UNE ETUDE SUR LA TRANSMISSION ORALE D'INFORMATIONS EN MATHEMATIQUES

Jeannine KUBLER
Ecole Normale de Colmar

INTRODUCTION.

Que ce soit dans un travail de groupe ou avec leurs voisins, la façon dont les élèves entre eux décrivent ou analysent un problème mathématique est souvent très éloignée des exigences minimales d'une formulation précise ou correcte. Surtout lorsqu'il s'agit de situations géométriques, les élèves au moins jusqu'en quatrième, n'utilisent pas la terminologie enseignée. Cela paraît relever d'une tendance naturelle que l'on retrouve dans tous les échanges oraux libres. Mais cette tendance se retrouve lorsque les élèves doivent expliciter une solution trouvée, une explication lue ou entendue. Le langage mathématique(1) reste pour beaucoup un langage externe, inopérant, qu'il importe de traduire dans son propre langage pour le rendre compréhensible. Ce langage ne s'impose très souvent aux élèves que lorsque l'enseignant l'exige.

A quelles fonctions répond cette tendance de revenir au langage ordinaire dans une explication mathématique ? Dans la mesure où cette tendance s'accompagne d'une résistance quant à l'emploi du langage mathématique, cela peut traduire la façon propre dont les situations mathématiques sont appréhendées. Ainsi, par exemple, un élève de 6ème peut décrire une figure géométrique comme on décrit le plan d'une ville ou un itinéraire sur une carte et non pas en fonction de propriétés mathématiques données (rapport de D.E.A. – Strasbourg 1979-1980 «Sur la communication entre élèves»). De même, un élève peut décrire tout un algorithme de résolution en ne soulignant que les procédures qui lui sont familières et négliger les pas les plus importants. La façon dont un élève explique une situation mathématique peut ainsi traduire la façon dont il l'organise et donc ce qu'il maîtrise.

(1) J'appelle «langage mathématique» un type précis de discours qui présente, outre une interaction entre langue naturelle et écriture symbolique, certains choix syntaxiques et lexicaux relatifs au discours scientifique, comme le décrit Mme C. LABORDE dans sa thèse «Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique» (Grenoble 1983).

«petit x» n° 6 pp. 55 à 76. 1984

Il ne s'agit là que d'une approche très simple que Piaget avait déjà utilisée dans «le langage et la pensée chez l'enfant» (1928) : la manière dont les enfants racontent un récit ainsi que les particularités grammaticales de leur expression spontanée permettent de discerner la logique de l'enfant. En vue d'analyser le sens et les fonctions de ce recours souvent systématique au langage ordinaire pour expliquer des situations mathématiques, nous avons repris le schéma général des expériences faites par Mme J. Beaudichon dans la ligne des premiers travaux de Piaget (caractéristiques et efficacité de la communication entre enfants. J. Beaudichon). Il s'agit essentiellement d'expériences de transmission d'informations (récits, explication d'un phénomène ou d'un montage expérimental, etc...). L'intérêt de ces expériences est qu'elles permettent de voir **quelles sont les modifications que les enfants apportent à l'explication donnée par l'expérimentateur lorsqu'ils la transmettent à d'autres enfants.**

Ces modifications peuvent notamment porter sur :

— les informations données : sélection, omission, transformation ;
— les expressions employées : abandon ou introduction d'un langage technique.

Naturellement les modifications qui peuvent ainsi apparaître dépendent de la tâche demandée et aussi du type de situation à propos duquel des informations sont présentées. C'est pourquoi nous n'avons pas voulu nous limiter à un seul problème mais avons proposé une tâche de construction géométrique (construire un pentagone régulier) et une tâche de calcul d'aire. Nous avons préféré une construction à une démonstration parce qu'elle est plus accessible et plus contrôlable dans le cadre étroit d'une expérience (l'expérimentateur peut avoir un contrôle de ce qu'il veut dire par le dessin) et aussi parce que nous voulions nous adresser d'abord à des élèves de 5ème et de 4ème.

I – PRESENTATION DES EXPERIENCES.

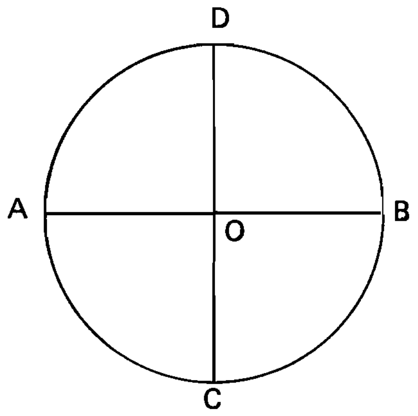
I.1 Les tâches mathématiques présentées.

I.1.1 La construction du pentagone régulier.

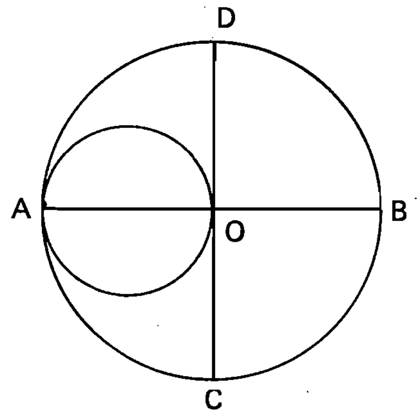
I.1.1.1 La construction elle-même et ce qui est donné aux élèves.

Nous avons demandé aux élèves de construire un pentagone régulier à la règle et au compas en leur donnant la liste des instructions à suivre dans un ordre déterminé qui reste le même pour chaque élève.

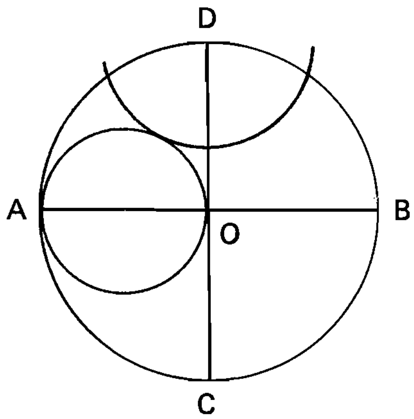
Voici les différentes étapes de cette construction :



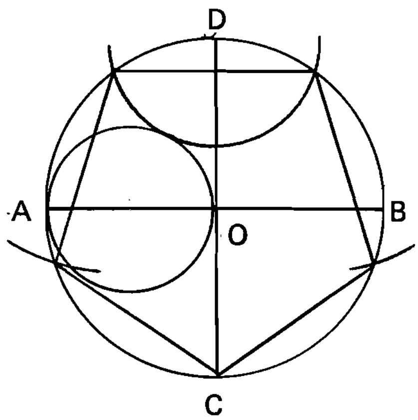
Etape 1



Etape 2



Etape 3



Etape 4

Pour cette tâche, nous avons donné les informations dans deux modalités différentes.

Dans la modalité que nous avons nommée «dictée», nous avons donné verbalement les instructions au futur émetteur qui exécute celles-ci immédiatement. Après chaque information, nous lui avons laissé le temps de l'exécuter, de poser des questions s'il ne la comprend pas.

Dans la modalité que nous avons nommée «montrée», nous avons montré au futur émetteur comment construire un pentagone sans dire un seul mot. Puis nous lui avons demandé de refaire la construction. S'il ne savait plus comment faire, nous lui avons montré l'action à exécuter.

L'introduction de ces deux modalités dans l'expérience essaye de répondre aux deux questions suivantes :

Dans quelle mesure les élèves de la modalité «dictée» vont-ils reprendre les formulations mathématiques du maître ?

Est-ce que les élèves recourent spontanément à une formulation mathématiques ?

Nous avons demandé comme test d'application au futur émetteur de refaire par cœur la construction du pentagone régulier. S'il y a réussi, nous lui avons demandé de transmettre cette construction au récepteur en lui disant : «tu dois dire à ton camarade comment on construit la figure que je t'ai donnée». Le récepteur exécute la figure pendant la transmission.

L'ordre de construction donné au futur émetteur est le même dans les deux modalités.

On a commis deux «hérésies» par rapport à la construction classique à la règle et au compas. La première concerne le milieu du segment AO. Quand on donne l'information «cercle de diamètre AO», on a donné aux élèves une règle graduée pour trouver le milieu. La seconde concerne le point de contact entre les deux cercles tangents. On pourrait obtenir facilement ce point en traçant le segment qui relie les centres de ces deux cercles. On ferait alors disparaître la notion de «tangent» et toutes les difficultés spécifiques à cette notion que peuvent avoir les élèves.

I.1.1.2 Analyse de la tâche à exécuter du point de vue des élèves émetteur et récepteur.

Dans ce paragraphe nous dégageons quelques activités que les émetteurs et les récepteurs doivent entreprendre pour pouvoir exécuter correctement la tâche proposée. Toutes ces activités sont subordonnées à des activités de compréhension qui se situent à différents niveaux. Rappelons que les élèves disposent d'une règle graduée, d'une équerre et d'un compas. Ces instruments vont amener les élèves à des activités géométriques variées :

Des activités de tracés. Elles sont les plus nombreuses vu la nature de la tâche. Les élèves doivent tracer des cercles de centre donné, de rayon donné, des segments, des droites perpendiculaires.

Des activités de dénomination. L'expérimentateur a désigné certains points par une lettre. Les émetteurs sont libres de nommer ces points par une lettre (ce qui facilite la compréhension), d'en nommer d'autres ou de ne pas nommer les points par une lettre.

Des activités de repérage. Cette tâche de construction privilégie de telles activités liées aux activités de tracés. Les élèves doivent repérer des centres de cercles, des points d'intersection de courbes, le milieu d'un segment, le point de contact de deux cercles tangents (ici apparaît le statut de la notion de «tangent» chez les élèves). L'expérimentateur n'a pas mentionné la droite passant par les centres des deux cercles.

Des activités de mesure et de calcul. Il s'agit de mesurer la longueur du segment AO à l'aide de la règle graduée et de diviser ce nombre par deux. On aurait pu éviter ces activités en donnant aux élèves des règles non graduées et en leur indiquant la construction du milieu d'un segment à l'aide d'un compas, mais alors la construction aurait été plus longue à communiquer.

Des activités de contrôle. Certaines informations permettent au récepteur d'avoir un aperçu de la figure à construire. Elles peuvent provoquer des retours en arrière, des vérifications, des rectifications éventuelles quand le recepteur s'aperçoit que la figure ne correspond plus au dire de l'émetteur. On distingue d'une part une activité de contrôle local sur des aspects particuliers de la figure qui apparaît souvent suite à des activités de repérage, d'autre part une activité de contrôle global sur la figure à obtenir suite à une dénomination de celle-ci (par exemple, les informations : «tu obtiens un pentagone», «une figure à cinq côtés égaux», etc...). Certaines de ces informations nécessitent une connaissance de termes techniques, d'autres non et amènent le récepteur à avoir une activité de contrôle plus ou moins efficace.

I.1.2 Le calcul de l'aire du triangle ABC.

I.1.2.1 Le calcul lui-même et ce qui est donné aux élèves.

On demande à l'élève de calculer l'aire du triangle ABC connaissant la longueur des segments OA′, OB′, OC′, AA′, BB′, CC′. On a deux cas de figures :

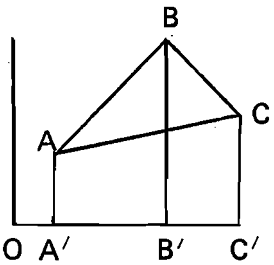


figure n°1

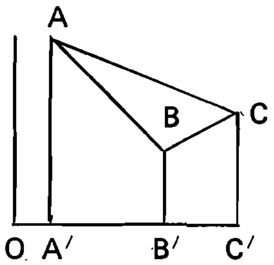


figure n°2

En général, l'expérimentateur, explique le calcul de l'aire du triangle ABC pour la figure numéro 1. Comme test, on demande au futur émetteur de calculer l'aire du triangle ABC pour la figure numéro 2. Le futur émetteur devient émetteur quand il réussit à effectuer le calcul correct avec la méthode indiquée.

Dans la transmission de la tâche entre l'émetteur et le récepteur on demande à l'émetteur de transmettre la figure géométrique de son choix ainsi que les explications relatives à l'exécution de la tâche. L'émetteur et le récepteur disposent d'une feuille de papier où ils peuvent noter ce qu'ils veulent. L'émetteur ne peut évidemment pas passer sa feuille au récepteur et vice-versa. Comme test d'application, nous avons demandé au récepteur de calculer l'aire du triangle ABC pour la figure qui ne lui a pas été transmise.

I.1.2.2 Analyse de la tâche à effectuer du point de vue des élèves émetteur et récepteur.

La transmission de la tâche du calcul de l'aire du triangle ABC comprend deux parties :

— l'émetteur doit transmettre une figure qui accompagne l'énoncé,

— l'émetteur doit transmettre l'énoncé et les explications nécessaires pour résoudre la question posée.

Ainsi une partie des activités sollicitées se réfère à une construction de figure géométrique alors que l'autre partie se réfère à des explications et des calculs. Toutes ces activités sont subordonnées à des activités de compréhension de différents niveaux (compréhension du problème, de la notion d'aire et de son additivité, d'une formule et de sa mémorisation, capacité à généraliser le cas particulier, etc...).

Nous distinguons ainsi :

Des activités de tracés pour construire la figure. Les élèves doivent tracer des segments, des droites, des perpendiculaires à l'aide d'une règle graduée et d'une équerre.

Des activités de dénomination qui consistent à nommer des points, les différents polygones de la figure, des segments, des bases et des hauteurs.

Des activités de repérage. Les élèves doivent repérer des segments, des trapèzes (nous avons remarqué une difficulté de repérage des trapèzes pour la figure numéro 1 due à l'intersection des segments AC et BB' qui n'existe pas dans la figure numéro 2), des projections (selon la construction de la figure les élèves projettent orthogonalement le triangle ABC ou indiquent d'abord les projections A', B', C', puis les relèvent. Dans les deux cas, ils utilisent la notion de projection orthogonale), des bases et des hauteurs. Les bases sont «verticales» et les hauteurs «horizontales», les élèves ont l'habitude du contraire. Ceci les incite à confondre les mots «bases» et «hauteur» qui interviennent dans l'utilisation de la formule de calcul de l'aire d'un trapèze.

Des activités de mesure. La plupart des élèves construisent la figure à partir des mesures des segments OA', OB', OC' qu'ils se donnent. D'autres construisent d'abord la figure puis mesurent la longueur des segments OA', OB', OC'. D'autres encore construisent la figure sans utiliser de mesures. Ils ne tiennent pas compte des valeurs numériques.

Des activités de calcul. On peut les situer à différents niveaux :

— l'identification des différentes variables de la formule de l'aire d'un trapèze,

— des applications numériques de cette formule,

— des calculs numériques relatifs à l'additivité des aires.

Des activités de contrôle. Elles s'expriment surtout par la comparaison de résultats numériques, peuvent provoquer des retours en arrière suivis de vérifications ou de rectifications.

Une différence apparaît entre les deux tâches. Dans le calcul d'aire l'exécution de la tâche fait appel à des algorithmes de calcul et des procédures que l'élève connaît. La nature de cette tâche est très différente de celle de la construction du pentagone où l'élève applique une suite d'instructions sans savoir pourquoi celles-ci conduisent à la construction désirée. Par contre dans la tâche du calcul d'aire, l'élève peut arriver à comprendre pourquoi cette méthode donne le résultat désiré.

I.2 Organisation de l'expérience.

L'expérience se déroule en plusieurs temps :

Phase 1 : l'expérimentateur donne toutes les explications nécessaires au futur émetteur. Les mêmes points d'informations sont donnés à tous les élèves. L'expérimentateur (un professeur de mathématique) adopte le rythme de l'élève.

Phase 2 : quand l'expérimentateur a fini ses explications et que le futur émetteur n'a plus de questions à poser, il donne un test. Si le futur émetteur réussit, il devient émetteur. Tous les élèves sont devenus émetteurs.

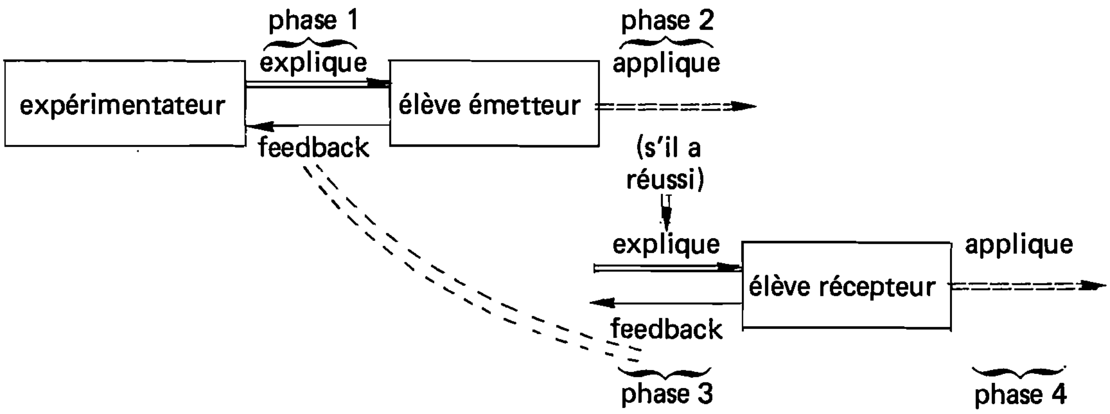
Phase 3 : l'émetteur doit transmettre toutes les explications nécessaires à l'exécution de la tâche demandée au récepteur. Celui-ci peut poser toutes les questions qu'il désire à l'émetteur.

Phase 4 : quand les interlocuteurs estiment avoir fini, nous faisons passer un test d'application au récepteur.

Pour les deux tâches, on a choisi 18 couples émetteur-récepteur au hasard répartis dans cinq classes de 4ème et 18 couples émetteur-récepteur au hasard répartis dans cinq classes de 5ème (CES de Ferney-Voltaire - mai, juin 1980). A chaque couple émetteur-récepteur, nous avons donné les deux tâches à exécuter. L'émetteur reste émetteur dans les deux tâches.

I.3 Analyse de la situation.

On a le schéma suivant :



Dans l'échange expérimentateur-élève, les deux interlocuteurs sont côte à côte. C'est la situation de communication la plus favorable.

Dans l'échange émetteur-récepteur, les deux élèves sont dos à dos. La communication reste purement verbale. On force l'émetteur à s'exprimer dans un langage plus élaboré que dans une situation côte à côte car le recours au gestuel n'est plus possible.

Dans nos expériences, on s'est intéressé essentiellement à ce qui se passe à la phase 3. On peut aussi remonter de l'explication constituant la phase 3 pour examiner comment ont été reçues les explications de la phase 1. On peut également remonter de l'application constituant la phase 4 pour examiner comment ont été reçues les explications de la phase 3. Le problème est évidemment de savoir ce qui se passe entre la production de l'expérimentateur et celle de l'élève émetteur (en position d'émetteur) ou entre la production de l'élève émetteur et celle de l'élève récepteur. On peut supposer qu'elle recquiert une certaine compréhension mais une telle compréhension ne se fait pas sans un minimum soit de mémorisation, soit d'apprentissage, soit de traitement de l'information. On ne veut pas entrer ici dans la description des processus internes mais s'en tenir à la comparaison entre les deux productions pour y chercher d'éventuels indices sur ces processus. Cette situation ne nous renseigne pas sur ce que le sujet a appris mais sur la manière dont il traite l'information.

II – ANALYSE DES RESULTATS.

II.1 La construction du pentagone régulier.

II.1.1 Les informations échangées entre l'émetteur et le récepteur.

On analyse les informations échangées entre l'émetteur et le récepteur pendant la transmission. Pour cela on a procédé à une décomposition de la tâche mathématique en opérations élémentaires pour examiner dans quelle mesure les informations transmises ou demandées prenaient en compte les exigences d'une bonne exécution de la tâche. Ici, nous avons suivi l'ordre logique des différentes étapes de la construction.

Cependant, chaque instruction échangée peut se formuler soit en recourant au langage mathématique («trace deux diamètres perpendiculaires»), soit en se contentant du langage usuel («trace une ligne horizontale et une ligne verticale»). Dans l'élaboration de la grille d'analyse de l'information, on a tenu compte de cette différence possible de formulation. L'expérimentateur dans ses explications, n'a utilisé que la formulation mathématique. Ainsi, à chaque instruction peuvent s'attacher une ou plusieurs unités selon les différentes formulations possibles.

Voici p. 64 un tableau de quelques unités d'informations significatives retenues, avec les résultats. Chacune d'elles sollicite souvent plusieurs activités chez l'élève émetteur ou récepteur.

Une différence importante apparaît entre les deux modalités dans la manière d'exprimer les informations.

Les émetteurs de la modalité «dictée» emploient les termes «diamètre», «tangent», «arc de cercle», etc... mais les doublent presque toujours par des termes plus familiers : «droite qui passe par le milieu», «qui frôle», «petit trait», etc...

Les émetteurs de la modalité «montrée» recourent plutôt au langage usuel et n'utilisent guère de termes mathématiques, sauf quelques uns en 4ème.

Une évolution importante apparaît entre la 5ème et la 4ème. Elle se manifeste en particulier sur deux points importants :

— on observe une intégration progessive de formulations mathématiques entre la classe de 5ème et la classe de 4ème ;

— on observe également la mise en œuvre d'informations de contrôle efficace en 4ème dans la modalité «dictée». Cette mise en œuvre explique la réussite des élèves de 4ème dans cette modalité. Elle apparaît peu chez les élèves de 4ème, modalité «montrée» et n'est guère opérante en 5ème.

		modalité dictée	modalité montrée	les deux modalités	modalité dictée	modalité montrée	les deux modalités
X	diamètre	9	5	14	6	2	8
X	mention perpendiculaire	8	3	11	6	1	7
	droite, ligne	0	4	4	3	4	7
	mention qui passe par O	2	6	8	4	5	9
X	cercle de diamètre AO	9	4	13	7	0	7
	autre désignation : qui passe par A et O	1	8	9	4	8	12
X	cercle de centre C	8	4	12	8	2	10
X	tangent au cercle...	7	1	8	8	0	8
	synonyme de tangent	5	9	14	7	9	16
X	arc de cercle (E, EF)	2	1	3	7	0	7
X	qui coupe le cercle (O) en 2 points	7	3	10	6	1	7
	autre désignation pour arc de cercle (E, EF)	4	8	12	4	8	12
	qui fait un «trait» sur le cercle	4	7	11	3	8	11
X	joindre E au point tracé par F...	5	3	8	3	3	6
	joindre E au «trait» tracé par F...	4	4	8	5	3	8
	pentagone	3	3	6	4	2	6
	figure à 5 côtés	0	4	4	4	2	6
	figure à 5 côtés égaux	1	1	2	1	0	1
X	pentagone régulier	7	1	8	2	0	2
		4ème			5ème		

Dans ce tableau nous avons relevé le nombre de couples émetteur récepteur où l'information correspondante est apparue pendant la transmission.

Nous avons mis une croix à côté des informations données par l'expérimentateur dans la modalité «dictée» et séparé les différents groupes d'information relatifs aux différentes étapes de la construction.

Dans chaque groupe d'information apparaît une formulation dans le langage mathématique et une formulation dans le langage usuel de la même information.

Un tableau plus complet des différentes informations se trouve en annexe.

II.1.2 Le vocabulaire géométrique des élèves.

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques termes employés par les élèves pendant la transmission de la tâche.

Le mot «point». Ce mot, très connu des élèves est utilisé facilement pour des désignations : «nomme ce point, A». Mais quand il s'agit d'exprimer le point d'intersection de deux courbes, le mot «point» n'apparaît plus spontanément chez les élèves, surtout en 5ème. Il est remplacé par des expressions comme «coupure», «qui fait un trait», «dans le croisement...», «qui coupe le cercle en deux endroits», «petit bout», «marque», etc... Le point est alors perçu comme un «endroit», avec une certaine épaisseur. Toutes ces expressions ambiguës et imprécises conduisent le récepteur à choisir une interprétation possible qui, souvent, n'est pas la même que celle de l'émetteur. Il semble y avoir une antériorité de la droite par rapport au point : on trace d'abord une droite sur laquelle on place des points. La notion de droite déterminée par deux points ne fonctionne guère chez les élèves de cet âge.

Le mot «segment». Les élèves n'utilisent pas spontanément ce mot. Ils le remplacent par les mots «trait», «ligne», «droite», «une droite qui va de... à...». La notion de segment est souvent confondue avec celle de droite, la droite étant perçue par ces élèves comme limitée dans l'espace.

Le mot «cercle». Presque tous les élèves de 4ème emploient ce mot alors qu'encore un quart des élèves de 5ème disent «rond». Beaucoup d'élèves disent «milieu» au lieu de «centre» du cercle.

Le mot «diamètre». Les élèves, bien qu'ils comprennent ce mot, ne l'utilisent guère spontanément, surtout en 5ème. Ils préfèrent recourir aux expressions redondantes du langage usuel : ils disent «ligne», «droite», «trait», etc... puis complètent leur information par la mention «qui passe par O», «qui traverse tout le cercle», «qui passe par le milieu», etc... Certains élèves emploient aussi le mot «diagonale» à la place de«diamètre».

Le mot «perpendiculaire». On observe une intégration de ce mot chez les élèves de 4ème alors que les élèves de 5ème recourent encore aux expressions «horizontale», «verticale» et autres. Certains disent comment tracer une perpendiculaire à l'aide d'une équerre.

Le mot «arc de cercle». Ce mot n'est pratiquement pas employé par les élèves qui lui préfèrent les expressions «qui fait un trait», «demi-cercle», «fais une marque avec ton compas», etc...

A travers l'étude de ces quelques mots, se dégagent certaines caractéristiques du langage que parlent les élèves en géométrie. Celles-ci reposent sur une forte redondance de ce langage, plein d'imprécisions et d'ambiguïtés qui se corrigent par après : on annonce d'abord vaguement ce qu'on trace, puis on précise comment il faut tracer, où il faut tracer. Elles s'opposent ainsi à la précision, la concision et la faible redondance du langage mathématique.

II.2 Le calcul de l'aire du triangle ABC.

La consigne donnée à l'émetteur invite celui-ci à transmettre d'abord la figure géométrique avant de donner l'énoncé et les explications relatives à la méthode de calcul utilisée. Nous avons uniquement étudié les informations échangées lors de la transmission de l'énoncé du problème et des explications relatives à la méthode de calcul employée.

Tout comme pour la construction du pentagone, on a découpé les explications relatives à la méthode de calcul en unités d'information qui peuvent être soit des explications, soit des calculs à effectuer, soit des démonstrations à donner, soit des ordres de calcul à exécuter, etc...

Ce point de vue permet de relever le décalage entre les informations données par le maître et celles transmises par l'émetteur. Le maître a évidemment donné toutes les explications nécessaires pour effectuer le calcul de l'aire du triangle.

II.2.1. Les unités d'information transmises.

Voici p.   un tableau des principales unités retenues avec les résultats.

Quand on analyse le nombre d'informations transmises (Weber 1982) on constate que la moitié des informations que transmettent les émetteurs proviennent du maître. Celles-ci portent essentiellement sur des désignations et des démonstrations.

L'autre moitié des informations que transmettent les émetteurs sont soit des modifications des informations du maître, soit des informations que les élèves rajoutent. Ces modifications se réduisent à effectuer des applications aux exemples de la formule de l'aire d'un trapèze et de la formule de l'additivité des aires. Les

	R	E	E + R	R	E	R + E
Justification de la méthode (M)	1	0	1	1	0	1
nomme le trapèze AA′B′B (M)	8	8	16	6	9	15
indique l'opération T1 + T2 - T3 (M)	4	3	7	6	4	10
mesures de OA′, OB′, OC′, AA′, BB′, CC′	7	8	15	7	8	15
formule mathématique du trapèze (M)	3	6	9	5	4	9
paraphrase de la formule mathématique du trapèze	6	6	12	2	6	8
explication de ce que sont les bases d'un trapèze (M)	4	1	5	2	1	3
ordre d'exécution du calcul de l'aire du trapèze AA′B′B	5	6	11	3	7	10
dis de calculer l'aire du trapèze AA′B′B	3	2	5	2	1	3
ordre d'addition et de soustraction des différentes aires	6	5	11	5	1	6
calcul numérique de l'aire du trapèze AA′B′B	5	1	6	2	2	4
donne le résultat numérique : l'aire du triangle ABC	3	2	5	3	0	3
	4ème			5ème		

	4ème	5ème
nombre de récepteurs qui ont réussi le test d'application	9	7
nombre de couples émetteur-récepteur par classe	18	18

R : nombre de couples émetteur-récepteur où l'information est apparue et où le récepteur a réussi au test d'application.
E : nombre de couples émetteur-récepteur où l'information est apparue et où le récepteur a échoué au test d'application.
(M) : information donnée par l'expérimentateur à l'émetteur lors de la première transmission expérimentateur-émetteur.

Remarques :

«Indique T1 + T2 - T3 »: ce sont les informations relatives à l'additivité des trois aires des trapèzes AA′B′B, BB′C′C, AA′C′C pour obtenir l'aire du triangle ABC.

Un tableau plus détaillé des unités d'information retenues se trouve en annexe.

émetteurs les transmettent le plus souvent sous forme d'ordre de calcul à effectuer.

Les émetteurs transmettent massivement les valeurs numériques qui représentent l'élément le plus «concret», ce sur quoi ils opèrent. L'expérimentateur donne ces valeurs numériques uniquement après les explications de la méthode utilisée, pour le test d'application donné au futur émetteur. Les émetteurs rajoutent les calculs numériques de deux manières :

— soit ils donnent l'ordre au récepteur d'effectuer les calculs numériques et attendent que ceux-ci le fassent avant de continuer,

— soit ils effectuent eux mêmes les calculs, ce qui est plus rare.

Par ailleurs, les émetteurs omettent de transmettre les explications relatives à la justification de la méthode employée, à la signification des mots «base» et «hauteur».

II.2.2 Les deux manières possibles de transmettre l'information sur ce problème.

Pour transmettre correctement la méthode de calcul de l'aire du triangle ABC et avoir une communication efficace, toutes ces informations ne sont pas nécessaires mais seulement une partie d'entre elles. On peut distinguer deux manières de transmettre l'information. L'une met l'accent sur ce que nous appelons la «procédure» et l'autre met l'accent sur ce que nous appelons «la réduction algorithmique».

La **«procédure»** est donnée par le maître et indique la méthode à suivre.

La **«réduction algorithmique»** est l'application de la procédure. Elle donne la suite des calculs ou des ordres de calculs à exécuter dans un cas de figure précis pour arriver au résultat demandé. Elle n'est pas donnée par le maître mais apparaît suite à un traitement de l'information effectué par l'émetteur.

Remarques :

D'une part, la transmission de la formule de calcul de l'aire d'un trapèze ne fait pas vraiment partie de la procédure. De même les calculs annexes pour trouver les différentes hauteurs ne font pas vraiment partie de la «réduction algorithmique». Ils peuvent indiquer une sensibilisation de l'émetteur pour pallier un manque éventuel de connaissance chez le récepteur.

D'autre part, on ne peut vraiment parler d'informations minimales à transmettre, la transmission d'informations minimales dépend des connaissances spécifiques du récepteur et varient considérablement d'un élève à un autre.

	réussite	échec	réussite	échec
nombre d'émetteurs qui donnent uniquement la procédure	3	1	2	1
nombre d'émetteurs qui donnent uniquement la réduction algorithmique	2	1	0	1
nombre d'émetteurs qui donnent intégralement les deux manières	1	1	4	0
nombre d'émetteurs qui donnent un élange des deux manières	3	5	2	6
nombre d'émetteurs qui ne donnent pas d'explications	0	1	0	2
	4ème		5ème	

Réussite : ce sont les couples émetteur-récepteur où le récepteur a réussit le test d'application.

Echec : ce sont les couples émetteur-récepteur où le récepteur a échoué au test d'application.

Ainsi, il apparaît sur le tableau ci-dessus qu'environ deux émetteurs sur trois recourent à la procédure et à la réduction algorithmique. Et au total, la réduction algorithmique est privilégiée par rapport à la procédure. 15 émetteurs sur 18 en 4ème et 13 émetteurs sur 18 en 5ème donnent la «réduction algorithmique» ou une partie de celle-ci. On voit ainsi apparaître un traitement de l'information qui va dans le sens d'une modification de l'information en une information directement opérationnelle.

Mais la réussite ne semble pas liée à une manière spécifique de transmettre l'information. On remarque cependant que la transmission intégrale des deux manières (il y a doublage complet des informations) permet au récepteur de réussir à calculer l'aire du triangle ABC dans le test d'application. Par ailleurs, quand l'émetteur n'a donné aucune explication, il y a eu échec.

II.3 Comparaison des résultats aux deux tâches.

La différence de nature entre ces deux tâches influe sur la communication et peut expliquer certaines différences.

Ainsi, voici les résultats au test d'application du récepteur dans les deux tâches :

	réussite	échec	réussite	échec
pentagone régulier	13	5	11	7
calcul de l'aire du triangle ABC	9	9	7	11
	4ème		5ème	

Bien qu'une comparaison des réussites au test d'application du récepteur dans les deux tâches soit peu possible, la tâche de transmission du pentagone régulier semble être mieux réussie. Cette réussite peut s'expliquer par le type de situation présentée qui permet la mise en œuvre d'informations de contrôle efficaces pour la transmission dans cette tâche. Ainsi les émetteurs, surtout en 4ème, ont donné l'information «figure à 5 côtés égaux» ou «pentagone régulier», ce qui a conduit les récepteurs à faire des retours en arrière, à rectifier les erreurs dans la construction en demandant un supplément d'informations. Dans la tâche de calcul de l'aire du triangle, seul la comparaison des résultats numériques a conduit à une activité de contrôle (il y en a eu nettement moins).

III – QUELQUES CARACTERISTIQUES COMMUNES DE LA COMMUNICATION DANS LES DEUX SITUATIONS MATHEMATIQUES PRESENTEES.

Pour avoir une communication efficace, l'émetteur et le récepteur doivent manifester une certaine interaction par des questions-réponses, des interventions qui font appel à la fonction phasique (tout ce qui sert à établir, maintenir ou couper le contact pendant la communication). On obtient ainsi un véritable dialogue et non pas un monologue de l'émetteur.

III.1 Le volume d'informations échangées entre l'émetteur et le récepteur.

Dans les deux tâches, environ la moitié des information échangées proviennent de l'expérimentateur. En moyenne, un tiers, pour la transmission du pentagone régulier (un quart, pour la transmission du calcul de l'aire du triangle), des informations sont apparues suite à une demande du récepteur. Parmi toute l'information échangée, 40%, pour la transmission du pentagone régulier (un tiers, pour la transmission du calcul de l'aire du triangle), de cette information est constituée de répétitions, autant spontanément que sur demande.

II.2 Modification des informations de l'émetteur suite à une question du récepteur.

III.2.1 Dans la tâche de construction du pentagone régulier.

Certaines informations apparaissent au cours de la transmission suite à une demande du récepteur. Cette demande peut conduire l'émetteur à :

1) Donner des précisions.

Les interventions du récepteur obligent l'émetteur à être plus précis dans ses formulations. Le récepteur demande très souvent comment sont situés les segments AB et CD, où mettre la pointe du compas, quels points relier, etc... Ainsi, par exemple, suite à une question du récepteur, quelques émetteurs ont donné l'information «qui coupe le cercle de centre O en deux points». En 5ème, les récepteurs demandent la position exacte des points A, B, C, D, E, F par rapport à leur feuille, ce qui n'est pas le cas en 4ème.

2) Nommer des points par une lettre.

Le point d'intersection de l'arc de cercle de centre E, de rayon EF avec le cercle de centre O n'a pas été désigné par une lettre lors de la transmission expérimentateur-émetteur. Certains récepteurs ont demandé le nom de ce point, ce qui a conduit les émetteurs à le désigner par une lettre X. Par la suite, la transmission en fut facilitée car les segments à joindre on pu être nommés sans difficulté. Il en fut de même pour l'autre point d'intersection.

3) Donner des explications.

L'émetteur emploie quelquefois des expressions telles «milieu de AO...», «cercle... tangent», «arc de cercle...», etc... Mais suite à une question du récepteur, il redonne une autre formulation en décomposant l'instruction initiale en une suite d'instructions formulées dans le langage usuel. Ainsi, sur 14 émetteurs en 4ème (15 en 5ème) qui ont donné une expression synonyme de tangent, 10 (11 en 5ème) l'ont fait suite à une demande du récepteur. Par là, ils ont exprimé ce qu'ils entendaient par «tangent».

4) Utiliser un vocabulaire précis.

Seul un émetteur de 5ème a utilisé le mot «tangent» suite à une demande du récepteur. Quelques émetteurs emploient l'expression «arc de cercle» ou «joindre E et F par un segment» afin d'être plus précis à cause d'une question du récepteur, mais ils sont rares.

III.2.2 Dans la tâche de calcul de l'aire du triangle ABC.

Tout comme pour la construction du pentagone régulier, certaines questions du récepteur amènent l'émetteur à :

1) Apporter des précisions.

Ces précisions portent notamment sur les formules à utiliser : formule de l'aire d'un trapèze, formule de l'additivité des aires, le calcul de A'B', etc... Par ailleurs, les récepteurs demandent à l'émetteur les valeurs numériques des segments OA', OB', OC', AA', BB', CC'.

2) Effectuer des calculs numériques.

Certains émetteurs, suite à une question du récepteur, sont amenés à calculer l'aire des trois trapèzes, puis l'aire du triangle ABC. Les récepteurs demandent à comparer les résultats numériques.

3) Donner des explications.

Plus de la moitié des explications relatives aux mots «bases» et «hauteur» font suite à une demande du récepteur.

4) Exprimer d'une autre manière la formule de l'aire d'un trapèze.

Ainsi, lorsque l'émetteur a donné spontanément la formule de l'aire d'un trapèze, il reformule autrement sous forme de paraphrase ou d'ordre de calcul à exécuter ($\frac{A'B' \times (AA' + BB')}{2}$). Il en est de même lorsque l'émetteur a donné la formule sous forme de paraphrase ou d'ordre de calcul à exécuter (pour ce dernier c'est plus rare).

5) Justification de la méthode employée.

Seul deux récepteurs voulaient savoir pourquoi on n'employait pas directement la formule de calcul de l'aire du triangle. Dans ce cas, les émetteurs le leur ont précisé. Sinon, jamais un émetteur a éprouvé le besoin de justifier la méthode employée.

Ainsi dans les deux tâches, les feed-backs du récepteur modifient les informations de l'émetteur qui soit apporte surtout des précisions indispensables pour comprendre ou exécuter l'instruction, soit reformule autrement l'information initiale.

Par ailleurs, la tâche de construction du pentagone régulier amène le récepteur à faire des anticipations sur les actes à exécuter. Cette activité d'anticipation n'est pas négligeable et apparaît surtout dans la modalité «montrée». On ne retrouve guère une telle activité d'anticipation dans la tâche de calcul de l'aire du triangle ABC. Ces anticipations se rapportent à des actions physiques à exécuter : le récepteur essaie d'imaginer la figure qu'il doit construire.

CONCLUSION.

Dans la transmission des informations, les omissions, les modifications et les restitutions ne se distribuent pas au hasard mais se rapportent à des aspects bien spécifiques du message transmis. Ainsi presque tous les émetteurs omettent les explications de l'expérimentateur relatives à la justification de la méthode employée et, à un degré moindre, la signification des termes «bases» et «hauteur» ; c'est-à-dire est omis tout ce qui ne semble pas immédiatement utile pour exécuter la tâche précise qui est demandée.

Les dénominations sont restituées sans modifications : les émetteurs explicitent les objets géométriques qu'ils utilisent. Toutes ces informations servent de repère aux élèves et une modification des dénominations ne présente aucun intérêt.

Les informations modifiées concernent la procédure employée pour calculer l'aire du triangle ABC et certaines formulations mathématiques concises de l'expérimentateur. Les modifications se font dans le sens d'une décomposition de l'information initiale en une suite d'instructions directement exécutable.

Cette décomposition de l'information montre que l'appréhension des deux situations mathématiques est intermédiaire entre un traitement des figures dessinées et une démarche mathématique maîtrisée. En réalité cette décomposition nous paraît intéressante dans une autre perspective : celle du caractère hiérarchique des connaissances mathématiques. La description de la situation mathématique donnée par l'expérimentateur présuppose l'automatisation chez l'élève de certaines procédures et n'explicite que les données directement pertinentes pour le traitement de cette situation. Les élèves émetteurs semblent avoir bien reçu le message si l'on s'en tient au critère de vérification défini dans la méthodologie de notre expérience mais lors de la transmission, ils explicitent ce que l'expérimentateur avait supposé évident et pleinement automatisé. On serait tenté dire que, pour expliquer, les élèves se placent à un niveau d'appropriation des connaissances inférieur à celui où s'est placé le maître (l'expérimentateur). Ainsi, par exemple, au lieu de retransmettre la formule de calcul de l'aire et la notion d'additivité des aires, les émetteurs soit donnent l'application au cas particulier traité, soit donnent des ordres de calculs à effectuer. Ou encore, pour la construction du pentagone, certains émetteurs précisent la suite des actions à exécuter alors que l'expérimentateur s'est contenté d'une indication globale. Le recours au langage usuel pour doubler la terminologie mathématique est à comprendre dans cette perspective.

On a pu constater cependant que cette descente de niveau est moindre en quatrième qu'en cinquième. On constate également une intégration progressive d'expressions mathématiques par les élèves de quatrième ; mais là n'est peut-être pas l'observation la plus importante, elle l'est davantage dans la mise en œuvre d'informations de contrôle qui permettent de faire des rectifications, des vérifications dans l'exécution de la tâche.

Ainsi dans les deux tâches, la modification des informations de l'expérimentateur va dans le sens d'une transmission d'informations qui exigent une moindre mobilisation des connaissances. Est-ce que ces modifications sont un effet de la tâche proposée dans un souci d'avoir une communication efficace ou est-ce que cette retraduction se produit toujours dans un but d'intégration de l'information du maître ? On peut supposer que ce n'est pas seulement là l'effet de la communication parce qu'en fait, les émetteurs descendent à leur niveau de connaissances.

BIBLIOGRAPHIE.

BEAUDICHON Janine (1982) *La communication sociale chez l'enfant.* P.U.F. Psychologie d'aujourd'hui.

LABORDE Colette (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse. Université scientifique et médicale — Institut National Polytechnique de Grenoble.

PIAGET Jean (1923) *Le langage de la pensée chez l'enfant.* Diffusion Delacheux et Niestlé.

WEBER-KUBLER Jeannine (1982) *Traitement d'informations mathématiques dans une transmission orale chez des élèves de douze à quatorze ans.* Thèse. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

TABLEAU DES DIFFERENTES UNITES D'INFORMATION RETENUES PENDANT LA TRANSMISSION DU CALCUL D'AIRE

	R	E	R + E	R	E	R + E
calcul de l'aire du triangle (M)	9	9	18	6	9	15
justification de la mémoire (M)	1	0	1	1	0	1
nomme le trapèze AA'B'B (M)	8	8	16	6	9	15
nomme le trapèze BB'C'C (M)	7	7	14	7	9	16
nomme le trapèze AA'O'C (M)	7	5	12	4	5	9
indique l'opération T1 + T2 (M)	4	3	7	6	4	10
indique l'opération T1 + T2 - T3 (M)	4	3	7	6	5	11
indique le résultat (M)	6	5	11	5	7	12
mesures de OA', OB', OC', AA', BB', CC'	7	8	15	7	8	15
formule mathématique (M)	3	6	9	5	4	9
paraphrase	6	6	12	2	6	8
explication des deux bases (M)	4	1	5	2	1	3
explication de la hauteur (M)	4	2	6	1	2	3
calcul de A'B' (M)	4	4	8	3	3	6
calcul de B'C'	3	4	7	3	0	3
calcul de A'C'	3	3	6	1	0	1
ordre d'exécution du calcul de l'aire de T1	5	6	11	3	7	10
ordre d'exécution du calcul de l'aire de T2	0	2	2	2	3	5
ordre d'exécution du calcul de l'aire de T3	0	0	0	0	0	0
dis de calculer l'aire de T1	3	2	5	2	1	3
dis de calculer l'aire de T2	5	4	9	4	4	8
dis de calculer l'aire de T3	6	3	9	3	3	6
dis de faire pareil pour l'aire de T2	1	2	3	1	0	1
dis de faire pareil pour l'aire de T3	0	0	0	0	0	0
ordre d'addition de l'aire de T1 et de T2	6	5	11	5	1	6
ordre de soustraction	4	4	10	5	1	6
calcul numérique de A'B'	1	0	1	1	0	1
calcul numérique de B'C'	0	0	0	1	0	1
calcul numérique de A'C'	0	0	0	1	0	1
calcul numérique de l'aire de T1	5	1	6	2	2	4
calcul numérique de l'aire de T2	2	2	4	2	1	3
calcul numérique de l'aire de T3	2	1	3	1	1	2
donne le résultat numérique	3	2	5	3	0	3
tableau 1		4ème			5ème	

R : nombre de couples émetteur-récepteur qui ont donné l'information et dont le récepteur a réussi à exécuter correctement le test d'application.

E : nombre de couples émetteur-récepteur qui ont donné l'information et dont le récepteur n'a pas réussi à exécuter le test d'application.

E + R : nombre de couples émetteur-récepteur qui ont donné l'information.

(M) : information donnée par le maître.

TABLEAU DES DIFFERENTES UNITES D'INFORMATION RETENUES PENDANT LA TRANSMISSION DU PENTAGONE REGULIER

		D	M	T	D	M	T
*	cercle	9	9	18	9	8	17
*	centre O	9	7	16	8	6	14
	rayon quelconque	1	5	6	4	3	7
	rayon précisé	3	2	5	3	2	5
*	diamètre	9	5	14	6	2	8
*	mention perpendiculaire	8	3	11	6	1	7
	perpendiculaire	1	6	7	4	5	9
	droite, ligne	0	4	4	3	4	7
	diagonale	0	1	1	0	2	2
	horizontale, verticale	0	1	11	1	5	6
	mention qui passe par O	2	6	8	4	5	9
*	AB et CD	9	8	17	9	9	18
	précision de A, B, C, D	1	3	4	5	8	13
*	cercle de diamètre AO	9	4	13	7	0	7
	segment AO, rayon AP	0	2	2	0	1	1
	autre désignation : milieu de AO	3	8	11	4	8	12
	autre désignation : qui passe par A et O	1	8	9	4	8	12
	autre désignation : pointe du compas sur...	1	7	8	1	5	6
*	cercle de centre C	8	4	13	8	2	10
*	tangent au cercle de diamètre AO	7	1	8	0	8	6
*	qui coupe le cercle (O) en deux points	7	8	15	9	2	11
	pointe du compas sur C	2	7	9	0	6	6
	ordre des . pour le centre	1	1	2	0	2	2
	synonyme de tangent	5	9	14	7	9	16
	qui coupe le cercle (O) en 2 «endroits»	1	1	2	1	7	8
*	E et F	8	8	16	8	7	15
	précision de E et F	0	1	1	2	7	9
*	arc de cercle (E, EF)	2	1	3	7	0	7
*	qui coupe le cercle (O) en un point	7	3	10	6	1	7
	pointe du compas sur E	5	8	13	6	8	14
	cercle (E, EF)	2	2	4	4	1	5
	demi-cercle (E, EF)	4	1	5	1	0	1
	autre désignation pour arc de cercle (E, EF)	4	8	12	4	8	12
*	arc de cercle (F, EF)	3	0	3	1	0	1
*	qui coupe le cercle (O) en un autre point	4	2	6	1	0	1
	pointe du compas sur F	3	5	8	4	3	7
	cercle (F, EF)	2	1	3	1	0	1
	demi-cercle (F, EF)	1	0	1	0	1	1
	autre désignation pour arc de cercle (F, EF)	1	6	7	2	4	6
	qui fait un trait sur le cercle	4	7	11	3	8	11
	fais la même chose sur F	6	6	12	6	5	11
	nomme ce point X, Y	1	5	6	1	2	3
	nomme cette coupure X, Y	0	0	0	1	2	3
*	joindre E et F par un segment	0	1	1	4	1	5
*	joindre E et F, F au point tracé par F	5	3	8	3	3	6
*	joindre ce point là au point D	5	3	8	3	4	7
*	joindre D à l'autre point tracé par E	5	3	8	3	3	6
*	joindre ce point ci à E	6	3	9	3	3	6
	joindre E et F, F au trait tracé par F	4	4	8	5	3	8
	joindre ce trait à D	3	3	6	5	3	8
	joindre D à l'autre «trait» tracé par E	4	1	5	5	3	8
	joindre ce trait ci à D	2	1	3	4	3	7
	joindre E à F, F à X, X à D, D à Y, Y à E	1	1	5	1	3	4
	joindre les cinq points	0	3	3	1	1	2
	erreur quant aux points à relier	3	2	5	2	2	4
	pentagone	3	3	6	4	2	6
	figure à cinq côtés	0	4	4	2	3	5
	figure à cinq côtés égaux	1	1	2	1	0	1
*	pentagone régulier	7	1	8	2	0	2
	tableau 5		**4ème**			**5ème**	

On a mis une * devant les formulations du maître.

Remarques :

D : nombre de couples emetteurs-récepteurs de la modalité «dictée» où apparaît l'information.

M : nombre de couples émetteurs-récepteurs de la modalité «montrée» où apparaît l'information.

T : nombre de couples émetteurs-récepteurs des deux modalités où apparaît l'information.