes d'un triangle ou pour les trois axes de symétrie d'un triangle équilatéral, au CM ou en sixième ? Quand la question se présente, nous avons prévu de susciter le doute par la mise en place d'une situation spécifique.

La deuxième approche en revanche est plus intéressante car les élèves sont loin d'être persuadés d'emblée de l'existence du cercle circonscrit quelque soit le triangle, surtout s'il a un angle obtus car implicitement ils recherchent le centre du cercle à l'intérieur du triangle.

Dans une classe une élève a dit avec dessin à l'appui : " Non ! On ne peut pas toujours tracer un cercle. Par exemple si le triangle est ainsi, voyez la touche du cercle ! ! ! "



Implicitement l'élève imaginait le centre du cercle à l'intérieur du triangle, d'où le dessin. Cela amène un débat dans la classe qui motive les démonstrations mathématiques utiles pour convaincre.

Nous utilisons très souvent des problèmes de construction pour fabriquer nos situations et donner du sens à notre enseignement de géométrie. Ces problèmes amènent des débats entre les élèves si la situation est construite de façon qu'ils puissent se placer dans une problématique de modélisation[3] et si l'enseignant a organisé sa progression de sorte qu'ils aient les connaissances suffisantes pour débattre mathématiquement. Nous avons choisi ici de poser le problème de la construction d'un cercle passant par trois points qui peut se prolonger par le problème de construction d'un cercle passant par quatre points donnés et les conditions d'existence d'un tel cercle, dès la 3$^{\text{ème}}$, après la leçon sur l'angle inscrit.

Parfois le ressort de la situation consiste à demander une construction impossible à réaliser. Nous reviendrons plus loin sur ce type de situation dans la partie 4 traitant du déroulement en classe.

II.2. La formulation du résultat

Il s'agit d'apprendre en même temps :

- qu'il existe un cercle circonscrit à un triangle, et savoir le tracer,
- que trois points non alignés déterminent un cercle et un seul.

Ce second résultat devra être disponible quand les élèves discuteront des positions relatives de deux cercles. Dès la cinquième, dans une leçon ultérieure sur la détermination des triangles et l'inégalité triangulaire, nous demandons aux élèves d'essayer de construire des triangles connaissant la mesure des trois côtés. Le problème de la position relative de deux cercles se pose dans l'action[4], même si le résultat n'est pas institutionnalisé au collège.

Réfléchir sur les formulations utiles des résultats à apprendre fait partie de l'analyse mathématique.

---

[3] En référence aux trois problématiques pour enseigner la géométrie : problématique pratique, problématique de modélisation et problématique théorique. Ces termes ont été définis par Marie-Hélène Salin et René Berthelot dans leur thèse et nous avons expliqué comment nous nous en servons dans deux publications : le compte rendu du colloque de la commission inter Irem premier cycle de Montpellier et l'article sur le cosinus dans Petit x. (voir Bibliographie)

[4] Le lecteur peut se référer à " Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes " dans Petit X ou à " Géométrie au cycle central ", publication IREM (voir bibliographie)

II.3. La méthode de résolution du problème

La solution experte consiste comme dans tout problème théorique de construction géométrique à procéder par analyse et synthèse : supposer le problème résolu et examiner la figure obtenue. Il faut alors, de sa propre initiative, changer la question. Le cercle étant tracé, il faut se demander :

- où peut se situer son centre ?
- quelles propriétés doit vérifier ce point ?

La première interrogation doit amener la seconde car le but est de rattacher le point inconnu aux trois points donnés en cherchant des propriétés caractéristiques du centre pour déterminer des lignes qui le portent. Il faut supposer le problème résolu avant d'être convaincu que la solution existe. Cette démarche n'est pas du tout intégrée dans les pratiques des élèves de collège, elle se met en place petit à petit. C'est plutôt l'objectif de la seconde.

Dans la solution experte, on peut placer les points et tracer le cercle ensuite à main levée, ce que les élèves de $5^{\text{ème}}$ ne peuvent pas faire comme nous venons de l'expliquer, ou bien tracer le cercle d'abord et placer ensuite trois points dessus. Dans ce cas le triangle peut vraiment être quelconque. Mais il faut inverser la chronologie des actions par rapport à la question et comprendre que le fait de tracer le cercle avant ne nuit pas à la généralité du choix des trois points. Quelques élèves démarrent ainsi, mais ils n'ont pas un niveau suffisant en mathématiques pour mener à bien l'analyse du problème. Cela les conduit parfois à perdre le fil de la question posée (chercher un centre comme inconnu alors qu'il est connu puisqu'ils ont tracé le cercle avec le compas ! ! !). Certains prétendent avoir résolu le problème en pensant qu'ils peuvent cacher qu'ils ont « triché » mais quand le professeur leur pose des questions, ils essaient de voir comment se place le centre par rapport aux trois points, n'aboutissent pas, et se découragent.

Cependant leur tentative n'est pas inutile car ceci fait apparaître des triangles aux formes variées, y compris avec un angle obtus alors que certains élèves pensent que le cercle n'existe que pour certains cas particuliers (triangle équilatéral par exemple) pour lesquels ils savent placer le centre. Ces figures produites par leurs camarades permettent de relancer la recherche pour le cas général.

Du point de vue du travail mathématique de l'élève , il y a donc quatre temps :

- conjecturer l'existence d'un cercle,
- se convaincre par une démonstration de l'existence d'au moins un cercle,
- se convaincre par une démonstration de l'unicité de ce cercle,
- examiner comment se déplace le centre du cercle quand la mesure des angles du triangle varie ce qui permet d'examiner le cas particulier des points alignés s'il n'est pas apparu avant (cas limite de l'angle plat).

En outre un résultat s'énonce de façon indépendante du cercle : les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Nous le relions à l'unicité du cercle.

L'existence du centre résulte de la propriété directe : tout point de la médiatrice d'un côté est équidistant des deux sommets correspondants. L'unicité résulte du fait que deux droites sont au plus sécantes en un point et de la propriété réciproque de la précédente. Donc si le centre existe il ne peut se trouver ailleurs.

D'où notre choix de couper la démonstration en deux : une étape pour démontrer l'existence et une étape pour démontrer l'unicité. Cette analyse mathématique nous a permis de structurer la leçon dans ses grandes lignes de façon à l'articuler mathématiquement, ce qui est fondamental pour lui donner du sens pour les élèves. L'analyse didactique va nous permettre de compléter la préparation de la leçon.

III. Analyse didactique pour permettre le déroulement en classe

Cette analyse résulte de l'observation d'élèves de tous niveaux ($5^{\text{ème}}$ et même seconde) à qui nous avions posé ce problème sans autre situation préalable.

La formulation que nous avons choisie est la suivante :

Placer trois points. Existe-t-il un ou plusieurs cercles passant par ces trois points?

En effet, l'injonction: « construire un cercle passant par les trois sommets d'un triangle » induit pour les élèves l'existence du cercle ainsi que son unicité (article « un »). Pour cette raison nous posons le problème en termes de question sur l'existence d'un tel cercle. C'est la même question mathématique que celle d'une construction avec discussion sur le nombre de solutions selon les paramètres choisis, mais cette formulation est plus explicite. Elle peut conduire davantage d'élèves à démarrer en prenant des cas particuliers.

III.1. Les conjectures des élèves

La majorité des élèves disent très vite que l'existence du cercle dépend de la position des points. En particulier certains disent que c'est impossible si les points sont alignés. Souvent ils placent deux points sur une horizontale du cahier et le troisième point sur l'axe de symétrie de ce segment. Comme ils choisissent le centre cherché au milieu de ce segment horizontal, ils pensent que cela marche uniquement si le triangle formé par les trois points est rectangle isocèle.

D'autres élèves pensent que le cercle existe pour tous les triangles rectangles, la justification venant de la moitié du rectangle, figure connue avec ses diagonales depuis le CM et la $6^{\text{ème}}$. Nous avons décidé d'en rester à cette preuve intuitive afin de ne pas nuire à l'intérêt que doit susciter ensuite la leçon sur le cercle circonscrit au triangle rectangle, prévue en $4^{\text{ème}}$ par les programmes.

D'autres pensent que le cercle existe pour un triangle équilatéral, car ils ont en tête la figure prototypique du triangle équilatéral inscrit dans un cercle, partie d'une “ rosace ” réalisée à l'école élémentaire ou en $6^{\text{ème}}$.

D'autres disent que cela marche pour un triangle isocèle non particulier en plaçant le centre du cercle sur l'axe de symétrie du triangle. Mais quelle est la place exacte du centre du cercle sur cet axe? Si on en reste là, les élèves ne peuvent pas avoir l'idée - ou très difficilement - de faire intervenir la deuxième médiatrice qui n'est pas en position privilégiée. Ils essaient le milieu de la hauteur ou bien tracent une médiane par analogie avec le triangle équilatéral. Finalement, ils trouvent tout simplement le centre par tâtonnement, mais ne savent pas expliquer pourquoi il se trouve à cet endroit.

Tous les modèles plus ou moins implicites qu'ils avaient à leur disposition ont échoué et ils ne font plus de mathématiques : c'est ce que nous voulons éviter. Nous traduisons ce phénomène en disant que la situation a contraint les élèves à se placer à ce moment de leur activité, en problématique pratique[5]. Le professeur ne peut pas commencer la leçon ainsi, il manque quelque chose.

III.2. Réactiver la médiatrice

Une question se pose donc au professeur : comment donner aux élèves le moyen d'avoir l'idée de faire intervenir la médiatrice sans le leur dire explicitement ?

D'une part, pour faire les démonstrations, les élèves auront besoin de connaître les propriétés de la médiatrice vues en sixième. La propriété directe pour l'existence du cercle : un point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités. Et la propriété réciproque pour l'unicité : si le centre existe, il ne peut être ailleurs que sur les trois médiatrices. Il faut donc que cela soit très disponible. Ce sera l'objet de l'étape 0, situation 1 et 2.

D'autre part, il faut aussi un problème plus simple que celui que nous avons choisi, pour réactiver le lien entre médiatrice et cercle. C'est l'objet de l'étape 1 dans laquelle le professeur demande de chercher les centres des cercles passant par deux points seulement.

Ainsi avant la conjecture, plusieurs questions successives sont nécessaires pour permettre aux élèves de rentrer dans l'activité mathématique. Nous avons introduit deux étapes préalables (étape 0 puis étape 1) et la conjecture de l'existence d'un cercle constitue alors l'étape 2.

Notre proposition se décompose donc en six étapes qui peuvent se dérouler en trois séances d'une heure chacune. Notre problème central s'intègre dans un enchaînement de situations pour que les élèves puissent arriver à une conjecture complète de l'existence du centre et ensuite qu'ils arrivent à démontrer l'existence et l'unicité de ce point.

Expliciter l'analyse mathématique et l'analyse didactique aide à comprendre qu'il vaut mieux différencier les étapes en amenant des questions distinctes à chaque fois, en d'autres termes inventer trois « situations » pour les trois principales étapes de la recherche. Tout professeur fait cette analyse brièvement, mais s'il ne l'explicite pas en détail pour lui même, il aura peut-être tendance à donner tout à la fois aux élèves, comme dans le manuel.

---

[5] En référence aux trois problématiques pour enseigner la géométrie déjà nommées ci-dessus: problématique pratique, problématique de modélisation et problématique théorique. (voir Bibliographie)

Cette organisation est le fruit de l'expérimentation avec les élèves pendant plusieurs années et de nos échanges par la suite dans le cadre du groupe IREM.

Conjecturer l'existence d'au moins un cercle	→ → →	étape 0 étape 1 étape 2	1 heure
Se convaincre par une démonstration de l'existence d'au moins un cercle	→	étape 3	1 heure
Se convaincre par une démonstration de l'unicité de ce cercle et du fait que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes Examiner comment se déplace le centre du cercle quand la mesure des angles du triangle varie	→ →	étape 4 étape 5	1 heure

L'analyse mathématique et l'observation des élèves nous ont conduits à introduire des étapes non prévues dans les leçons courantes (étapes 1 et 3 notamment). Le temps passé (3H) n'est pas excessif. Les élèves font des mathématiques en classe au lieu d'en écouter, d'en copier, de bavarder, ou de penser à autre chose, et cela ne nous empêche pas de finir nos programmes.

III. 3. Variables dans la consigne du problème central

a) Poser la question en termes de points ou de triangle

Nous avons vu dans l'analyse mathématique l'importance de formuler le résultat en termes de détermination d'un cercle par trois points non alignés. Nous avons donc choisi de demander dès le départ s'il passe un cercle par 3 points donnés, ce qui a aussi l'avantage d'être en continuité avec la question posée à l'étape 1 (cercle passant par 2 points). Mais ne vaudrait-il pas mieux demander s'il passe un cercle par les trois sommets d'un triangle ?

En effet, on pourrait craindre qu'en parlant de points au lieu de triangles, les élèves ne pensent pas aux cas particuliers qui leur permettent de démarrer des conjectures et qu'ils en restent à ce que nous appelons une problématique pratique consistant ici à essayer de construire par tâtonnement un cercle en partant de trois points quelconques. Ils risquent alors de conclure que « ça marche » ou que « ça ne marche pas » sans avoir besoin de recourir à aucun modèle implicite, comme c'est le cas s'ils examinent des triangles rectangles ou isocèles.

En fait, même si le mot triangle n'apparaît pas dans la question, nos multiples observations prouvent que les élèves distinguent quand même les cas en termes de triangles et arrivent au cas du triangle isocèle, important car son axe de symétrie donne l'idée de faire intervenir la médiatrice.

b) Variable du nombre de points, paramètres de leurs places

Nous avons observé des élèves de seconde qui disaient « on s'est posé la question de trois points alignés, mais il faut aussi se poser la question des points confondus (deux points confondus ou les trois points confondus !) » avant de se rendre compte que le professeur leur avait déjà fait examiner le cas de deux points.

Il est surprenant de voir comment certains de ces élèves :

- se sont ainsi appropriés de façon indirecte la variable " nombre de points " fixée par l'enseignant en se posant le problème de la place des points. Nous n'avons pas encore fait assez d'observations au lycée avec trois points ou quatre points pour en dire davantage.

- ont bien intégré la notion de paramètre quand ils ont eu le loisir de résoudre la question en examinant d'abord des cas particuliers de leur propre initiative. Ici les trois points A,B et C sont des paramètres et le centre O du cercle est l'inconnue. On discute l'existence de la solution selon les valeurs des paramètres (la place des points). Nous sommes dans le cadre géométrique[6] mais nous pouvons utiliser le langage du cadre algébrique. L'un éclaire l'autre.

c) Utilisation des supports (tableau pour le maître, papier pour l'élève)

Un professeur a créé dans sa classe une situation très différente. Il a posé la question : « existe-t-il un cercle passant par trois points donnés ? » et, en même temps, croyant bien faire, il a placé lui-même trois points au tableau de façon à ce qu'ils soient les sommets d'un triangle ayant un angle obtus. Il craignait que, sans cette intervention, ce cas ne soit pas envisagé par les élèves.

Rien de ce qui est censé se produire après n'a eu lieu. En effet les élèves ont placé sur leur cahier trois points disposés à peu près comme le professeur l'avait fait au tableau obtenant ainsi un triangle avec un angle obtus. La recherche par les élèves de cas particuliers ne pouvait pas se produire. Les élèves, démunis devant un tel triangle, se plaçaient dans une problématique pratique et essayaient de trouver un centre par tâtonnement avec leur compas. Certains s'interdisaient de sortir de la figure et concluaient à l'impossibilité car le centre était à l'extérieur du triangle. D'autres trouvaient ou non par approximations successives et tout était fini. Certains concluaient que c'est possible, d'autres concluaient le contraire. Ils ne pouvaient pas faire des mathématiques pour trancher rationnellement le débat, le problème étant trop difficile pour eux.

Précisons qu'il est inutile, sinon mal venu, de donner une feuille blanche aux élèves pour placer librement les trois points. Il peuvent utiliser leurs feuilles de cahier ou de classeur ordinaire qui sont quadrillées. Cela les conduit à placer deux points sur une horizontale du cahier ce qui est plus favorable pour les amener à joindre les points et y voir la « base » d'un triangle.

Dans la conception d'une situation, certains choix de variables ont des conséquences très importantes sur son déroulement. Dans la communication de la situation aux enseignants, il est fondamental de les préciser et d'en expliciter les

---

[6] Le mot « cadre » est employé dans le sens donné par Régine Douady dans sa thèse d'Etat de didactique des mathématiques (1984) : Jeux de cadres et dialectique outil -objet dans l'enseignement des mathématiques.

raisons. Mais est-il possible d'anticiper toutes les dérives ? Par exemple nous avions dit au professeur qui a placé les points au tableau que les élèves allaient envisager des cas particuliers (ce qui sous-entendait qu'il ne devait pas leur donner une feuille préparée à l'avance avec les trois points déjà placés) mais nous n'avions pas précisé qu'il ne fallait pas non plus illustrer les mots « trois points » en les plaçant au tableau.

Très souvent des situations vont être totalement changées par des interventions visant à guider les élèves pour sécuriser le professeur qui doute parfois de leurs capacités à aller au bout d'une question. Or ils peuvent y arriver si les situations sont bien organisées et enchaînées.

III.4. Question à propos de cette étape 2

Néanmoins on peut s'interroger davantage sur les raisons qui on poussé l'enseignant à faire cette « erreur de scénario ». N'y a t-il pas une faiblesse de conception de notre situation ? Elle n'est pas « verrouillée », nous introduisons une part de contingence en ce sens que rien dans l'organisation ne permet au professeur d'être sûr que les élèves vont démarrer en envisageant des triangles particuliers et s'ils le font, iront-ils jusqu'au triangle quelconque avec un angle obtus ?

Nous affirmons cependant que cela va se produire pour trois raisons :

- nous faisons confiance aux élèves qui, comme des mathématiciens en situation de recherche, essaieront d'abord de trouver la solution du problème dans des cas particuliers. Nous l'avons observé dans toutes nos classes depuis plus d'une dizaine d'années.
- nous savons qu'ils vont se référer à des figures prototypiques (triangle équilatéral ou rectangle inscrit dans un cercle), ou bien au triangle rectangle isocèle parce que l'obstacle des directions privilégiées va amener un triangle avec un côté horizontal et le centre du cercle au milieu de ce côté. Le triangle isocèle à base horizontale ni rectangle ni équilatéral, pourra venir ensuite. Les directions privilégiées fonctionnent d'abord comme une connaissance utile dont le professeur ne doit pas se priver, avant d'être un obstacle pour trouver une médiatrice autre que l'axe de symétrie vertical. L'organisation de la leçon aide alors à le surmonter.
- le cas de l'angle obtus va se présenter de toutes façons lors de l'étape 3 s'il n'a pas déjà été discuté dans l'étape 2. Cette étape 2 est déjà longue car le triangle isocèle non équilatéral à « base » horizontale avec tous ses angles aigus provoque à lui seul beaucoup de discussions. Dans l'étape 3 nous demandons aux élèves de tracer deux segments [AB] et [AC] sans parler de triangle dans un premier temps. Un angle obtus en B ou en C va apparaître dans la figure tracée par plusieurs élèves.

IV. Déroulement dans les classes en six étapes

IV.1. Médiatrice d'un segment : Etape 0

Les deux situations qui suivent sont celles que nous utilisons déjà en $6^{ème}$. Nous les reprenons en $5^{ème}$ pour homogénéiser la classe et réactiver la notion en la rendant plus disponible et fonctionnelle pour tous.

a) Situation 1: Médiatrice formée de points équidistants de deux autres

Le professeur donne à chaque élève une feuille blanche sur laquelle sont placés deux points A et B de sorte que la droite (AB) ne soit parallèle à aucun des bords de la feuille.

Consigne : Placer dix points à égale distance de A et de B. Règle graduée et compas sont autorisés

Les élèves ont toujours beaucoup de difficultés à comprendre l'expression "à égale distance". Le mot plus technique "équidistant" n'arrange rien, au contraire! Ils trouvent d'abord le milieu de [AB]. Puis ils choisissent la distance AB et tracent les sommets des deux triangles équilatéraux. Ils ont du mal à aller plus loin. Ce qui les débloque un peu c'est de leur expliquer qu'ils ont le droit de faire varier la distance, qu'ils ne sont pas obligés une fois qu'ils se sont fixés une distance qui doit être effectivement la même pour A et B, de conserver cette distance pour chercher le point suivant. En fait ce qui provoque la difficulté c'est la notion sous-jacente de paramètre qu'ils peuvent fixer de façon arbitraire. Ils ont pris la distance AB qui était disponible et ne s'autorisent pas à choisir une autre distance qui restera constante un certain temps quand on trace les deux arcs de cercle mais qui peut prendre autant de valeurs qu'on veut. C'est pour cela que nous demandons 10 points car il faut que le nombre de points demandés soit supérieur à 3, pas trop grand pour rester raisonnable, mais cependant assez grand pour suggérer qu'il y en a beaucoup. Dès qu'ils ont réussi à dépasser 5 ou 6 points le mot " infinité " arrive dans la classe.

Il faut voir d'abord qu'il n'y a pas qu'un seul point qui convient : le milieu du segment. L'obstacle est accentué quand le professeur pose la question sous la forme : « Tracer un segment et trouver un point à égale distance des extrémités du segment. » parce que, dans ce cas, les élèves tracent le segment horizontal qui devient alors pour eux le seul endroit où ils s'autorisent à chercher des points. C'est pour cela que nous posons la question avec des points A et B isolés et placés sur papier blanc. En 6ème le professeur peut laisser les élèves placer les points eux-mêmes sur papier blanc. Ils les placeront peut-être de sorte que la droite (AB) soit en position privilégiée dans la feuille, mais cela peut les aider à résoudre la question. En 5ème le professeur impose la place des points A et B, ce qui oblige cette fois les élèves à travailler hors des directions privilégiées.

Les élèves tracent des cercles mais font seulement les petits arcs utiles, de sorte qu'ils sont assez surpris de l'alignement des points. Pour comprendre il faudrait tracer les cercles en entier. Le professeur ne le dit pas dans ce premier temps et laisse planer un doute sur l'alignement. Il passe immédiatement à la situation suivante.

b) Situation 2: Médiatrice comme droite perpendiculaire au segment et propriété réciproque

Placer encore dix points à égale distance de deux points A et B donnés mais cette fois on ne peut plus se servir de la règle graduée ni du compas. Aucun instrument n'est autorisé.

<u>Solution attendue</u> :

Par pliage, A vient sur B, on peut alors prendre tous les points qu'on veut sur le pli. Pour tout point M de ce pli, les segments [MA] et [MB] se superposent donc MA =MB

Le professeur revient à ce qui s'est passé avant. Comment se convaincre de l'alignement des points tracés avec le compas?

- Certains élèves ont l'idée de dire qu'ils ont fait plusieurs triangles isocèles avec leur compas et que, ces triangles isocèles ayant tous la même base, leurs sommets sont alignés sur l'axe de ces triangles.

- Le professeur fait tracer deux cercles en entier sans se limiter aux petits arcs utiles pour insister sur la conception du cercle utilisée implicitement : ligne de niveau et ensemble de points. Quand A vient sur B que se passe-t-il pour les cercles ? Le professeur fait colorier de la même couleur les arcs qui viennent l'un sur l'autre. Il fait plier aussi en suivant le segment [AB] pour constater la symétrie des points d'intersection. Deux cercles suffisent car si tous les cercles sont tracés en entier les élèves risquent, une fois qu'ils en ont tracé plusieurs de rayons différents, de ne plus savoir quelles sont les intersections utiles pour avoir les points équidistants.

Pour expliquer l'alignement, on utilise l'argument suivant : les points d'intersection des cercles sont sur le pli, c'est à dire sur l'axe de symétrie de la figure. On peut remarquer qu'il s'agit de la même explication que celle des triangles isocèles.

Le professeur demande aux élèves de formuler un bilan. Il les aide à reformuler leurs propositions jusqu'à aboutir à ceci qui est noté au tableau et sur les cahiers comme le résultat à retenir.

Bilan:

1- Il y a des points aussi loin qu'on veut des deux côtés. En les plaçant on a obtenu une droite. Une droite est un ensemble de points qui n'a pas d'extrémité.

2- En pliant de sorte que A vienne sur B on obtient le milieu du segment [AB] et un angle droit. On appelle médiatrice d'un segment la droite perpendiculaire au segment en son milieu

3- Tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment

4-Tout point à égale distance des extrémités d'un segment est sur la médiatrice de ce segment.

Dans le bilan il est très important de bien différencier les deux propriétés 3 et 4 car nous aurons besoin de chaque formulation séparément pour la démonstration. Ceci est facilité par le fait que nous avons utilisé deux situations séparées pour les introduire. Nous ne définissons pas la médiatrice comme l'ensemble des points équidistants des deux extrémités d'un segment : cette expression « ensemble de points » nous semble trop vague et non comprise par les élèves. Elle a l'inconvénient d'amalgamer les deux propriétés directes et réciproques en une seule phrase alors que justement nous voulons les séparer afin qu'elles soient disponibles pour les élèves quand ils veulent trouver des preuves.

IV.2. Cercles passant par deux points : Etape 1

Placer deux points. Combien passe-t-il de cercles par ces deux points?

Les élèves placent les deux points A et B comme ils veulent sur leur feuille blanche. En général ils choisissent les extrémités d'un segment horizontal

Les élèves pensent au cercle de diamètre [AB]. Parfois ils ajoutent aussi deux cercles de rayon [AB], l'un de centre A, l'autre de centre B, ce qui est une erreur (fig. 1).Cela est dû au fait qu'implicitement pour certains élèves le centre du cercle est un point du cercle puisque on dit : « centre *du* cercle » donc le centre appartient au cercle. Même s'ils ont déjà « compris » que c'est faux, régresser à cette conception les arrange ici car ils ne voient pas comment trouver des cercles autres que celui de diamètre [AB]. Or dans la classe ils entendent dire par d'autres élèves qu'il y a plusieurs cercles ou ils les voient en tracer plusieurs.

Certains trouvent également trois cercles, celui de diamètre [AB] et deux autres dont les centres se trouvent sur cercle de diamètre [AB], au milieu des demi-cercles (fig. 2) : en effet, pour certains élèves, un point ne peut avoir d'existence que s'il appartient à une ligne déjà tracée. Parmi eux, certains réitèrent le procédé en prenant à nouveau pour centre les milieux des deux grands arcs *AB* qu'ils viennent de tracer ce qui les amène à comprendre qu'il y a autant de cercles qu'ils veulent..

fig. 1

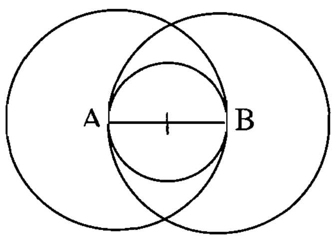
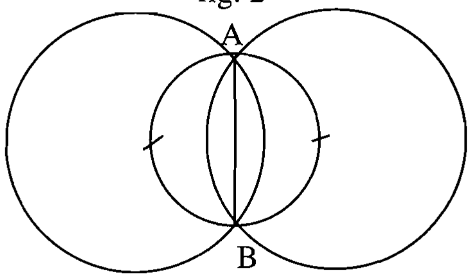


fig. 2



D'autres enfin arrivent à la même conclusion en plaçant simplement quelques centres par tâtonnement.

Dans tous les cas ils ne reconnaissent pas à priori la médiatrice dans cette situation. C'est quand ils remarquent l'alignement des centres qu'ils y pensent enfin.

Bilan : Il y a une infinité de cercles passant par deux points, leurs centres sont les points de la médiatrice.

<u>Variantes dans la consigne</u> :

1. Ne vaudrait-il pas mieux que le professeur place les points A et B au tableau ou sur une feuille distribuée aux élèves pour éviter le stéréotype du segment horizontal ? Nous pensons que cette situation est déjà assez difficile comme cela. Nous avons donc décidé de laisser aux élèves l'initiative de dessiner leurs deux points comme ils veulent.

2. Nous aurions pu demander comme dans l'étape 0 de trouver 5 ou 6 cercles passant par A et B. Nous avons choisi de ne pas préciser le nombre de cercles et de laisser les élèves libres d'en débattre comme dans la question suivante de l'étape 2.

IV.3. Conjecturer l'existence d'un cercle : Etape 2

Les élèves utilisent les feuilles quadrillées de leur cahier et le professeur demande :

Placer trois points. Combien existe-t-il de cercles passant par ces trois points ?

Nous avons vu les conjectures des élèves lors de l'analyse didactique. Ils envisagent des cas particuliers. Le cas des points alignés apparaît presque toujours. S'il n'apparaît pas, le professeur ne cherche pas à le provoquer, il viendra plus tard.

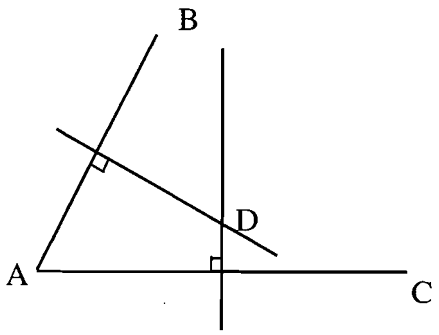
L'idée du rôle joué par les médiatrices dans ce problème s'introduit quand des élèves arrivent au cas particulier du triangle isocèle et qu'ils veulent situer exactement le centre du cercle sur l'axe de symétrie du triangle. Lors des observations que nous avions faites avant de prendre la décision d'introduire l'étape 1, nous avons constaté que peu d'élèves pensaient au triangle isocèle non particulier. Ils en restaient au triangle équilatéral et au triangle rectangle isocèle. Quand un élève traçait un triangle isocèle autre, il cherchait bien le centre sur l'axe de symétrie du triangle mais sans identifier cet axe comme médiatrice de la base. Maintenant le mot médiatrice est prononcé immédiatement. Les élèves disent : « c'est comme pour deux points, il faut chercher sur la médiatrice ». Au départ ils ne savent pas trop de quelle médiatrice il s'agit mais des triangles isocèles variés apparaissant avec une base horizontale leur axe de symétrie est nommé comme médiatrice et ils disent alors : « il faut une autre médiatrice pour le troisième point ».

Deux médiatrices étant suggérées par quelques élèves la conjecture est sous-jacente: il semble qu'il y a toujours un centre pour n'importe quel triangle, il suffit de tracer le point d'intersection de deux médiatrices. Ce n'est qu'une conjecture car l'idée est encore floue pour beaucoup d'élèves qui ont trouvé certaines choses mais ont du mal à formuler que le centre existe quand deux médiatrices se coupent et encore plus à en être convaincus.

IV.4. La démonstration de l'existence du cercle : Etape 3

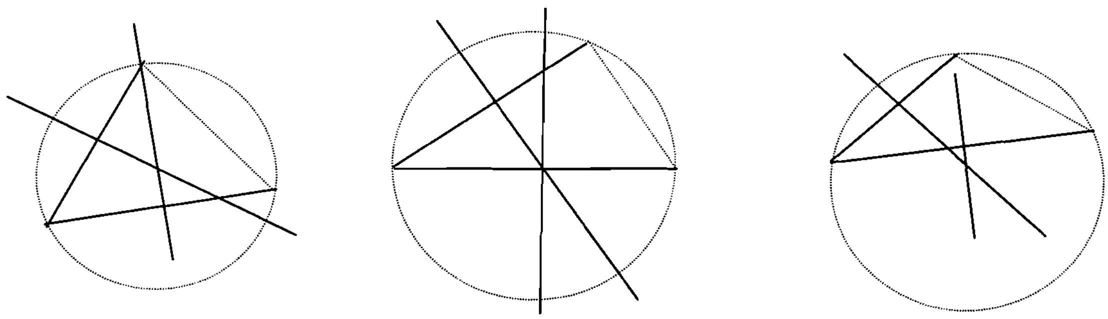
Nous allons amener les élèves à démontrer que si on trace deux médiatrices d'un triangle quelconque, leur point d'intersection est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle.

Placer deux points A et B sur papier blanc et un troisième, C au hasard. Tracer les segments [AB] et [AC] et leurs deux médiatrices. Appeler D leur point d'intersection. Faire des conjectures.



a) Si le cas des points alignés est envisagé par certains élèves, le professeur le traite à ce moment.

b) Tous les cas de figure apparaissent dans la classe ce qui permet de renforcer l'idée de l'existence du cercle pour tous les triangles.



c) Les conjectures énoncées par les élèves

Nous utilisons ici une gestion de la classe qui nous est habituelle quand il y a une démonstration dans le cours : les élèves émettent des conjectures par écrit. Le professeur les recueille au tableau puis les élèves les ordonnent en commençant par celles qu'ils pensent pouvoir prouver le plus facilement. Les élèves interviennent oralement en s'aidant mutuellement pour trouver les preuves et ensuite nous leur demandons parfois de rédiger au propre une partie de la démonstration.

Dans le cas présent, les élèves arrivent à la liste ordonnée des conjectures suivantes :

- DA = DB et DA = DC (1)
- Les longueurs DA, DB et DC sont égales (2)
- les triangles ABD et ACD sont isocèles en D (3)
- le cercle de centre D passe par A, B et C (4)

Les élèves eux mêmes, à l'oral, donnent les preuves de leurs conjectures en utilisant la propriété de la médiatrice : un point qui est sur la médiatrice est équidistant des extrémités du segment. L'existence du cercle est ainsi démontrée.

Pour prouver son unicité il reste aux élèves plusieurs étapes à franchir dans le raisonnement :

- déduire des égalités précédentes que DB = DC par transitivité de l'égalité
- en déduire que D appartient à la médiatrice de [BC] en utilisant la propriété réciproque de la médiatrice : le point D est à égale distance des deux points B et C donc D est un point de la médiatrice de [BC].
- en déduire que D appartient aux trois médiatrices qui se coupent en un seul point. D'où l'unicité du cercle passant par A, B, C dont le centre est D.

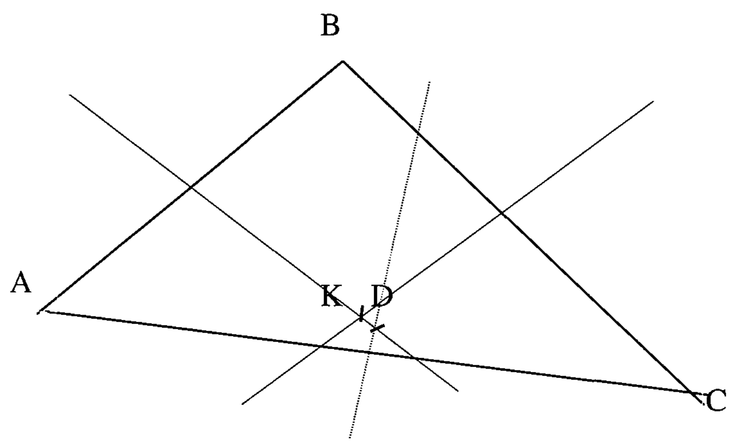
On constate que ces déductions et en particulier le démarrage utilisant la transitivité de l'égalité sont loin d'être des évidences pour les élèves. Nous n'avons jamais eu d'élève qui y a pensé.

Les élèves ont quand même prouvé qu'il existe un cercle passant par A, B, C mais *le problème de l'unicité se pose toujours.*

Bilan : Il existe un cercle passant par trois points non alignés. On admet que son centre peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

IV.5. Unicité du cercle : Etape 4

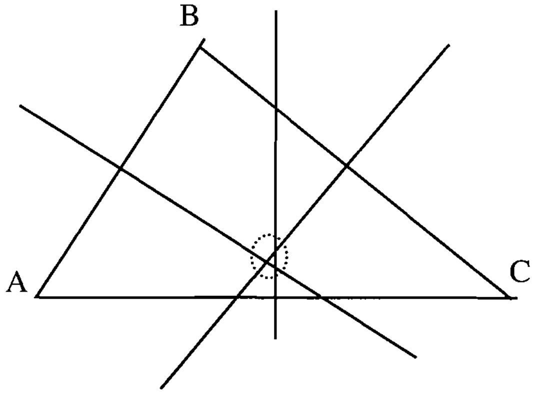
Situation 1 : On reprend la figure précédente et on trace la troisième médiatrice. Si on considère deux médiatrices différentes des précédentes : le point d'intersection est il le même ? y en a t-il plusieurs ?



Certains élèves pensent qu'il y a plusieurs points d'intersection, peut-être trois, d'autres pensent qu'il y en a un seul. Certains sont tellement persuadés qu'il n'y en a qu'un que s'ils obtiennent un petit triangle, ils le colorient en faisant un « gros point ».

Pour les inciter à démontrer, le professeur propose la situation suivante.

Situation 2 : Dessiner un triangle ABC. Dessiner les trois médiatrices des côtés. Parfois elles semblent former un petit triangle. Essayer de choisir le triangle ABC de départ de sorte que le petit triangle formé par les 3 médiatrices soit le plus grand possible.



Cette situation donnée par Guy Brousseau consiste à demander aux élèves un travail théoriquement impossible (agrandir le petit triangle). Cela permet de les engager à démontrer. Nous utilisons la même idée de la réalisation impossible en $6^{ème}$ quand nous demandons de tracer un quadrilatère ayant trois angles droits et trois seulement pour arriver aux théorèmes sur les parallèles et les perpendiculaires.

Bilan partiel: Le triangle des médiatrices ne s'agrandit pas si on agrandit le triangle de départ. Plus on fait un dessin soigné, plus le triangle formé par les médiatrices est petit. On va montrer qu'il ne s'agit pas d'un triangle mais d'un point.

Nous sommes souvent obligés de suggérer la transitivité de l'égalité pour terminer la démonstration, mais l'intérêt a été éveillé pour comprendre la preuve à défaut de la trouver.

Outre le résultat mathématique sur les médiatrices et le cercle circonscrit, les élèves peuvent retenir deux idées importantes :

- la transitivité de l'égalité est fondamentale pour faire des démonstrations en mathématique et même si on ne sait pas nommer cette propriété de l'égalité, il faut penser à l'utiliser.
- un point mathématique est représenté par une petite tache qui ne peut pas s'agrandir, même en agrandissant la figure. Différencier les objets géométriques de leur représentation est indispensable pour entrer dans les débuts de la géométrie.

IV.6. Place du centre selon la mesure des angles du triangle : Etape 5

Le professeur traite la question des points alignés au moment où des élèves y pensent. Ce peut être dans l'étape 2 pendant la conjecture. On peut la rencontrer dans l'étape 3 lors de la démonstration de l'existence ou y revenir si la question a déjà été soulevée. Enfin, si personne n'y a pensé jusque là, le professeur pose la question en dernier lieu.

L'usage d'un logiciel peut se révéler intéressant ici pour illustrer le déplacement du centre du cercle suivant la variation de l'angle du triangle, mais il ne faut pas commencer par cela. Sinon, les élèves voient le cercle circonscrit sur l'écran quelque soit le triangle, ils sont donc convaincus d'avance et du coup n'ont plus besoin de la démonstration.

On commence par un triangle ayant tous ses angles aigus. Le centre du cercle est à l'intérieur du triangle Puis on augmente un des angles du triangle par exemple situé vers le haut du dessin, on voit progressivement le centre du cercle qui sort du triangle vers le bas de l'écran. Quand l'angle devient plat le centre du cercle disparaît pour revenir de l'autre côté si on continue de faire varier le même angle qui se trouve maintenant situé vers le bas du dessin. Les élèves demandent si le centre est passé derrière l'ordinateur ! Le professeur peut leur dire qu'en mathématique ils rencontreront plusieurs fois ce phénomène. Dans le calcul de $1/x$ une toute petite variation de x autour de 0, par exemple de $-0,0001$ à $+0,0001$ fait passer brutalement le quotient d'une valeur « très négative » à une valeur « très positive ». Ils verront cela en $3^{ème}$ ou au plus tard en seconde dans le cadre graphique avec les deux branches de l'hyperbole de part et d'autre de l'asymptote. Les problèmes posés par l'infini passionnent les élèves, comme tous les hommes. Ils le rencontrent en mathématique dès le CP quand ils s'aperçoivent qu'on peut toujours ajouter 1 pour allonger la suite des nombres entiers.

Il est particulièrement intéressant de remarquer que, dans le cas de l'angle droit, le centre du cercle se trouve au milieu du côté opposé, donc à la frontière entre l'intérieur et l'extérieur du triangle. Ceci permet de faire le lien avec le cas particulier du triangle rectangle, « moitié » de rectangle, cité par les élèves lors de la conjecture.

A défaut d'un logiciel, le professeur peut amener deux baguettes articulées formant les deux côtés d'un triangle et montrer approximativement le déplacement de la place du centre du cercle quand les baguettes s'écartent en formant un angle aigu, droit, obtus, plat, puis rentrant.

Conclusion

Nous pensons vous avoir convaincus que la nature « concrète » d'un problème n'est ni nécessaire ni suffisante pour amener les élèves à entrer dans une activité mathématique. Leur faire prendre en charge une modélisation, ou leur en proposer une, demande certainement des choix et une organisation spécifique des situations. Mais que le professeur se limite ou non à des problèmes internes aux mathématiques, ce qui est essentiel c'est l'enchaînement des situations et leur place dans la progression. En effet, ce qui importe c'est que les élèves puissent disposer des notions mathématiques et d'un langage suffisant (d'où l'importance des bilans écrits que nous avons transcrits avec précision car tous les mots comptent), pour être capables de prendre en charge eux mêmes les réponses à des questions mathématiques dont la solution n'est ni évidente, ni hors de leur portée. Et la confiance dans les capacités de nos élèves nous semble de plus en plus nécessaire pour concevoir des situations de débat à mesure que l'on monte dans les niveaux d'enseignement.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple qui précède, il n'est pas très facile de concevoir de telles situations, et encore moins de le faire pour préparer ainsi toutes les leçons dans tous les niveaux de classe, c'est même presque impossible pour un professeur qui travaille seul dans son établissement. Il n'est pas évident non plus de transmettre à d'autres les situations que l'on a soi-même créées. Nous avons relaté le cas du professeur qui lors de la consigne avait placé les trois points au tableau, ce qui avait « tué » l'apparition des conjectures.

Ayant maintenant à l'esprit toutes les étapes de la séquence, nous pouvons encore mieux analyser en quoi l'erreur du professeur a une certaine « logique ». Il avait pensé avec raison que, dès l'étape précédente traitant des cercles passant par deux points, les élèves allaient placer les deux points en position d'extrémités d'un segment horizontal, et c'est bien ce qui arrive. Jugeant que ce serait peut-être préjudiciable à la suite il a, en même temps qu'il donnait la consigne, marqué deux points au tableau de façon que le segment ne soit pas parallèle aux bords du tableau. Les élèves ont reproduit la position des points sur leur cahier. La question en est devenue un peu plus difficile pour eux mais sans conséquence négative sur le déroulement de cette étape de la leçon. Le professeur a reproduit logiquement le même geste pour l'étape suivante avec trois points. Mais de ce fait le déroulement de la leçon a été changé. Avoir vu les cercles passant par deux extrémités d'un segment non horizontal n'a pas aidé les élèves pour généraliser avec trois points. L'obstacle des directions privilégiées n'est pas seul en cause dans les difficultés des élèves ici. En présence d'un triangle ayant un angle obtus, les élèves s'interdisent de sortir de la figure fermée pour trouver le centre du cercle . La situation que nous proposons dans l'étape 3 en leur demandant de tracer deux segments [AB] et [AC] sans introduire un triangle fermé et de faire des conjectures sur la figure formée par deux médiatrices est indispensable pour renforcer l'examen de tous les cas de figure y compris l'angle obtus et pour revoir la nécessité d'une deuxième médiatrice non « verticale ».

Dans la transmission de situations aux professeurs il est important de ne pas raconter les réactions des élèves que nous avons observées comme s'il s'agissait d'anecdotes. Nous transmettons des observations qui sont reliées le plus possible à des concepts de didactique, ce qui leur donne une consistance pour les enseignants. D'autre part indiquer simplement les choix des variables n'est pas toujours suffisant sans une argumentation solide. Par exemple avoir compris que ce qui s'appelle « obstacle en didactique » est avant tout une connaissance (ici les directions privilégiées de l'horizontale et de la verticale), sur laquelle le professeur peut laisser l'élève s'appuyer avant de la dépasser, est important. Transmettre une situation sans transmettre en même temps quelques notions de didactique pour fonder les choix n'aide pas les professeurs car ils déformeront alors le scénario, consciemment ou non, ou changeront les variables même si elles sont précisées.

Ceci montre combien il est difficile de transmettre des leçons « qui marchent » à des collègues qui n'ont pas participé à leur construction. Pourtant l'existence de documents montrant des situations de ce type est indispensable car leur conception nécessite une expérience que n'ont certains de nos collègues, et de très nombreuses séances d'observation des élèves. C'est aussi un travail très long dans le temps, car il faut expérimenter puis modifier les situations en fonction des réactions des élèves pour les expérimenter à nouveau l'année suivante, et ces retouches successives se prolongent presque toujours sur plusieurs années. Il est inconcevable que chaque professeur refasse ce travail seul. Outre le travail long et difficile d'expérimentation dans les classes et de mise au point pour nous-mêmes, la transmission de ces situations demande un second travail d'écriture assez lourd. Il faut expliciter des décisions qu'une longue pratique nous conduit parfois à considérer à tort comme transparentes pour tous nos collègues.

En tenant compte des difficultés de conception et de transmission et les risques d'incompréhension de ce type de travail, peut-on être optimiste sur les possibilités d'amélioration de l'enseignement des mathématiques au quotidien dans les classes ? Du moins, ce travail a le grand avantage pour nous d'instaurer dans nos classes des rapports humains avec nos élèves dignes de ce nom, fondés sur le respect de leurs idées qui nous surprennent et même parfois nous émerveillent.

Bibliographie

BERTE Annie (1993) *Mathématique dynamique,* Nathan pédagogie.

BERTE Annie (1995) Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire, Recherches en didactique des mathématiques, vol 15, n°3 pp 83-130.

BERTE Annie (1995) Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes, Petit x, n° 40, pp. 41-63.

BERTE Annie (1996) Progressions et problématiques en géométrie à partir d'un exemple, l'inégalité triangulaire Petit x, n° 45, pp. 41-54.

BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, **n° 56,** pp. 5-34.

BROUSSEAU Guy (1998) *Théorie des situations didactiques* La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU Guy (1983) *Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie.* La Revue de Didactique de l'IMAG de Grenoble N°45.

INRP (1991) *Construction de savoirs mathématiques au collège*, Rencontres pédagogiques n° 30.

IREM d'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège » (2000) *Géométrie au cycle central : un enchaînement d'activités*, IREM Université Bordeaux I.

IREM D'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège » (2001) *Evolution ou ruptures dans les problématiques pour l'enseignement de la géométrie au collège*, Actes du colloque de la commission Inter IREM 1er cycle, IREM de Montpellier.

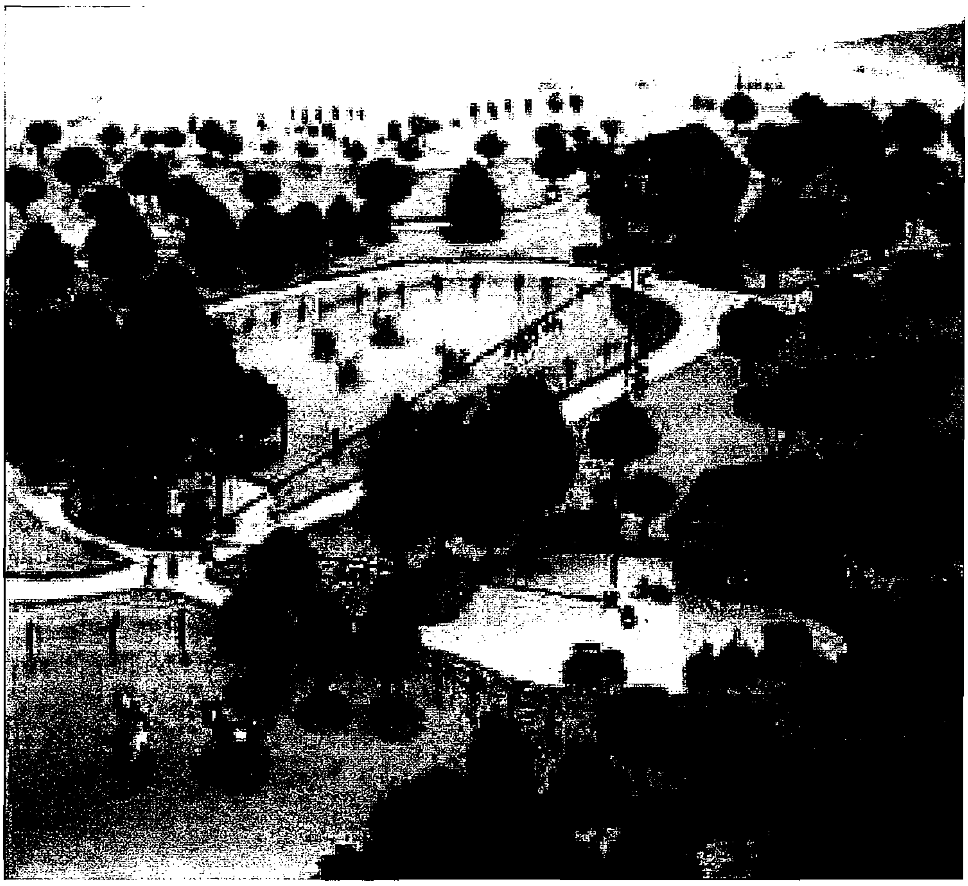
IREM D'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège » (2002) *Des « activités » aux situations d'enseignement en mathématiques au collège*, IREM Université Bordeaux I.

IREM D'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège » (2004) Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique, un exemple : enseigner le cosinus en 4ème Petit x, n° 65 pp. 9-35.

ANNEXE

Cercle circonscrit à un triangle

Les propriétaires de trois chalets en bois souhaitent faire installer une pompe à incendie commune aux trois chalets.



Ils sont confrontés au problème suivant : est-il possible de placer une telle pompe à égale distance des trois chalets ?
Désignons par P l'emplacement de cette pompe.

a. Explique pourquoi P doit se trouver sur la médiatrice du segment [AC].
b. Recopie et complète : de même P doit se trouver sur la médiatrice du segment et sur la médiatrice du segment.
c. Décalque sur la figure ci dessus le triangle ABC puis place le point P.
d. Explique pourquoi le cercle de centre P et qui passe par A passe aussi par les points B et C ?

Il existe un cercle passant par les trois sommets d'un triangle.
Ce cercle, appelé cercle circonscrit au triangle, est centré au point d'intersection des trois médiatrices des côtés du triangle.

Manuel Transmath 5ème, 1995, CHAP 12, TRIANGLES p. 229