LES ATELIERS DE RECHERCHES EN MATHEMATIQUES (EXPERIMENTATION DANS LES CLASSES ET FORMATION DES PROFESSEURS D'ECOLES)[1]

Pierre Eysseric
I.U.F.M. Site d'Aix-en-Provence
IREM de Nice - IREM de Marseille

L'objet de cet article est la présentation d'une expérimentation que nous avons pilotée durant 6 années dans quelques classes des écoles primaires du Var : la mise en place d'un lieu et d'un temps pour le plaisir de chercher en mathématiques. Nous présenterons d'abord le dispositif que nous avons essayé d'expérimenter, puis, après un bref historique du projet, nous analyserons quelques-unes des difficultés rencontrées et le décalage entre le dispositif projeté et les réalisations actuelles. Enfin nous envisagerons les perspectives de ce travail à travers un certain nombre de questions qu'il reste à approfondir pour améliorer le fonctionnement de ces activités de recherche en classe et mieux comprendre leur impact sur l'ensemble des apprentissages et en particulier celui des mathématiques et nous terminerons par la relation d'une recherche effectuée en octobre-novembre 1997 dans un CM2 de Rians.

Présentation du dispositif

Nous souhaitons commencer par une description du dispositif tel qu'il a été projeté et nous examinerons plus loin les écarts entre celui-ci et les réalisations dans les classes. Il s'agit de transposer dans les classes de l'école primaire un style de travail, celui des chercheurs en mathématiques. L'image de cercles concentriques centrés sur l'enfant (ou sur le chercheur) permet une description assez simple de cette transposition.

De la recherche à la publication

Le <u>premier cercle</u> est constitué par l'enfant et son sujet de recherche, c'est-à-dire une question qu'il se pose, qui rentre dans le champ des mathématiques et à laquelle il a envie de pouvoir répondre ; le sujet peut être proposé par l'enfant ou par un tiers (l'enseignant par exemple) mais dans tous les cas l'élève doit se l'être approprié et se sentir responsable de la recherche d'une solution au problème posé.

Le <u>deuxième cercle</u> comprend deux ou trois élèves : ceux qui ont le même sujet de recherche ou des copains avec lesquels on parle librement de son travail ; son équivalent dans la communauté scientifique, ce sont les collègues du laboratoire, ceux que l'on accroche au

---

[1] La première partie de cet article a été publiée dans le numéro 437 du Bulletin Vert de l'APMEP (novembre – décembre 2001) à la suite des Journées Nationales de Nice. Nous la reproduisons avec l'aimable accord de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public).

détour d'un couloir ou devant la machine à café pour leur faire part d'une idée, d'une question, d'un obstacle rencontré, d'un article intéressant, … Ce cercle, bien que très informel, n'est pas sans importance ; c'est un espace de liberté : on peut travailler seul mais on a aussi le droit d'échanger avec d'autres, de parler sans contraintes de son travail ; cela a une incidence non négligeable sur l'implication des enfants dans l'activité de recherche et la découverte du plaisir de chercher.

Le troisième cercle, c'est la classe (les élèves et leur enseignant) qui fonctionne ici un peu comme un laboratoire avec son directeur de recherche. Après un temps de recherche plus au moins long les enfants vont devoir présenter leur travail à toute la classe ; on peut arriver avec des solutions à proposer mais aussi avec des questions restées sans réponse, sur lesquelles on ne parvient plus à avancer. Dans ce cas on explique ce que l'on a essayé, les impasses dans lesquelles on s'est retrouvé et chacun peut intervenir pour proposer de nouvelles pistes ou pour critiquer ce qui a été fait. A l'issue de ce débat deux situations peuvent se présenter : soit on estime que les idées échangées permettent de se remettre au travail sur ce sujet, soit on aboutit à un constat collectif d'impasse et on décide de se documenter ou de renvoyer la question au quatrième cercle (un référent mathématique extérieur à la classe qui peut être un chercheur ou un professeur de mathématiques). Par contre, lorsque l'enfant estime avoir résolu le problème qu'il s'était posé, ses solutions sont soumises à la critique sans pitié des autres élèves et de l'enseignant si cela est nécessaire ; il s'agit donc de convaincre toute la classe de la valeur des réponses proposées. Si le travail présenté est accepté, validé par la classe, il va pouvoir sortir de celle-ci, être publié ; cette publication pourra prendre des formes diverses : affichage dans le couloir, article dans le journal de l'école, fax adressé à une autre classe pratiquant la recherche en mathématiques, courrier envoyé à un chercheur correspondant de la classe, ... On entre alors dans le quatrième cercle, mais avant d'en arriver là plusieurs allers et retours entre le premier et le troisième cercle sont souvent nécessaires et il n'est pas rare qu'un enfant arrivé convaincu d'avoir une excellente réponse doive, à l'issue d'une discussion parfois acharnée, convenir qu'il doit se remettre à l'ouvrage. On a, par exemple, le cas de cet élève de CM2 qui est arrivé un jour devant ses camarades très fier de sa découverte et persuadé de convaincre tout le monde. *« Il y a une infinité de fractions, et je vais vous le prouver » a-t-il déclaré et il a alors entrepris de dessiner au tableau un grand carré. « Je le partage comme ça, on a 1/2 ; je recommence et j'ai 1/4. »* Et il continue ainsi jusqu'au moment où son carré est entièrement couvert de craie blanche ; il conclut alors en disant: *« et etc, on peut toujours repartager et donc, les fractions, c'est infini ! »* Le résultat est alors vivement contesté par deux élèves qui pensent qu'on ne peut pas continuer : le carré est tout blanc, il n'y a plus rien à partager. L'élève reprend son argumentation mais ne parvient pas à les convaincre. Le maître conclut alors la discussion en renvoyant chacun à la recherche : *« Il faut que vous retravailliez là-dessus ; lorsque vous aurez quelque chose de neuf, vous reviendrez en parler. »* La semaine suivante l'élève a affiné sa démonstration ; il reprend comme la première fois, mais avant que tout le tableau ait blanchi, il s'arrête et leur dit : *« Vous voyez ce petit carré. Bon, je l'agrandis, je fais un zoom comme pour les photos et je recommence le partage et comme ça, je peux toujours continuer ! »* Cette fois tout le monde est convaincu mais les deux contestataires veulent tout de même intervenir : en cherchant des arguments pour convaincre la classe que leur copain avait tort, ils sont parvenus à la même conclusion que lui mais d'une autre façon. *« Quand on écrit les fractions 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... on multiplie le nombre du bas par deux et cela nous donne chaque fois une nouvelle fraction; comme on peut toujours recommencer et remultiplier par deux, et bien on voit que les fractions, c'est infini ! »* Tout le monde étant d'accord, on décide de mettre ces deux argumentations au propre et de les afficher dans le couloir. Dans ce troisième cercle le rôle de l'enseignant comme directeur de recherche est fondamental : c'est lui qui régule les échanges, qui gère les allers et retours entre recherche et communication jusqu'à la validation d'un résultat à publier ou au constat qu'on ne sait pas et au recours à une aide extérieure.

Le quatrième cercle est extérieur à la classe : à l'origine du projet, c'était un chercheur, un spécialiste des mathématiques auquel on peut envoyer les travaux de la classe (des résultats, mais aussi des questions restées sans réponse), quelqu'un d'extérieur à la classe, à l'école et qui peut être le garant de la qualité mathématique des travaux réalisés et ainsi autoriser leur publication. En fait on verra que dans la pratique les choses se sont souvent passées différemment, ce quatrième cercle se traduisant surtout par la publication, la communication hors la classe des travaux de recherche des enfants.

Enfin le dernier cercle est le congrès annuel des enfants chercheurs : tous les ans les enfants qui ont fait au cours de l'année scolaire des travaux de recherche en mathématiques viennent les présenter au cours du congrès Maths en Stock. Lors des premiers congrès les effectifs étant peu nombreux la présentation prenait la forme de communications orales. Avec entre 300 et 450 participants aux derniers congrès Maths en Stock, nous avons privilégié la communication par voie d'affiche et l'organisation d'ateliers de recherche en mathématiques. Ce congrès est un peu l'aboutissement du travail de toute une année tout en étant aussi pour certains enfants un tremplin vers d'autres recherches à travers les sujets découverts au cours de la journée. C'est une sorte de fête des mathématiques et l'engouement des enfants surprend souvent les parents accompagnateurs. *« Ils sont fous ; c'est leur sortie de fin d'année, on leur fait faire des maths toute la journée, et en plus, ils sont contents ! »,* nous a dit l'un d'eux.

Un lieu et un temps pour le plaisir de chercher en mathématiques

Après cette description des différentes étapes de la recherche en classe, revenons sur quelques mots clefs qui permettent de mieux comprendre les activités proposées.

"Un lieu"

Les recherches en mathématiques se déroulent dans la classe, avec l'enseignant de celle-ci. Il ne saurait être question pour nous de transférer cette activité en dehors de la classe et de faire une sorte de club mathématique, ou de la confier à un intervenant extérieur. Les ateliers de recherche en mathématiques (que nous désignerons par ARM dans la suite du texte) doivent faire partie du travail de la classe et ne pas se situer à côté. Dans la mesure où nous espérons un impact des ARM sur les apprentissages en mathématiques des enfants, leur immersion dans les activités ordinaires de la classe nous semble fondamentale. Nous voulons éviter de produire un dédoublement des mathématiques dans la tête des enfants : d'un côté, les "maths sympa" du club math ou de l'intervenant extérieur, et de l'autre les "maths rasoir" de la classe, du maître ou de la maîtresse. L'unité de lieu est une condition nécessaire au maintien de l'unité des mathématiques.

"Un temps"

Les ARM sont un des moments de l'activité mathématiques des enfants dans la classe ; un moment important, mais un moment limité : selon les classes, les ARM représentent en moyenne entre 30 min et 1 h par semaine. L'ARM, lieu d'apprentissage d'une démarche, doit exister avec (et non remplacer) les situations d'apprentissage des savoirs figurant au programme de mathématiques de la classe. L'objectif à terme est de faire évoluer l'image que les enfants ont des mathématiques et de leur permettre d'aborder dans un autre état d'esprit les apprentissages plus classiques.

"Le plaisir"

Nous voulons faire découvrir aux enfants des mathématiques qui peuvent être source de plaisir au même titre que la lecture, la musique, la peinture, ... Cette découverte passe par la liberté : peut-il y avoir plaisir si on fait des mathématiques parce qu'on y est contraint ? Et la question du caractère obligatoire ou facultatif de cette activité peut légitimement être posée. Nous avons choisi de proposer les ARM à tous les enfants pour deux raisons. D'une part, un enfant ne peut découvrir qu'il est possible de chercher en mathématiques et d'y trouver du plaisir, si on ne lui en offre pas l'opportunité ; d'autre part, cela nous semblait indispensable pour ne pas isoler les ARM des autres apprentissages. Mais par ailleurs nous ouvrons malgré tout avec les ARM un espace de liberté dans la classe du fait que nous nous affranchissons pour un temps de la contrainte des programmes, et que l'enfant a le libre choix des problèmes qu'il va chercher à résoudre : il n'est confronté qu'à des questions qui ont stimulé sa curiosité et qu'il se pose réellement.

"Chercher en mathématiques"

Après l'évocation de l'espace de liberté des ARM, voici deux mots qui fixent le cadre, l'objet du travail. Tout est possible ; la seule contrainte est de chercher et de le faire dans le champ des mathématiques. Mais tous les acteurs de l'ARM (élèves, enseignant, chercheur) ne mettent pas les mêmes réalités derrière ces mots et tout au long de l'année, le contenu des ARM va être l'objet d'une négociation dans la classe. *« Est-ce bien de la recherche ? Sont-ce des mathématiques? »* Ces deux questions reviendront sans cesse dans la bouche de l'enseignant comme dans celles des enfants. Par un processus analogue à celui fonctionnant chez les personnages mis en scène par Imre Lakatos dans Preuves et réfutations au sujet des polyèdres convexes, les enfants vont, tout en pratiquant la recherche en mathématiques, faire évoluer leur définition de celle-ci. Cette négociation permanente est un élément fondamental pour comprendre l'impact des ARM sur l'ensemble des apprentissages à l'école (les élèves manifestent dès le démarrage d'un ARM leurs conceptions à la fois des mathématiques et de la recherche, et c'est la pratique de la recherche en mathématiques qui va les conduire progressivement à réviser celles-ci) et l'investissement des enfants dans ce type d'activité (beaucoup d'enfants se remettent à exister en tant que sujet face aux mathématiques, ce dont ils ne soupçonnaient plus la possibilité) ; nous essayerons d'illustrer cela sur quelques exemples dans la troisième partie.

Comparaison avec d'autres dispositifs

Le dispositif qui nous a sans doute le plus influencé lors de la conception des ARM est certainement celui de Math en Jeans (acronyme de "Méthode d'Apprentissage des THéories mathématiques en Jumelant des Etablissements pour une Approche Nouvelle du Savoir") et on pourra trouver de nombreuses ressemblances entre les ARM et les recherches en mathématiques proposées aux collégiens et aux lycéens dans le cadre des actions "Math en Jeans". Cependant dès le début nos deux dispositifs se sont différenciés sur un point important : comme nous l'avons écrit plus haut, les ARM sont intégrés dans le fonctionnement ordinaire de la classe et sont proposés à tous les élèves de celle-ci, alors que les jumelages "Math en Jeans" concernent un groupe d'élèves volontaires et se déroulent en général dans l'établissement, mais en dehors des heures de cours.

D'autres dispositifs ont en commun avec les ARM l'objectif d'initier les élèves à la démarche scientifique ; leurs approches de celle-ci diffèrent: l'utilisation de situations-problèmes insiste sur le franchissement d'obstacles et, si la recherche tient une place importante dans ce dispositif, c'est parce qu'elle doit permettre la construction de nouveaux savoirs mathématiques par les enfants ; la résolution de problèmes ouverts (cf. travaux de l'Irem de Lyon) est elle davantage centrée sur la recherche : faire des essais, conjecturer, produire des contre-exemples, valider une conjecture, ... ; enfin, le débat scientifique (cf. travaux de Marc Legrand, Irem de Grenoble) met lui l'accent sur la négociation de la preuve, de la validation. Les ARM empruntent beaucoup à chacun de ces dispositifs, mais leur spécificité réside surtout dans la volonté de transposer dans la classe le travail du chercheur en mathématiques, en se centrant sur le processus plus que sur les résultats.

Terminons ce panorama des dispositifs qui nous ont inspirés en citant les "chantiers" et les "coins" mathématiques expérimentés depuis plus de dix ans en Suisse romande par nos collègues du Groupe de travail pour l'Etude et la Recherche de Moyens d'Enseignement et d'apprentissage de l'IRDP. Ici encore, "apprendre à chercher" est l'objectif central, mais on peut noter deux différences fondamentales avec les ARM : la recherche est en général beaucoup plus cadré quant à son contenu qui doit rester dans les limites du programme de la classe et il n'y a pas de mise en contact des élèves avec le monde de la recherche en mathématiques.

Historique du projet

Les débuts

C'est dans une école de Draguignan utilisant les techniques Freinet que l'expérience a débuté au cours de l'année scolaire 91/92 ; elle concernait alors les soixante élèves du cycle 3 de cette école qui ont pendant un an effectué des recherches sur le thème des nombres et correspondu avec un chercheur de Jussieu. Pour une relation plus complète du travail réalisé au cours de cette première année, je renvoie à la lecture d’un autre article (Eysseric et al 96).

A partir de l'année scolaire 92/93 et pour une durée de 4 ans, le projet a obtenu le soutien de l'IUFM de Nice par l'intermédiaire de son Département Interdisciplinaire d'Etudes, de Recherche et de Formation. Durant cette deuxième année, les classes du cycle 3 de l'école F. Mireur de Draguignan étaient toujours les seules concernées par les ARM ; leur thème de recherche était cette fois la géométrie et une vidéo (Eysseric et al 93) a été réalisé afin de présenter la démarche à d'autres enseignants. Enfin pour la première fois, un congrès a rassemblé au centre IUFM de Draguignan les enfants chercheurs : ce fut la première édition de Maths en Stock avec 70 élèves participants.

Expérimentation et formation

Durant cette deuxième période (de fin 93 à juin 96), notre travail s'est articulé autour de deux axes principaux : diversifier les terrains d'expérimentation et les stabiliser ; intégrer les ARM dans la formation initiale et continue des instituteurs et professeurs d'école.

La diversification des terrains d'expérimentation

Celle-ci s'est réalisée par deux canaux : d'une part, l'organisation en novembre 93 d'un stage de formation continue dont l'objectif était d'initier des enseignants volontaires à la pratique des ARM et d'autre part un appel à volontaires lancé en mai 94 dans les différentes circonscriptions du Var, suivi de plusieurs conférences pédagogiques chez les IEN qui ont bien voulu nous inviter. L'organisation chaque année du Congrès Maths en Stock (120 participants pour la deuxième édition à Draguignan en avril 94, 220 pour le troisième congrès à Toulon-La Garde en juin 95 et plus de 300 à Draguignan en juin 96), la mise en relation des classes avec des personnes ressources (professeurs ou chercheurs en mathématiques) et en particulier, la collaboration de Y. Lafont, chargé de recherche au CNRS, qui a passé quatre journées dans des écoles de la circonscription de St Maximin (interview du chercheur par les enfants, animation d'ateliers de recherche, ...) ainsi que nos nombreuses visites dans des classes pour assister aux ARM et en enregistrer le contenu ont contribué à la stabilisation d'un noyau d'une dizaine d'enseignants qui pratiquent maintenant les ARM dans leurs classes depuis 3 ou 4 ans.

L'intégration dans la formation

Dés le début nous avons intégré la formation dans notre projet autour des ARM. En effet, c'est à grâce à un stage de formation continue de deux fois une semaine (novembre 93, puis mars 95) que nous avons pu commencer à étendre l'expérimentation à un plus grand nombre de classes. Ces stages avaient plusieurs objectifs : initier les enseignants à une pratique personnelle de la recherche en mathématiques ; les familiariser avec les ARM par des visites de classes, ainsi que des séquences de recherche avec des enfants ; réfléchir ensemble aux difficultés liées à la mise en place de ces ARM ainsi qu'à leur incidence sur les apprentissages des élèves ; permettre à chaque enseignant de construire son projet d'ARM pour sa classe.

C'est dans le même esprit qu'un module de formation d'une semaine a été proposé en 96 et 97 à quelques PES volontaires.

Enfin il faut signaler dans ce volet formation les huit mémoires professionnels réalisés entre 95 et 97 par des PES sur le thème des ARM ; une publication actuellement en préparation fera une synthèse de ces travaux.

L'association Maths en Stock

La nouveauté de l'année 97 a été la constitution en association loi 1901, cadre juridique qui devrait faciliter la recherche de subventions et assurer l'autonomie financière du projet. Les deux objectifs principaux de l'association demeurent l'expérimentation avec le suivi des 20 à 30 classes qui pratiquent les ARM dans le Var, et la formation initiale et continue. Par ailleurs, un autre axe de travail pour maths en Stock est la communication : diffusion de nos travaux via des publications et/ou des interventions dans des colloques, communication entre les classes pratiquant les ARM (publication des actes des Congrès Maths en Stock, utilisation d'internet, ..

Actuellement, par le biais d'animations pédagogiques en circonscription, nous diffusons le dispositif auprès des enseignants des écoles de la région PACA : des classes des Hautes-Alpes, du Vaucluse et des Bouches du Rhône ont intégré en 99/00 et en 00/01 le dispositif Maths en Stock et il y aura bientôt une centaine de classes associées à ce projet. Les nouvelles pistes que nous explorons sont :

- l'organisation de "classes mathématiques" sur une semaine, avec une forte connotation "recherche" ;
- l'extension du dispositif à des classes de sixième du collège (un obstacle important: l'horaire souvent très réduit dont dispose le professeur de mathématiques avec sa classe) ;

- le transfert du dispositif dans des classes de Maternelle: à ce jour, nous ne disposons que de l'expérience fort encourageante d'une classe de Moyens-Grands de Vitrolles en 99/00; plusieurs classes de Maternelle tentent l'expérience et un bilan en sera fait à la fin 2001 ;
- l'organisation de "défis mathématiques" autour de situations de recherche en mathématiques.

Nous ferons le point sur ces nouveaux développements dans de prochaines publications.

Du projet aux réalisations

Une situation didactique inhabituelle

Dès que nous avons présenté les ARM à des enseignants de l'école élémentaire afin de les expérimenter ailleurs qu'à l'école F. Mireur de Draguignan (cf. stage de formation continue de novembre 1993,...) nous avons été confrontés à un double mouvement qui peut paraître a priori paradoxal : d'une part un engouement pour ce type d'activité et d'autre part la crainte de s'y lancer. Et parmi les enseignants qui pratiquent actuellement les ARM dans leur classe, il y en a beaucoup qui ont hésité parfois plusieurs années avant de se lancer, remettant sans arrêt au mois ou à l'année suivante (cf. témoignage de P. Châtard en annexe). La peur de se retrouver face à des problèmes de mathématiques posés par les enfants et auxquels ils ne sont pas capables de répondre est un argument fréquemment avancé par ceux qui ont envie de commencer mais n'osent pas franchir le pas, ce qu'ils résument souvent en disant : *"nous ne sommes pas assez bons en mathématiques pour faire cela* !*"*. Le manque de temps est aussi souvent invoqué, en particulier par des enseignants qui ont essayé les ARM, puis ont arrêté : *"c'est très intéressant, mais le temps n'est pas élastique, on ne peut pas tout faire..."*. T. Assude, dans son mémoire professionnel de professeur des écoles (Assude 97), tente d'expliquer ces réticences par rapport à la temporalité du dispositif. Dans les situations didactiques traditionnelles l'enseignant a la maîtrise complète du temps ; en particulier, il sait toujours ce qui vient après, le déroulement des séquences et des apprentissages étant régi par un texte du savoir délimité par des programmes officiels et des manuels. Or la grande nouveauté dans les ARM, c'est qu'il n'y a pas de texte du savoir a priori, car ce qui est au centre de l'activité, ce n'est pas un savoir à construire, mais un style de travail (celui du chercheur en mathématiques). La conséquence en est une forte déstabilisation de l'enseignant qui ne peut plus maîtriser le futur, connaître la suite des événements, ce que T. Assude exprime ainsi : *"l'enseignant doit accepter le partage des responsabilités et la co-production du texte du savoir"* et cela lui permet d'énoncer *"cinq règles qui permettent de négocier le contrat de recherche et par là de faire avancer le temps de recherche :*

> *Règle 1 : on est co-responsable de la recherche du groupe.*
> *Règle 2 : on se pose des questions et on étudie des problèmes.*
> *Règle 3 : on communique l'état d'avancement de nos recherches.*
> *Règle 4 : on doit aboutir à un produit fini.*
> *Règle 5 : les travaux doivent être validés par la classe (l'enseignant inclus*)."

(Assude, 97)

Qu'est-ce qu'un sujet de recherche ?

L'action de chercher en mathématiques est-elle caractéristique des ARM ? Nous allons répondre par la négative à cette question. La pratique des ARM et l'analyse de celle-ci nous a conduit à bien distinguer ce que nous appellerons un sujet de recherche d'un problème de recherche ou de la phase de recherche d'une situation d'apprentissage.

Dans cette dernière contrairement aux ARM, c'est le texte du savoir à construire qui est premier : il y aura dans les phases de recherche d'une situation didactique réinvestissement mais pas apprentissage de la démarche de recherche. Par contre, lorsqu'un problème de recherche est proposé à des élèves, l'objectif est bien de leur apprendre à chercher et cela par le biais de la résolution d'un problème précis posé par l'enseignant.

Dans les ARM nous voulons transposer le plus complètement possible la démarche du chercheur ; or il nous semble que celle-ci commence souvent par la formulation du problème. C'est ce qui nous conduit à opposer le sujet de recherche au problème de recherche. Dans un cas il s'agit de se poser des questions auxquelles on essayera ensuite de répondre sur un sujet que l'on choisit ou qui nous est proposé, dans l'autre on doit répondre à une question posée par un tiers. Confondre les deux aurait deux conséquences non négligeables :

1) restreindre très fortement l'espace de liberté des ARM ;
2) occulter l'aspect "formulation d'un problème" de l'apprentissage de la démarche de recherche.

A ce propos il est important de remarquer que la différence entre un sujet et un problème de recherche ne se situe pas au niveau formel. Un sujet de recherche peut très bien être dévolu à la classe par l'intermédiaire d'un problème de recherche s'il est clair pour tous les acteurs que l'on n'attend pas seulement la solution du problème mais toutes les questions qu'il peut conduire à se poser. De même, certaines circonstances peuvent entraîner la fermeture d'une situation de recherche qui sera alors perçue comme un problème ordinaire. Nous en avons fait récemment l'expérience avec un groupe d'adultes : aussitôt le sujet exposé, un des participants a formulé <u>sa</u> question, et en raison de la personnalité de celui-ci et de sa situation dans le groupe, <u>sa</u> question s'est imposée au groupe comme <u>la</u> question à laquelle chacun devait répondre, entraînant chez certains un blocage dû à la disparition d'un espace de liberté : ils ne se sentaient plus autorisés à poser <u>leurs</u> questions et, comme <u>la</u> question posée ne les intéressait pas, ils rejetaient l'activité.

Comment démarrer la recherche dans une classe

Tous les enseignants ne démarrent pas la recherche dans leur classe de la même façon. Les témoignages recueillis et les observations réalisées depuis cinq ans nous permettent de proposer une classification de ces démarrages par rapport au degré d'ouverture de la situation de départ.

Ouverture totale

Elle est en général le fait d'enseignants aguerris qui ne redoutent pas la non-maîtrise du temps. Ce fut le cas d'une enseignante qui, au retour du stage de formation continue de novembre 93, a expliqué aux enfants de son CE2 les raisons de son absence d'une semaine et leur a dit qu'elle avait fait de la recherche en mathématiques ; puis elle leur a proposé d'en faire autant et l'ARM a démarré ainsi avec cette seule consigne : tout est possible à condition que ce soit des mathématiques et qu'on cherche. Un autre exemple nous est fourni par une maîtresse de CE2 qui a elle commencé en distribuant à ses élèves une photocopie du sommaire d'un ouvrage intitulé "Contes de Provence" et avec la consigne: *"à partir de ce document, vous allez faire des recherches en mathématiques !"*. Dans un cas comme dans l'autre on a été très rapidement confrontés à des enfants qui faisaient des opérations ou qui se posaient des petits problèmes ayant la forme de ceux résolus en classe au cours des semaines précédentes. Ainsi les élèves manifestaient d'entrée leur représentation des mathématiques et le processus de négociation évoqué en 1.2 était lancé par des remarques de certains enfants : *"est-ce de la recherche ?, ..."*.

Situations ouvertes encadrées

Il s'agit alors de proposer une situation aux enfants et de les amener à poser leurs questions. En général, un travail important sera fait avec la classe pour trier les questions de mathématiques et celles qui, sans être pour autant inintéressantes, relèvent d'un autre champ disciplinaire, ce qui est de la recherche et ce qui n'en est pas.

Quelques exemples :

* Un enseignant de CE2 a proposé la situation suivante : *"on jette trois dés"*, puis il a demandé aux élèves de rechercher toutes les questions que l'on pouvait se poser ; celles-ci ont alors été inscrites au tableau et, dans une phase collective, on a trié les questions, ceci conduisant à donner une première définition de la recherche en mathématiques. Enfin les enfants ont été invités à choisir une des questions dont il avait été décidé collectivement qu'elles entraient dans le champ de la recherche et des mathématiques, puis à essayer de la résoudre seul ou en groupe de deux ou trois.

* La même démarche peut être envisagée avec d'autres situations comme: *"on a des pièces de 1F, de 2F et de 5F", ...*

* Dans un CE1/CE2 on a proposé le sujet suivant: *"on choisit un nombre de trois chiffres ; avec ces trois chiffres ordonnés du plus grand au plus petit, on obtient un nouveau nombre ; avec ces mêmes trois chiffres ordonnés du plus petit au plus grand, on en obtient un deuxième ; on calcule la différence des deux puis on recommence toutes les opérations, mais cette fois à partir du résultat obtenu, ... on observe et on se pose des questions !"*. Un groupe de cinq ou six enfants s'est passionné sur ce sujet durant plus de six mois. Ils ont conjecturé des résultats, tenté d'avancer des explications, élargi le problème aux nombres de 2, puis 4, 5 et même 6 chiffres ; ils ont fait un très grand nombre de soustractions, mais cela n'était pas gratuit ; cette situation avait aiguisé leur curiosité sur les nombres ; ils découvraient des phénomènes qu'ils avaient envie d'explorer, de comprendre et les opérations réalisées servaient à cette exploration.

Manipulation d'un matériel

C'est sans doute le démarrage le plus fréquent dans les classes. Le passage par la manipulation d'un matériel permet dans un premier temps d'occulter la représentation dominante des mathématiques (*"faire des mathématiques, c'est faire des calculs"*), mais au cours des phases de communication, à travers des remarques comme : *mais est-ce que c'est des mathématiques ?* que le débat sur les représentations des mathématiques et de la recherche resurgira.

Voici quelques-uns des matériels qui ont été utilisés : jeux de stratégie, machines à calculer, ficelles et nœuds, motifs géométriques à reproduire, solides à construire, machines à jetons reproduisant le fonctionnement d'un ordinateur, ... Nous renvoyons à une publication ultérieure pour une description plus détaillée des travaux de recherche effectués par les enfants à partir de ces matériels. Mais une difficulté spécifique à ces points de départ mérite d'être signalée : il arrive que des enfants s'enferment dans la manipulation, jouent sans jamais faire de recherche en mathématiques ; comment faire évoluer alors la situation ?

Une première réponse peut être apportée par l'intermédiaire des phases de communication au cours desquelles chaque enfant devra exposer le résultat de son travail et affronter le regard critique de ces pairs ; c'est souvent à travers les questions que les autres vont lui poser au sujet de ses manipulations que l'enfant va être conduit à quitter le stade du jeu pour véritablement chercher. Mais on peut aussi se demander si cette manipulation, ce jeu n'est pas lui-même un élément important de la recherche : rendre le sujet suffisamment familier pour pouvoir ensuite le questionner. Cela pourrait expliquer le fait que certains enfants aient besoin de manipuler plus longtemps que d'autres avant de passer à une "véritable recherche", les matériels proposés étant plus ou moins connus de certains enfants. Le chercheur ne passe-t-il pas lui aussi parfois beaucoup de temps à se familiariser avec son sujet avant d'être capable de formuler la question qu'il va essayer de résoudre ? Et un observateur extérieur pourrait dans ces moments croire qu'il ne fait rien, car effectivement il ne produit rien, il n'y a aucune matérialisation de son travail. Certains enfants dont nous pourrions être tenté de dire qu'ils ne font rien ne sont-ils pas un peu dans la même situation ?

Questions fermées non traditionnelles

Il s'agit essentiellement de problèmes ludiques extraits de rallyes mathématiques, qui, bien que généralement fermés, peuvent facilement déboucher sur une situation ouverte : une fois la question résolue (ou parfois avant même qu'elle le soit) la curiosité est aiguisée et on a envie d'aller plus loin, de se poser d'autres questions.

La communication dans les ARM

Lors du premier contact avec les ARM, la plupart des observateurs néophytes remarquent surtout la phase d'action : la ruche bourdonnante des enfants effectuant leurs recherches en mathématiques. Et lorsqu'ils tentent de transposer l'activité dans leur classe, ils se limitent à reproduire celle-ci. Mais très rapidement, et c'est ce qui est unanimement ressorti du stage-retour de mars 95, l'activité ainsi mise en place ne les satisfait plus ; ils ont l'impression de tourner en rond. En analysant ensemble ce sentiment de frustration, ils ont alors pris conscience de l'importance de cette phase de communication qu'ils avaient jusqu'ici négligée parce qu'elle est coûteuse en temps, moins ludique et nécessite une organisation rigoureuse. En effet, c'est la communication plus que l'action qui constitue le véritable moteur de l'ARM : la communication favorise le processus de négociation évoqué en 1.2 et l'évolution des représentations des enfants à propos de la recherche en mathématiques ; c'est la communication qui permet, au travers des réactions suscitées, de relancer une recherche qui piétinait ; enfin quelle signification peut avoir l'action de chercher si on n'a pas le projet de communiquer à autrui le résultat de son travail. La communication doit donc déjà exister "en projet" au moment de l'action (cf. Règles 3, 4 et 5 proposées dans (Assude, 97) ; c'est elle qui va réguler l'ensemble du processus de l'ARM et la mise en place de celui-ci nécessite donc l'organisation par l'enseignant de cette communication des recherches dans sa classe (exposés, affiches, journaux, congrès, ...). On trouvera dans (Marill, 96) (mémoire professionnel de PE) quelques analyses détaillées du rôle de la communication dans les ARM.

Enfin la communication des résultats des recherches hors la classe est en général l'occasion de réorganiser les savoirs produits, ce qui représente une part importante du travail des chercheurs.

Perspectives

Après avoir évoqué dans le paragraphe précédent les points sur lesquels l'analyse des ARM a le plus avancé, il nous reste à faire un inventaire non exhaustif de questions encore très ouvertes sur les ARM. Pour beaucoup d'entre elles, nous avons des intuitions de réponses, quelques témoignages qui confirment des intimes convictions, mais le travail réalisé est encore insuffisant pour fournir des réponses bien étoffées et argumentères. Ces questions sont ici, comme au cours de l'atelier, livrées en l'état afin de mieux situer l'avancement de notre réflexion et de susciter d'éventuelles réactions susceptibles de faire progresser celle-ci.

A quoi servent les ARM ?

Y a-t-il un impact réel sur les apprentissages ? sur la façon d'aborder les mathématiques ? les problèmes ? De nombreux témoignages nous font penser que oui (cf. annexe). Des enfants en particulier qui auparavant se plaçaient en position d'attente dès que l'enseignant annonçait un problème de mathématiques, se mettent à chercher (sans forcément trouver), à essayer de faire quelque chose pour résoudre le problème. Mais une étude plus scientifique de cet impact reste à faire.

Le plaisir de chercher : réalité ou fantasme ?

Là aussi tous les témoignages concordent, mais il faudrait réaliser une étude comparative avec les enfants ne pratiquant pas les ARM, reprenant et améliorant celle amorcée dans son mémoire professionnel par V. Monteil (Monteil, 95).

Les ARM : obligatoires ou facultatifs ?

Nous avons dit plus haut dans quel sens (et pourquoi) nous avons tranché cette question, mais peut-être faudra-t-il se la reposer si on va un jour au delà du stade de l'expérimentation. La question peut alors rebondir à un autre niveau, celui de l'enseignant: jusqu'ici tous les enseignants qui ont pratiqué les ARM étaient volontaires ; le dispositif qui a fonctionné ainsi peut-il survivre si l'ARM est imposé à chaque enseignant comme une activité du programme parmi d'autres ?

La recherche oui, mais pourquoi en mathématiques ?

Qu'est-ce qui peut justifier le fait de réaliser un apprentissage de la démarche scientifique par le biais de recherches en mathématiques ? Le contenu des recherches ne doit-il pas être élargi aux sciences ? à d'autres disciplines ? Comment situer le travail organisé dans les ARM par rapport à d'autres initiatives comme celle de G.Charpak avec "La main à la pâte" ?

La mémoire du travail de la classe

On a pu remarquer que, selon les classes, la mémoire du travail d'une séquence sur l'autre est organisée différemment : certains laissent cette mémoire entièrement à la charge des élèves, d'autres, à l'opposé, conservent l'ensemble des brouillons de recherche des enfants avec la date et le nom des auteurs. T. Assude dans son mémoire professionnel (Assude, 97) a amorcé une étude du fonctionnement de la mémoire dans les ARM, mais ce travail encore embryonnaire mériterait d'être repris et complété.

Le rôle du chercheur

Jusqu'à ce jour seule l'école F. Mireur a pu fonctionner avec un chercheur durant une année (91/92) suivant le dispositif projeté. Depuis deux ans Y. Lafont vient passer une journée dans deux écoles du département, mais nous ne sommes pas parvenus à mettre en place une communication régulière entre le chercheur et les classes pratiquant les ARM. Plus généralement nous n'avons pas et nous n'aurons jamais un chercheur pour chaque classe, alors... qui peut remplacer le chercheur et être cette personne-ressource, spécialiste des mathématiques, garante de la qualité mathématique des recherches effectuées ? Un professeur de mathématiques ? Un conseiller pédagogique spécialiste des mathématiques ? ... Ces différentes pistes ont été envisagées et demandent à être approfondies, mais un élément important est apparu : on ne peut remplacer le chercheur que par quelqu'un qui a lui-même une expérience, une pratique de la recherche. Sinon on risque, si l'on n'y prend garde, d'assister à un recadrage des ARM vers la production d'un texte du savoir au détriment de la démarche de recherche. En bref il nous semble que le chercheur (professionnel) ne peut être remplacé que par un chercheur (éventuellement amateur).

La formation

La formation à la pratique des ARM a pour l'instant été réservée à quelques volontaires qui avaient été informés de l'expérimentation. Mais la place à donner à ce dispositif dans le cadre de la formation des professeurs des écoles, mais aussi des professeurs des lycées et collèges, reste à réfléchir. En parallèle, c'est plus généralement la place d'une initiation à la recherche dans la formation des enseignants, tout comme les liens entre le monde de la recherche et celui de l'éducation qui sont à repenser, ou à penser.

Chronique d'une recherche

Cette chronique a été rédigée à partir, d'une part, de la correspondance entre la classe du CM2 de l'école de Rians et M. Yves Lafont, chargé de recherches au CNRS (IML de Luminy), et de l'enregistrement audio du travail réalisé par les enfants lors de la visite du chercheur, d'autre part, dans leur classe. Pour la retranscription des dialogues quelques abréviations seront utilisées : C désignera le chercheur, M le maître de la classe et E un élève.

Travail en Atelier de Recherche en Mathématiques

* Construction d'une dizaine de solides (le matériel utilisé est le matériel Polydron : faces polygonales en plastique rigide s'emboîtant les unes dans les autres).

* Observation des solides; comptage des faces, des arêtes et des sommets ; organisation des résultats dans un tableau.

* Formulation d'un premier problème :

"Les faces, c'est assez facile à compter ; mais pour les arêtes ou les sommets, c'est plus dur ! Est-il possible de trouver un moyen de calculer le nombre d'arêtes ou de sommets sans les compter ?"

* Ce problème amène les enfants à rechercher une éventuelle relation entre le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un même solide.

Formulation devant la classe des résultats obtenus

* Plusieurs enfants ont redécouvert à partir des résultats consignés dans leur tableau la loi d'Euler :

Nombre de faces + Nombre de sommets - 2 = Nombre d'arêtes

* Cette loi est exposée à la classe, discutée et vérifiée sur les différents solides fabriqués.

* Toute la classe s'étant mise d'accord sur la formulation de la loi, un courrier pour Yves Lafont est préparé.

* L 'enfant qui tape le fax se trompe : il inverse arêtes et sommets ; ainsi le document que recevra le chercheur (fax du 27/11/97) contiendra des résultats erronés, ce qui n'était pas le cas au moment de l'exposition en classe... En outre deux questions sont posées au chercheur :

- Est-ce que cette règle est générale pour tous les solides ?

- Peut-on trouver une loi qui nous donne le nombre d'arêtes et de sommets en connaissant le nombre de faces ?

Réponse par fax du chercheur

" Bonjour la classe « Les Pies »

J'ai bien reçu votre fax, et j'aimerais en savoir un peu plus sur vous. Par exemple, en quelle année êtes-vous ? Combien êtes- vous ? Quel est le nom de votre professeur ?

Votre recherche porte sur un domaine très intéressant des mathématiques, qui s'appelle la *topologie*. Je pense que vous avez fait une confusion, sans doute entre les sommets et les arêtes. Pouvez-vous m'envoyer les dessins (ou les patrons) des solides que vous avez construits ?

Cela dit, il y a une formule qui vaut pour beaucoup de solides, mais pas pour tous. Essayez donc de construire un solide qui ressemble à une bouée, c'est-à-dire avec un trou au milieu (les mathématiciens appellent cela un *tore*).

Essayez aussi de construire deux solides (sans trous) qui ont le même nombre de faces, mais pas le même nombre de sommets. Cela peut répondre à votre deuxième question."

Arrivée du chercheur dans l'école

* Celle-ci coïncide avec la réception du texte ci-dessus par les enfants ; on retourne au travail en ARM pour :

- corriger la loi si elle est erronée ;

- représenter les solides fabriqués pour illustrer la loi obtenue.

Travail en ARM en présence du chercheur

* A partir des solides, tableau et loi sont rectifiés.

* Plusieurs enfants se lancent dans la représentation des solides par un de leurs patrons; cela débouche sur de nouvelles découvertes :

- des solides différents peuvent avoir le même nombre de faces avec des nombres d'arêtes et de sommets qui diffèrent ;
- Sébastien propose au chercheur une méthode pour compter les arêtes et les sommets d'un solide sur son patron.

Exposition, formulations des découvertes du matin

* Ecriture de la loi corrigée :

Nombre d'arêtes = Nombre de faces + Nombre de sommets - 2

* Vérification collective de la loi sur les différents solides (de nouveaux solides ont été fabriqués au cours de l'ARM du matin).

* Retour aux deux questions que les enfants avaient posées au chercheur :

- à propos de la première, il leur rappelle la suggestion faite dans sa réponse écrite: essayer de construire un solide qui ressemble à une bouée.

- mais la discussion s'engage rapidement sur la deuxième question: ***peut-on trouver une loi qui nous donne le nombre d'arêtes et de sommets en connaissant le nombre de faces ?***

Marlène et Michaël répondent "non" en présentant les deux solides à 8 faces qu'ils ont fabriqués:

le solide de Marlène (prisme à base hexagonale)

8 faces 12 sommets 18 arêtes

le solide de Michaël (octaèdre régulier)

8 faces 6 sommets 12 arêtes

Ils recomptent, vérifient la loi devant la classe et disent :

"Non, on ne peut pas car 8 faces donnent 6 et 12, ou 12 et 18 pour les sommets et les arêtes."

Un autre élève prend alors la parole :

"Moi je dirais non, car on est obligé d'avoir les faces et les sommets, ou les faces et les arêtes. Si on a les faces et les sommets, on peut calculer les arêtes:

Nombre d'arêtes = Nombre de faces + Nombre de sommets - 2

Si on a les faces et les arêtes, on peut calculer les sommets:

Nombre de sommets = Nombre d'arêtes + 2 - Nombre de faces."

* l'enfant écrit les deux formules au tableau; il s'ensuit une discussion autour de différentes formules proposées par les enfants :

Nombre de sommets = Nombre d'arêtes - Nombre de faces + 2

"C'est la même chose dans un ordre différent:"

"Les deux formules, c'est pareil: dans la première, on ajoute 2 aux arêtes et ensuite on enlève les faces; dans la deuxième, on enlève d'abord les faces, puis on ajoute 2, c'est pareil!"

La formule : Nombre de faces = Nombre d'arêtes - Nombre de sommets + 2, est proposée pour calculer les faces.

"Les faces, ça ne sert à rien de les calculer; c'est facile à compter !"

* les enfants prennent visiblement plaisir à ce nouveau jeu "trouver de nouvelles formules", mais il faut signaler que la plupart des formules sont énoncées en s'appuyant sur les nombres d'une ligne du tableau (un solide particulier) :

"8 (faces) = 12 (arêtes) -6 (sommets) + 2"

puis sont vérifiées sur les autres solides.

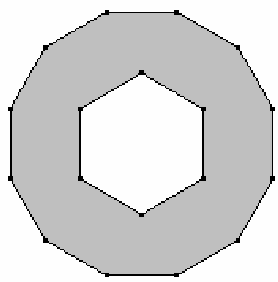
* le chercheur leur propose une formule qu'aucun élève n'a énoncée jusqu'ici :

peut-on écrire Nombre de sommets = 2 - Nombre de faces + Nombre d'arêtes ?

E: *"oui, on a juste changé l'ordre; mais pour calculer, il faudrait aller dans les “moins”."*

La bouée de Vivien

* Pendant la discussion ci-dessus, Vivien a construit un solide en forme de bouée; il vient le présenter et on organise le comptage des faces, des arêtes et des sommets.
C'est un prisme droit à faces latérales carrées (12 extérieures et 6 intérieures) et de base ci-dessous :



vue de dessus

* A propos des arêtes non saillantes "du trou de la bouée", surgit alors une question :
E_1: *"Est-ce que ça, c'est une arête ?"*
E_2: *"Oui, c'est une arête, car là, on compte une face, et une autre face à côté."*
C: *"On peut décider qu'une arête, c'est toujours la limite entre deux faces ; comme cela, on ne se trompera pas ; d'habitude les arêtes sont un peu comme une montagne ; là on a des arêtes "presque plates" ou comme des vallées."*

* Un enfant remarque que le "dessus" et le "dessous" sont identiques et que cela peut raccourcir le comptage.

* Le comptage aboutit à : 42 faces 78 arêtes 36 sommets
On calcule alors: Nombre de faces + Nombre de sommets - 2
et on trouve ... 76.
La formule serait-elle fausse pour la bouée de Vivien ?
E_1: *"Il y a une erreur dans le nombre de sommets; on en a compté deux de moins."*
M: *"Et si c'était le nombre d'arêtes qui soit faux !"*
C: *"Ou une erreur pour les faces..."*
E_2: *"Non, les faces, on sait les compter; c'est facile sans se tromper !"*
E_3: *"Il y a une erreur de 2, ou alors la loi ne marche pas."*
C: *"Et pourquoi la loi ne marcherait pas avec ce solide ?"*
E_3: *"Il doit y avoir une autre loi."*
C: *"Une autre loi pour quels solides ?"*
E_3: *"A partir d'un nombre limité d'arêtes, de sommets, de faces, on change de loi."*
C: *"Quand il y a beaucoup de faces, de sommets ou d'arêtes ?"*
E_4: *"A partir d'un certain nombre de faces, il faut changer la loi !"*
On note la proposition au tableau :

Quand le nombre de faces devient grand, on change de loi.

C: *"Ce serait intéressant de fabriquer d'autres solides avec beaucoup de faces, de sommets, d'arêtes ; avec au moins 42 faces... Il serait aussi intéressant de fabriquer une autre bouée."*

Retour à la recherche individuelle (ou en petits groupes)

* On vérifie le comptage pour la bouée de Vivien.

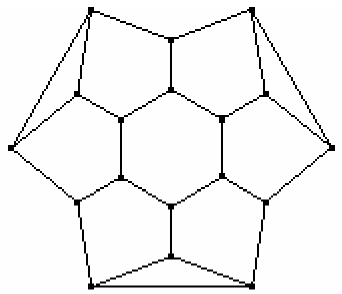
* On fabrique d'autres solides pour savoir si la loi change, et quand est-ce qu'elle change.

* Certains utilisent ce temps pour s'approprier les lois qui ont été écrites au tableau au cours de la discussion en les vérifiant sur des solides.

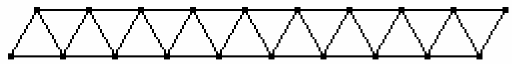
Le solide de Sébastien

* L'annonce de la fabrication d'un nouveau "gros" solide interrompt le travail et ramène la classe à la discussion collective.

"Voilà le nouveau solide que j'ai fait; bon là, il y a des trous, mais c'est des faces..." (il a manqué de pièces et il raisonne sur un solide en partie construit avec des pièces en plastique et en partie "pensé").



"dessus" ou "dessous" (les différents polygones ne sont pas coplanaires)



"le tour"

* Le comptage aboutit à: 38 faces 36 sommets 72 arêtes
et on vérifie que la loi marche...
E: *"Peut-être que la loi change entre 38 et 42..."*
On en restera là pour l'instant: la recherche est à poursuivre...

Discussion autour du comptage des faces du solide de Sébastien

E_1: *"Il n'y a que 19 faces, car "tout ça"* (en montrant la partie supérieure du solide), *c'est une seule face."*

* On recompte avec cette "convention" et on aboutit à 20 faces.

E_2: *"Je ne comprends pas pourquoi ça* (le tour), *tu dis que c'est plusieurs faces ; si c'était rond* (allusion à un cylindre), *là, cela ne compterait qu'une seule face."*

C: *"Est-ce que cela change le nombre d'arêtes ?"*

E_2: *"Il compte les arêtes par petits morceaux et il dit que le haut, c'est une seule face !... Pour moi, il y a 3 faces, 2 arêtes ... et pas de sommets !"*

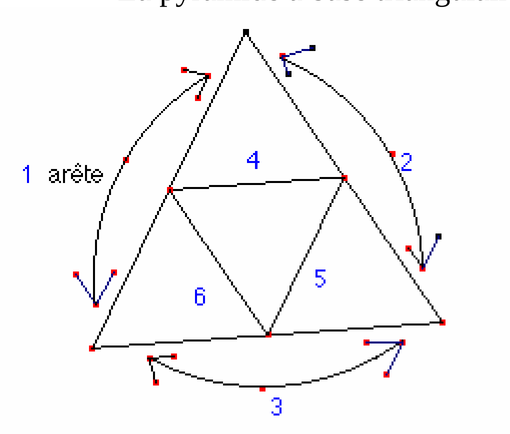
* La discussion est très animée sur ce qu'est une arête ou une face pour de tels "gros" solides ; on touche là à des questions de nature topologique...(équivalence entre prisme et cylindre). La question ne sera pas tranchée et sera renvoyée à une éventuelle recherche ultérieure.

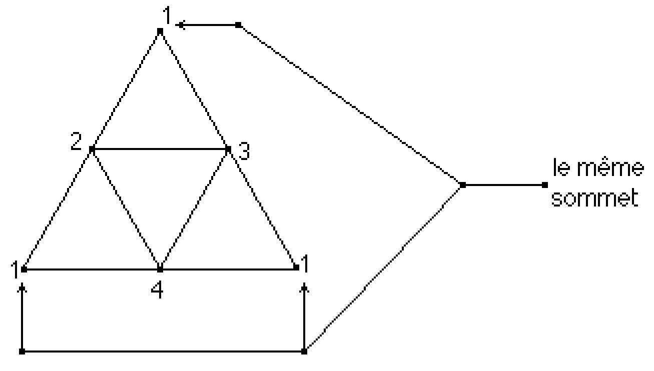
"Nous avons du mal à définir les faces dans le cas des bouées." (fax du 14/3/98)

Le comptage des sommets et des arêtes sur un patron

Sébastien présente ce qu'il a trouvé le matin :

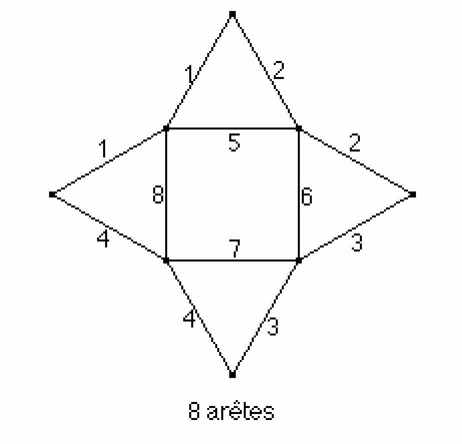
* La pyramide à base triangulaire (tétraèdre): *"4 faces : des triangles réguliers."*

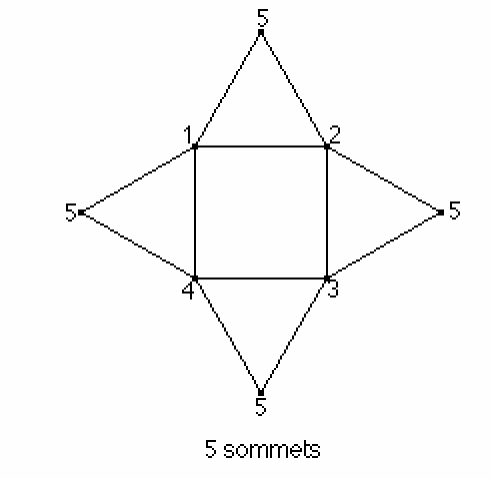




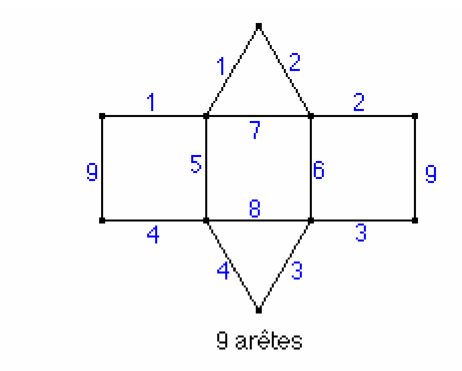
"Quand on referme “ça” et “ça”, ça va se toucher! ... donc 4 arêtes."
"Tout ça là, c'est un seul sommet, donc 4 sommets."
Critique: *"Et pour un grand patron ?"*
Réponse: *"C'est pareil! ça marche pour toutes les pyramides..."*

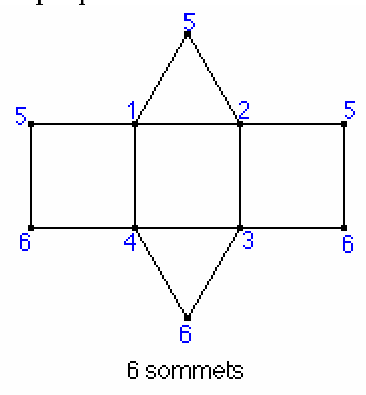
* Et il recommence avec la pyramide à base carrée :



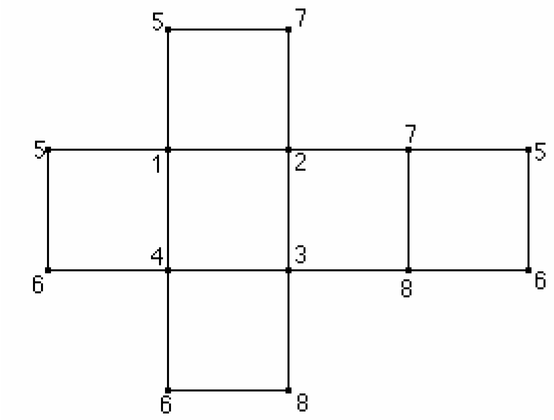


* Il ne parvient pas à retrouver l'extension de sa méthode qu'il avait proposée le matin pour le prisme à base triangulaire. Voici ce qu'il avait expliqué au chercheur :





* Il propose alors d'essayer sa méthode pour le cube ; après quelques hésitations, il y parvient pour les sommets :



8 sommets

"5 "' et "6" sont identifiés moins rapidement que les autres :

"Quand on rabat, ça va se coller là-haut et ça fait le même sommet."

Pour les arêtes, un coloriage des regroupements deux par deux des segments du bord du patron lui permet de conclure avec l'aide du chercheur...

Conclusion de la journée

* On renvoie au prochain ARM les questions en suspens et la mise au propre des formulations.

* Mais les enfants voudraient poursuivre et plusieurs, avant de sortir, annoncent qu'ils ont de nouveaux solides à tester.

* On repart avec :

- une loi reliant faces, arêtes et sommets, qui marche pour tous les solides fabriqués, sauf pour la bouée de Vivien ; si cette loi change lorsque le nombre de faces est grand, c'est entre 38 et 42.

- une méthode pour compter les arêtes et les sommets sur le patron qui fonctionne bien pour les pyramides, mais n'est pas encore tout à fait au point pour les autres solides.

Bibliographie (ouvrages cités)

Arsac G. & al (1991) *Problème ouvert et situation-problème.* Irem de Lyon.

Assude T. (1997) *L'atelier de recherche mathématique: problèmes de temps et de mémoire,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Eysseric P. & al (1993) *Le plaisir de chercher,* document vidéo, IUFM de Nice, Service audiovisuel du centre de Draguignan.

Eysseric P. & al (1996) *Le plaisir de chercher,* in Le plaisir de chercher et autres textes ..., IUFM de Nice.

Legrand M. (1989) *Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport à une communauté scientifique,* RDM, Vol. 9-3, p. 365 à 406, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Legrand M. (1993) *Débat scientifique en cours de mathématiques,* Repères Irem n° 10, Topiques éditions.

Marill F. (1996) *La communication dans la recherche mathématique à l'école,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Monteils V. (1995) *Le plaisir de chercher,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Annexe

Témoignage de P.Châtard, PEMF à l'école J. Ferry de Draguignan (CM2)

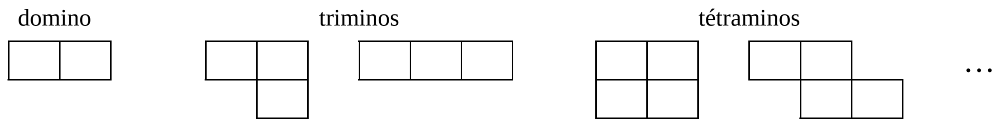
Cela fait deux ans que mes élèves et moi-même avons le plaisir de faire de la recherche en mathématiques. J'ai eu peu de mal à convaincre mes élèves mais, en ce qui me concerne, il m'a bien fallu une année avant de vraiment me lancer !
La première chose que j'ai pu remarquer, c'est que le concept de recherche doit d'abord être construit par le maître lui-même, puis par les élèves. Il ne peut se lancer dans cette activité que s'il a une représentation lui permettant d'organiser son travail. Les élèves eux ont à peu près le même cheminement : d'abord déroutés, ils se rattachent au mot "mathématiques" en faisant des opérations, mais très rapidement passent à des résolutions de problèmes où l'on cherche. Mais est-ce bien de la recherche ? Ils ne se privent pas d'ailleurs de poser plein de questions au maître afin de savoir si ce qu'ils font, c'est de la recherche.
Une fois cette étape passée (elle peut durer plus d'un mois), les enfants rentrent plus facilement en recherche. Diverses situations peuvent être proposées : situations semi-ouvertes à partir de documents, thèmes précis ou situations ouvertes liées à un contenu déjà étudié (par exemple : recherche sur les fractions) ou liées uniquement à la discipline (recherche en géométrie). Ce qui est le plus frappant, c'est l'endurance des enfants pendant ces activités à long terme. On peut l'expliquer par le fait que la recherche leur permet de donner libre cours à leur curiosité (qui n'est bien souvent contentée que très partiellement à l'école). Par l'exploitation de cette curiosité, la recherche amène les enfants à ressentir le besoin de bien structurer leur travail, de penser et d'agir avec rigueur. La communication à la classe des "trouvailles" est alors un moment très fort où tous les aspects de leur production vont être analysés, passés au peigne fin ; c'est la classe qui valide ou ne valide pas une recherche, c'est elle qui met en évidence les faiblesses, les qualités, les pistes à explorer. L'enseignant doit alors se forcer à n'intervenir qu'en tant qu'animateur.
J'ai pu remarquer qu'après trois mois de recherches le contrat didactique dans la classe se trouvait transformé : les élèves abordent les apprentissages avec plus de rigueur, d'endurance ; leur vision globale des problèmes est plus juste ; les entrées dans les résolutions sont plus rapides, plus efficaces ; leur esprit critique se développe et est toujours justifié ; la fonction structurante de l'écrit est fortement ressentie. On peut aussi parler d'une contamination des autres disciplines tant au niveau des contenus (les élèves se lancent parfois dans des recherches en physique) que des procédures et des savoir-faire disciplinaires (expression orale : techniques pour convaincre, expliquer, démontrer, contrer, ...; expression écrite : idem mais avec en plus un souci de rigueur dans la présentation, de mise en page liée à la communication des recherches au groupe).
Enfin, pour conclure, la recherche transforme aussi les pratiques du maître, lui ouvre l'esprit, lui montre que les élèves évoluent avec un minimum d'assistance, d'étayage, que c'est la démarche qui est essentielle et non pas seulement les contenus ou le programme. En perdant un peu de temps, on peut passer du stade où l'enfant agit parce qu'il est élève à celui où il agit parce qu'il a un projet, la possibilité d'aller au bout de sa curiosité parce qu'il sait qu'il peut chercher seul, agir seul, trouver seul avec un réel optimisme scolaire. Pour avoir la confiance des autres, il suffit de la leur donner ...

VIVRE UN ATELIER DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES

QUELQUES AUTRES SUJETS UTILISABLES POUR DES A.R.M.

Sujet n° 1 : Pavage de polyminos

Un polymino est un assemblage plan de carrés égaux (cases) tel que tout carré soit rattaché à la figure par au moins un de ses côtés.
Exemples de polyminos : les dominos, les triminos, les tétraminos, les pentaminos, …



Paver un polymino consiste à le recouvrir par des polyminos plus petits de telle sorte que toute case soit recouverte une fois et une seule.
Le problème général des conditions pour qu'on puisse paver un polymino par un type de polyminos donné n'est pas résolu à ce jour ; mais de nombreux cas particuliers peuvent être abordés :

- Pavage d'un polymino carré par des dominos.
- Pavage d'un polymino carré privé d'une case par des dominos.
- Les deux problèmes précédents pour des polyminos rectangulaires.
- Pavage d'un polymino carré par des triminos.
- …

Sujet n° 2 : Les pesées

On a un certain nombre de pièces en apparence toutes identiques. L'une d'elles est fausse (elle est plus légère ou plus lourde que les autres, on ne sait pas). On veut la retrouver en **un nombre minimum de pesées** à l'aide d'une balance à deux plateaux (une pesée indique si le contenu d'un des plateau est plus lourd, plus léger ou égal à celui de l'autre plateau).

Sujet n° 3 : 22, v'la le chef

On étudie le codage suivant :

On fait correspondre à chaque lettre le nombre correspondant à son rang dans l'alphabet, à chaque mot la somme de nombres codant ses lettres.

Exemples : CHEF est codé par 3 + 8 + 5 + 6 = 22

Le mot-nombre DIX-HUIT est codé par 4 + 9 + 24 + 8 + 21 + 9 + 20 = 95

A partir de cette situation, envisager des recherches mathématiques à effectuer…

Sujet n° 4 : 6174, 495 et Cie

Choisir un nombre de 4 chiffres ; par exemple: **7148.**

Ordonner les 4 chiffres du plus grand au plus petit ; sur l'exemple on obtient le nombre 8741.

Ordonner les 4 chiffres du plus petit au plus grand ; sur l'exemple on obtient le nombre 1478.

Calculer la différence des deux nombres ainsi obtenus :

8741 -1478 = **7263.**

Recommencer toutes les étapes en partant du résultat obtenu :

7148 → 8741
-1478
7263 → 7632
-2367
5265 → 6552
-2556
3996 → 9963
-3699
6264 → 6642
-2466
4176 →7641
-1467
6174 →7641
-1467
6174

Essayer avec d'autres nombres !

Arrive-t-on toujours à 6174? Au bout de combien d'opérations ?

Les résultats des différentes soustractions ont-ils d'autres particularités ?

Et si on fait la même chose avec des nombres de 3 chiffres, que se passe-t-il ?

……Vous pouvez continuer et vous poser d'autres questions pour les nombres de 2 chiffres, 5chiffres, ……

Sujet n° 5 : Kapla

Les planchettes Kapla ont pour dimensions 8 mm, 24 mm et 120 mm :

3 épaisseurs dans une largeur; 5 largeurs dans une longueur.

Quels problèmes mathématiques se poser à partir de ce matériel ?

Sujet n° 6 : Le jeu de la vie

Règles du jeu :

- Une case vide avec 3 voisins donne une naissance.

	X	**X**	
	X	**N**	

Si on part de la population ci-dessus(cases avec X), il y aura une naissance dans la case N.

- Un pion isolé, avec un seul voisin, 4 ou davantage, meurt...
- Un pion ayant 2 ou 3 voisins survit.

				X	**X**
X		**X**		**X**	**X**
		X		**X**	
	X	**X**	**X**		

Dans la population ci-dessus, les individus X vont mourir (certains d'isolement, d'autres d'étouffement), les individus X survivent et il va y avoir des naissances (A vous de les trouver!).

Pour jouer :

Vous placez vos pions dans un quadrillage pour former votre population initiale. Vous suivez ensuite chaque étape de son évolution.

A vous de trouver les populations initiales les plus aptes à la survie et au développement.

Sujet n° 7 : Etude du jeu "AIRJEU"

Matériel : - des baguettes de longueurs variées en nombre suffisant (au moins 4 exemplaires de chaque) ;

- un sablier ;

- du papier, des ciseaux, de la colle et du scotch.

Règle du jeu : (4 joueurs)

- On distribue à chaque joueur 4 à 8 baguettes (chaque joueur reçoit le même lot de baguettes) ; il est aussi possible de tirer au sort les baguettes qui seront utilisées.

- On retourne le sablier et chacun doit réaliser en utilisant toutes ses baguettes un polygone ayant la plus grande aire possible et le dessiner sur une feuille blanche.

- A l'issue de cette phase, on compare les figures obtenues, on les range de la plus grande à la plus petite aires et des points sont attribués à chaque joueur :

- 5 points pour la figure de plus grande aire ;

- 3 points pour la suivante ;

- 1 point pour l'avant-dernière figure ;

- rien pour la figure de plus petite aire.

Variantes :

- LA PLUS PETITE AIRE GAGNE avec la sous-variante :

Les joueurs piochent chacun 5 baguettes au hasard : cette fois, les polygones n'auront plus le même périmètre et le gagnant (figure de plus petite aire) ne sera pas toujours celui qui aura la plus petite longueur de baguette.

- LE PLUS PETIT PERIMETRE ...

Sujet n° 8 : Etude du jeu d'Oslo

Le but du jeu d'Oslo est d'**obtenir n'importe quel nombre entier naturel non nul**, en partant de **4**, à l'aide d'une **application successive des trois règles suivantes** :

1. Mettre un 0 à la fin du nombre (c'est-à-dire multiplier par 10);
2. Mettre un 4 à la fin du nombre (c'est-à-dire multiplier par 10 et ajouter 4);
3. Diviser par 2 si le nombre est pair.

Exemple: on obtient le nombre 30 avec la séquence d'utilisation des règles ci-dessous :

N°3 N°2 N°3 N°3 N°3 N°1 (la suite des nombres est : 4, 2, 24, 12, 6, 3, 30)

Variantes: - changer le nombre de départ (6 au lieu de 4 par exemple) ;

- prendre d'autres règles ;

- limiter le nombre d'applications successives autorisées pour une même règle ;

- …

Sujet n° 9 : Etude du jeu "PERIJEU"

Matériel : - des formes géométriques variées en nombre suffisant (au moins 4 exemplaires de chaque); on pourra utiliser des pièces d'un puzzle comme le tangram ou des pièces de la mallette "La moisson des formes"... ;

- un sablier ;

- une ficelle et/ou un instrument de mesure des longueurs.

Règle du jeu : (4 joueurs)

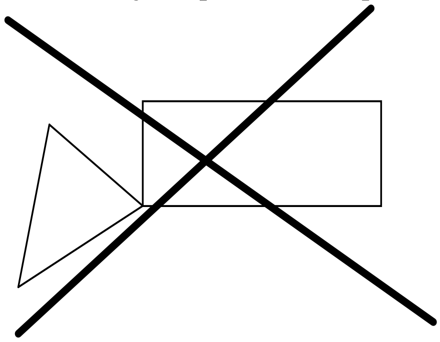
- Chacun pioche une forme géométrique.
- On distribue à chaque joueur un exemplaire des 4 pièces qui ont été piochées.
- On retourne le sablier et chacun doit réaliser en utilisant les 4 pièces une figure ayant le plus grand périmètre possible, avec les contraintes de juxtaposition des pièces ci-dessous, et en reproduire le contour sur une feuille blanche.

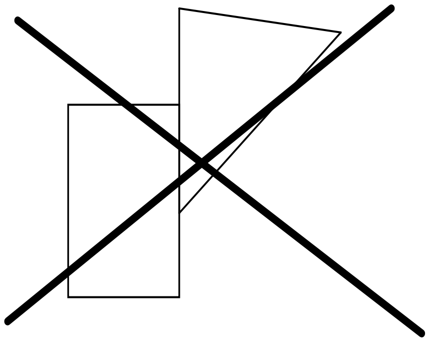
- A l'issue de cette phase, on compare les figures obtenues, on les range du plus grand au plus petit périmètre et des points sont attribués à chaque joueur :

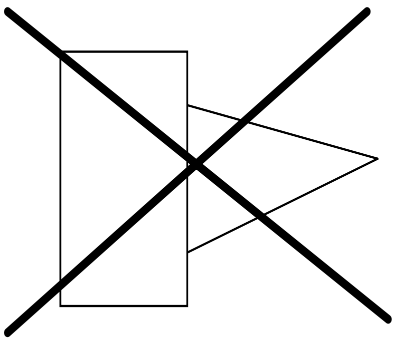
- 5 points pour la figure de plus grand périmètre ;
- 3 points pour la suivante ;
- 1 point pour l'avant-dernière figure ;
- rien pour la figure de plus petit périmètre.

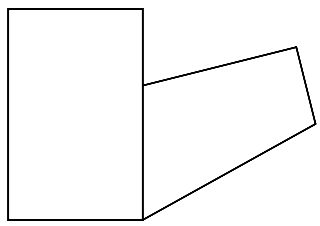
- <u>Variante :</u> on mesure les périmètres et le nombre de points attribués à chacun correspond à la mesure en mm du périmètre de sa figure.

<u>Contraintes de juxtaposition des pièces :</u>









2 pièces doivent avoir au moins
un sommet commun et deux côtés accolés

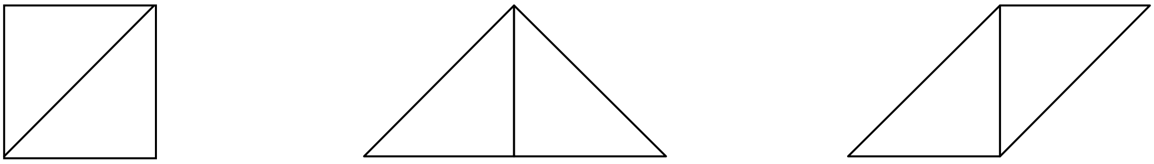
<u>Variante :</u>

- Avec des lots de 4 formes qui ne sont pas les mêmes pour chacun des joueurs ; cette fois, les figures n'auront plus la même aire et le gagnant (figure de plus grand périmètre) ne sera pas toujours celui qui aura les pièces ayant la plus grande aire.

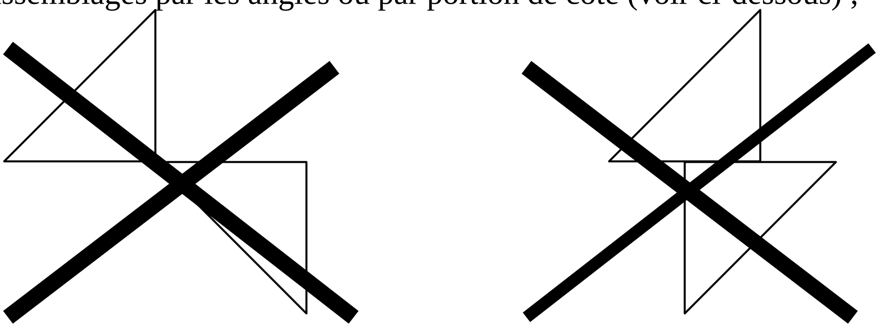
Sujet n° 10 : LES POLYVOILES

On réalise des assemblages de triangles rectangles isocèles identiques (des demi-carrés) par côtés entiers :

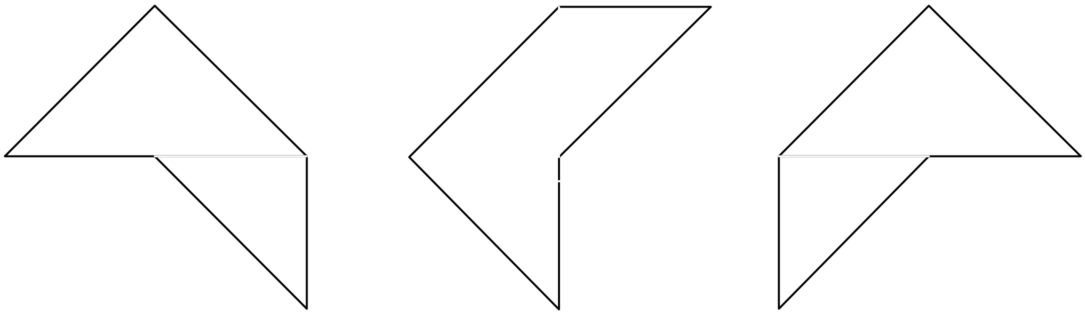
* un grand côté avec un grand côté ou un petit côté avec un petit côté (voir ci-dessous) ;



* pas d'assemblages par les angles ou par portion de côté (voir ci-dessous) ;

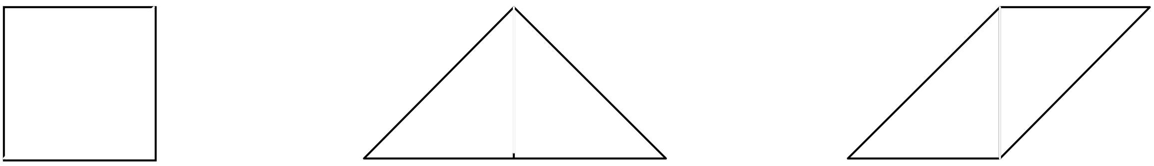


Deux pièces seront considérées comme identiques si l'une peut recouvrir l'autre, éventuellement après un retournement :



3 pièces identiques

On peut obtenir 3 pièces différentes en assemblant ainsi 2 triangles rectangles isocèles ; on les appelle des "bivoiles" :



Trouvez tous les assemblages différents de 3 triangles rectangles isocèles ("trivoiles"). Utilisez le papier quadrillé ci-joint pour dessiner les pièces trouvées!

On peut continuer la recherche avec les assemblages de 4 triangles rectangles isocèles ("tétravoiles") puis de 5 ("pentavoiles"), de 6 ("hexavoiles"), …

VOICI QUELQUES PISTES POUR POURSUIVRE, MAIS VOUS POUVEZ EN IMAGINER D'AUTRES :

Quelle est la trivoile de plus grand périmètre ?

Quelle est la trivoile de plus petit périmètre ?

Rangez les trivoiles par périmètres croissants ?

Même question pour les tétravoiles, les pentavoiles, ….

Assemblez les tétravoiles pour réaliser un "serpent" le plus long possible ! Puis un serpent qui se mord la queue…

En utilisant toutes les tétravoiles une seule fois et en les assemblant par côtés entiers, peut-on obtenir un rectangle ?

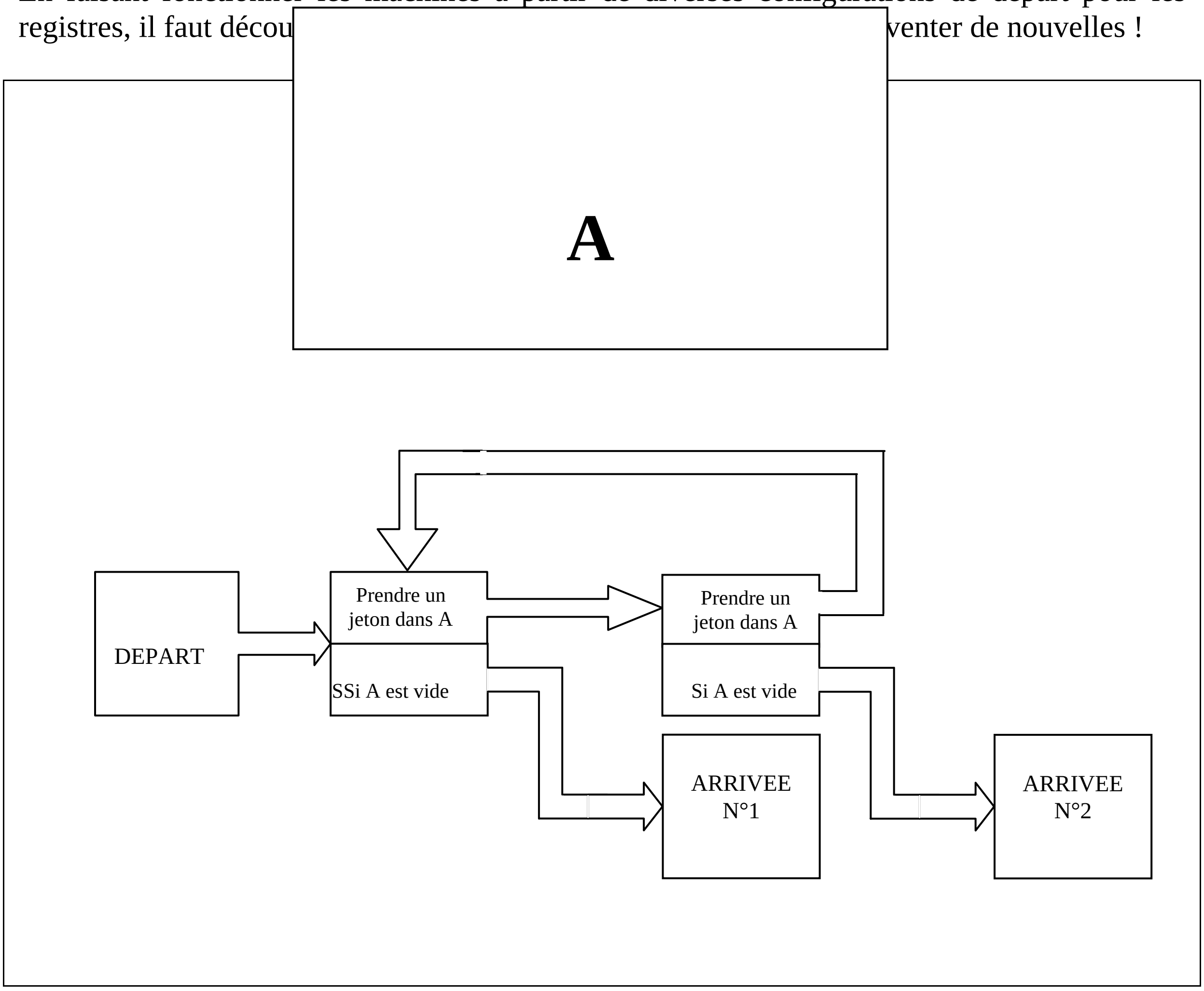
Et toutes les questions que vous aurez envie de vous poser au sujet de ces polyvoiles et des puzzles qu'elles peuvent permettre de réaliser !…

Sujet n° 11 : LES MACHINES A REGISTRES

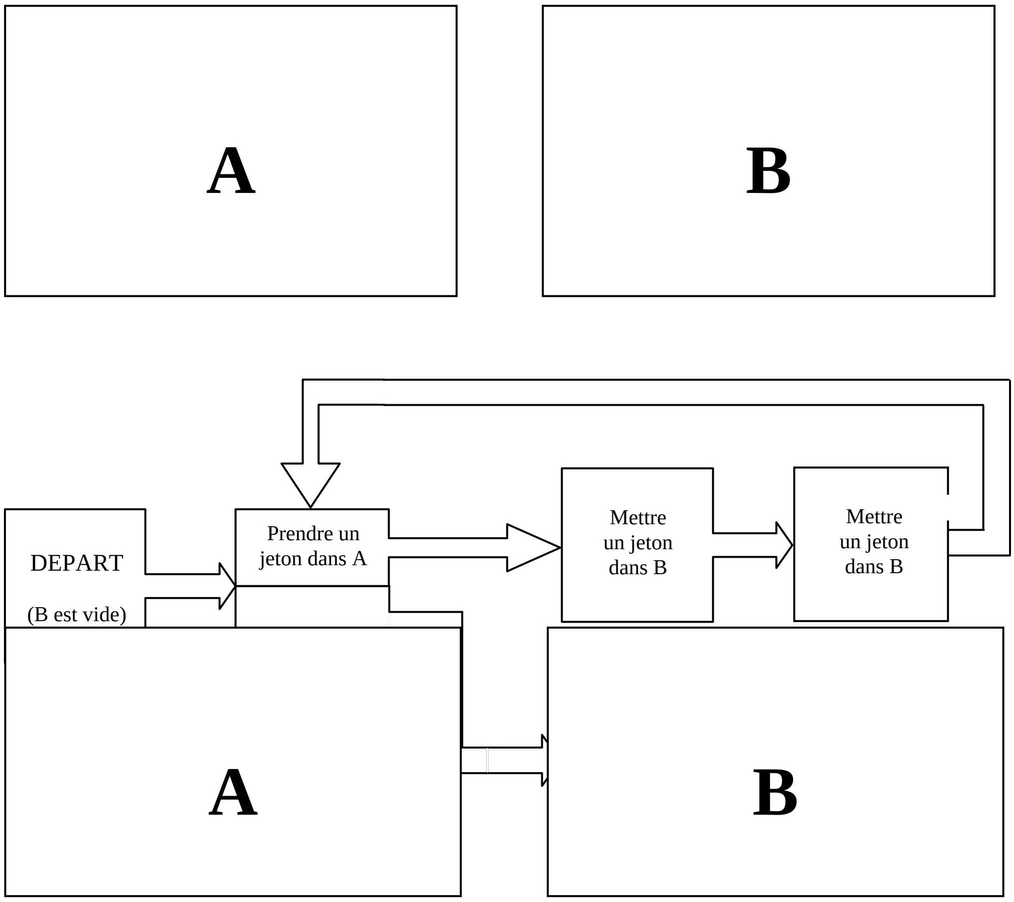
Trois machines sont proposées ; elles sont constituées de deux parties :

- des registres : ce sont les mémoires ; placer 8 jetons dans le registre A revient à mettre le nombre 8 dans la mémoire A ;
- une sorte de jeu de l'oie avec un départ et une arrivée, sur lequel se déplace un pion : faire fonctionner la machine, c'est, à partir d'une configuration donnée pour les registres, amener le pion de la case DEPART à la case ARRIVEE.

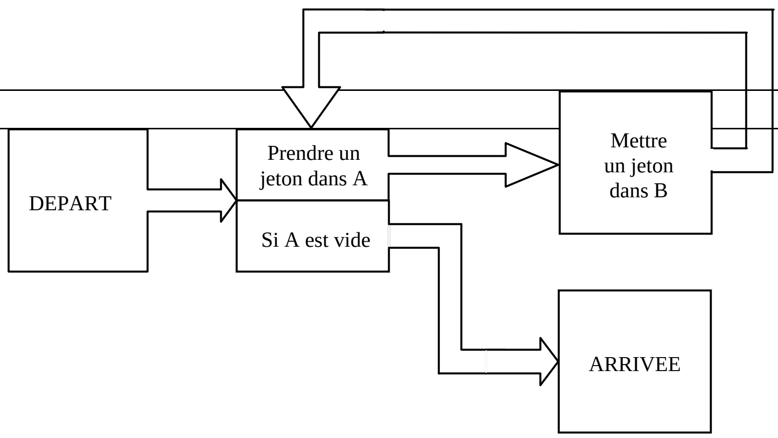
En faisant fonctionner les machines à partir de diverses configurations de départ pour les registres, il faut décou … venter de nouvelles !



Machine n°1



Machine n°2



Machine n°3