AIRES DE SURFACES PLANES

(première partie)

I.R.E.M. de Paris sud

Régine DOUADY
Marie-Jeanne PERRIN

Le but de cet article est de décrire une suite de séquences d'enseignement visant la construction du concept d'aire chez les élèves du cours moyen et de 6ème. Le découpage en séquences est fait en référence au contenu. Une séquence ne correspond pas, en général, à une séance de 55 minutes en classe. Le nombre de séances utilisées pour une séquence est donné à titre indicatif.

Sous le titre I nous exposons les raisons de nos choix. Sous le titre II qui se répartit entre la présente partie de l'article et celle qui sera publiée dans un numéro ultérieur, nous décrivons en détail les séquences qui nous paraissent très importantes dans la construction du concept d'aire et dont l'absence peut expliquer certaines difficultés des élèves. Citons la confusion aire-périmètre ou celle créée par les désignations des unités usuelles d'aire (par exemple, $1cm^2$ est l'aire d'un carré de côté 1 cm ; et $\frac{1}{2}$ cm^2 est déclaré «l'aire d'un carré de côté $\frac{1}{2}$ cm»). Citons aussi l'extension abusive au parallélogramme des formules de calcul d'aire du rectangle. D'autres séquences ont été décrites plus succintement parce qu'elles sont plus familières dans l'enseignement. Pour plus de détails, on peut se reporter à la brochure n°48 de l'I.R.E.M. de Paris-Sud désignée [D.P.] dans la suite.

Les séquences décrites ont été expérimentées dans des cours moyens. Quelques unes ont été présentées dans une classe de 6ème ; il s'agit de celles concernant la différenciation aire-périmètre (2.3.1 et 2.3.2), le pavage (2.4) l'étude de l'aire «$1cm^2$» (2.6) et les surfaces usuelles (2.8). Le temps a manqué pour expérimenter dans cette 6ème la suite complète des séquences, car beaucoup d'élèves avaient des difficultés de tous ordres.

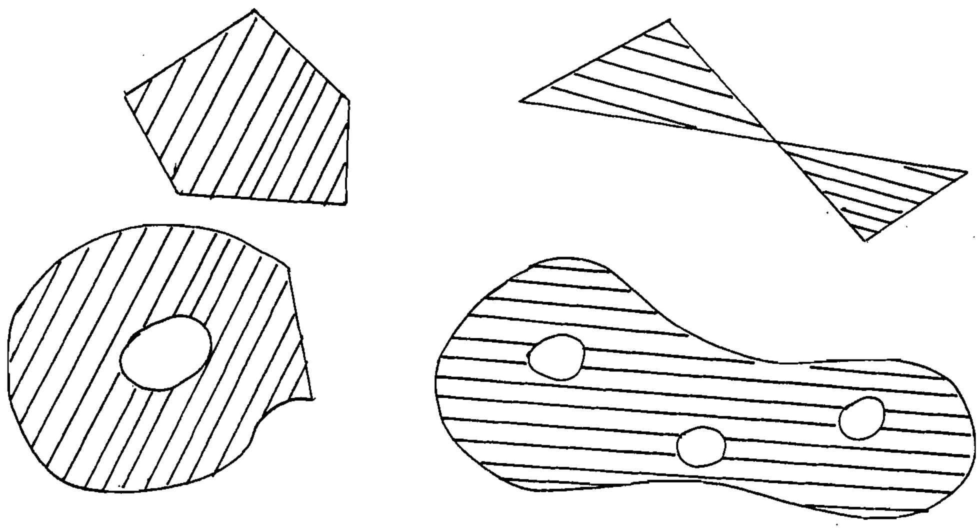
«petit x» n° 6 pp. 5 à 33. 1984

I – COMMENT NOUS AVONS CONSTRUIT LES SEQUENCES D'APPRENTISSAGE.

1.1 Aire de surfaces planes.

Par surfaces planes on entend des parties bornées du plan dont l'intérieur (non vide) est limité par une ou plusieurs courbes fermées de longueur finie.

Exemples :



Chaque surface peut être réalisée dans du carton ou tout autre matériau (carton, bois,...) dont on ne considère pas l'épaisseur.

Par déplacement, on peut amener certaines surfaces à se superposer ou à s'inclure les unes dans les autres. Elles occupent plus ou moins de place dans le plan. Pour d'autres surfaces, leur forme ne permet ni superposition ni inclusion. La notion d'aire a pour but de mesurer l'occupation du plan indépendamment de la forme.

Soient deux surfaces S_1 et S_2 qu'un même déplacement amène en coïncidence, elles occupent autant de place dans le plan. Nous dirons que S_1 et S_2 ont **même aire.**

Soient S une surface, S′ une surface obtenue en découpant S en pièces et en recollant les pièces sans perte ni chevauchement. **Nous dirons encore que S et S′ ont même aire.**

Par les procédés ci-dessus, on peut comparer certaines surfaces, mais pas toutes. Par exemple, peut-on trouver un carré et un disque de même aire ?

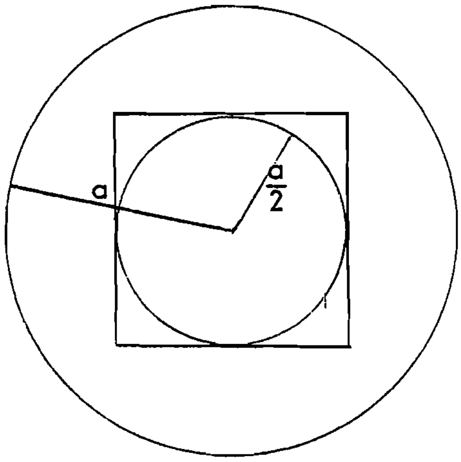
On ne peut pas découper un carré en un nombre fini de pièces et assembler ces pièces sans chevauchement pour obtenir un disque. Pourtant, considérons un disque de centre le centre du carré, de rayon r. Faisons varier r en lui donnant des valeurs croissantes de $\frac{a}{2}$ à a où a est la dimension du carré.

Pour $r = \frac{a}{2}$, le disque est contenu dans le carré.

Pour $r = a$, le disque contient le carré.

Il est raisonnable de penser qu'au cours de sa variation, le disque passera par un état où il aura même aire que le carré.

Mais pour quelle valeur de r ?



Envisageons une approche physique de l'aire par référence à la masse. Soient S_1 et S_2 deux surfaces, P_1 et P_2 deux pièces réalisant respectivement S_1 et S_2 dans un même matériau homogène, d'épaisseur constante (carton ou lino par exemple). On dira que S_1 et S_2 ont **même aire** si P_1 et P_2 ont **même masse.** Ce critère a le mérite de ne pas faire intervenir la forme des pièces.

Le recours à la masse est un artifice permettant d'assurer qu'on peut toujours comparer les aires de deux surfaces réalisables puisqu'on peut comparer les masses de réalisations et mesurer les aires comme on mesure les masses.

Le pavage des surfaces, puis la mesure des aires en fonction d'une unité permet de prévoir les résultats de l'expérience sur les masses de réalisations matérielles sans avoir besoin de réaliser l'expérience.

1.2 A propos des concepts.

Voici quelques hypothèses sur lesquelles nous nous sommes appuyées pour la construction des séquences d'apprentissage.

— Les concepts se construisent à l'occasion d'**actions.** Ils prennent leur sens grâce aux **problèmes** qu'ils permettent de résoudre. Chaque nouveau problème contribue à enrichir le concept.

— Un nouveau concept se construit aussi en se **situant par rapport aux connaissances déjà acquises**, soit pour les élargir et les généraliser, soit pour les remettre en cause et en construire de nouvelles mieux adaptées au problème posé.

— Un problème fait en général intervenir plusieurs concepts. Chacun prend aussi son sens dans **les relations qu'il entretient avec les autres concepts** impliqués dans le problème.

— Cette diversité apparaît notamment si le problème peut se formuler dans **plusieurs cadres** entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre numérique, cadre graphique).

1.3 Contenu des séquences.

Ces hypothèses nous amènent à proposer une suite de séquences comprenant :

— une phase de travail sur papier quadrillé pour fixer les connaissances anciennes sur lesquelles on pourra s'appuyer ;

— une approche géométrique qui permet d'étendre à des surfaces dessinées sur papier blanc le sens de l'expression «avoir même aire» ;

— des activités visant à différencier les notions d'aire et de longueur, sans avoir recours à la mesure ;

— des activités de pavage de surfaces variées à l'aide de divers pavés ;

— une étude de la variation ou de la conservation de l'aire au cours de quelques transformations géométriques ;

— la mesure de l'aire de surfaces en fonction d'une unité d'aire fixée, et les changements d'unité.

1.4 Organisation des séquences.

Ces séquences ont été construites de façon à se dérouler avec l'organisation suivante :

a) Exposé du problème.

L'enseignant expose la consigne, distribue éventuellement le matériel, s'assure, au cours d'une discussion avec les élèves que la consigne a du sens pour chacun d'eux.

b) Phase de recherche.

Les élèves travaillent individuellement ou en équipe, ou en situation de communication. Au cours de cette phase, il se peut que des difficultés fassent l'objet d'une discussion.

c) Bilan. Présentation des résultats.

Selon le cas, l'enseignant recense les résultats et les fait commenter par la classe, ou bien les équipes viennent présenter leur travail et le soumettent à la critique des autres.

Au cours de cette phase, les élèves sont obligés soit de convaincre leurs camarades de la validité de leur réponse, soit de se laisser convaincre de leurs erreurs. Dans tous les cas une argumentation sur le problème doit se développer. Celle-ci peut déboucher sur de nouvelles questions, une nouvelle extension du problème et des procédures utilisées.

d) Phase de synthèse et d'institutionnalisation*.

Au début de la séance suivante, on résume la séance (ou les séances) précédente(s) sur le même problème. Les élèves rappellent le problème, les solutions qu'ils ont trouvées et les méthodes utilisées.

Les élèves comparent les méthodes, leurs avantages et leurs inconvénients. Cette phase est très importante pour homogénéiser le savoir des élèves de la classe.

Au cours de cette phase de synthèse, les caractères importants du problème (autrement dit l'objectif d'apprentissage visé par l'enseignant) sont soulignés et officialisés. Ils sont alors détachés de leur contexte d'introduction et institutionnalisés. Il s'agit, ici, de dégager, à partir de ce qu'ont produit les élèves, ce qu'ils doivent retenir et de le leur dire. Ce pointage est indispensable si on ne veut pas perdre les bénéfices de la phase d'action.

e) Mise à niveau de la classe et évaluation.

C'est une phase de travail personnel servant à l'enseignant à avoir une photographie de la classe et à l'élève à savoir où il en est. Ce travail se fait essentiellement sous forme d'exercices de deux types qui interviennent à des moments différents et qui remplissent des fonctions différentes. Les premiers sont liés à la situation problème traitée et ont pour but de repérer les élèves en difficulté et leur apporter individuellement un complément d'informations et d'explications. Les seconds sont des exercices décontextualisés, destinés à familiariser l'élève avec les nouvelles connaissances qu'il doit retenir et maîtriser et sur lesquelles il pourra s'appuyer pour résoudre de nouveaux problèmes. Ils visent aussi à évaluer l'élève, à tester ses acquis présumés après la mise à niveau.

* Il s'agit d'officialiser des connaissances qui, jusque là n'ont été que des outils, de leur donner un statut d'objet mathématique, avec les formulations conventionnelles, en somme leur donner un statut social.

II – DESCRIPTION DES SEQUENCES.

2.1 Approche sur papier quadrillé (1 séance).

Il s'agit pour les élèves de revoir des connaissances anciennes, pour le professeur de s'assurer que ces connaissances sont bien acquises et pourront servir de base pour la suite. Les connaissances visées ici sont les suivantes :

– la place occupée par une surface dessinée sur papier quadrillé s'évalue au nombre de carreaux que contient la surface ;

– deux surfaces non superposables peuvent occuper la même place. On dit qu'elles ont la même aire ;

– on peut comparer les aires en comparant les nombres de carreaux qu'elles contiennent ;

– en déplaçant une figure sur le papier quadrillé, on ne change pas le nombre de carreaux qu'elle contient ;

– si on découpe une surface dessinée sur papier quadrillé et qu'on recolle tous les morceaux sans chevauchement, on fabrique une nouvelle surface qui contient le même nombre de carreaux, donc qui a la même aire.

Pour des exemples de séquences répondant à ces objectifs voir [D.P.].

2.2 Approche sur papier blanc (1 séance).

a) Objectifs et organisation de la classe.

– L'objectif est de formuler que deux surfaces obtenues à partir d'une même troisième par découpage et recollement sans chevauchement des morceaux ont même aire. Les surfaces fabriquées serviront plus loin (cf. p. 12).

– Les élèves travaillent par équipes de quatre.

– Le matériel est constitué de rectangles en carton et de feuilles blanches. Chaque équipe dispose de cinq rectangles identiques : un rectangle par élève et un rectangle témoin. Par ailleurs, les rectangles sont différents d'une équipe à l'autre et on peut les ordonner par inclusion.

b) Consigne 1.

Chacun dispose d'un rectangle en carton. Il y en a cinq par équipe de quatre élèves.

– Chacun dans l'équipe réalise un puzzle en carton ayant entre cinq et huit pièces, c'est-à-dire découpe son rectangle en carton en pièces, sans perdre aucun morceau.

— Ensuite, il assemble les pièces découpées sans les chevaucher de manière à obtenir une nouvelle surface, en un seul morceau, différente du rectangle donné.

— On veut quatre formes différentes dans une même équipe.

Informations complémentaires : pour réaliser la nouvelle surface

- on colle convenablement toutes les pièces découpées sur une feuille ;
- on dessine le bord de la surface obtenue sur une nouvelle feuille de papier et on hachure la partie cachée par le carton. La surface hachurée est la nouvelle surface.

Questions.

Au sein d'une même équipe, les parties hachurées par les membres de l'équipe occupent-elles autant de place, plus ou moins de place ?

Qu'est-ce qui change d'une surface à l'autre ?

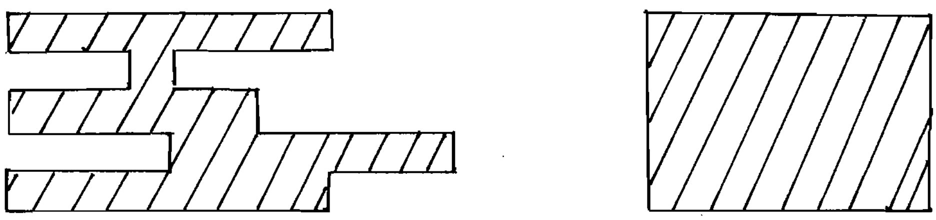
Qu'est-ce qui ne change pas ?

Chaque équipe écrit ses conclusions sur une feuille et les présente au cours du bilan.

c) Commentaires sur les procédures observées.

Dans une même équipe, les différentes surfaces ont la même aire puisque chacune d'elles a la même aire que le rectangle témoin. Cependant il se peut que des enfants se réfèrent encore à des superpositions de nouveaux découpages ou à la simple perception visuelle. Ce dernier moyen est source d'erreur.

Pour des surfaces S_1 et S_2 comme ci-dessous :



bien que $A(S_1) < A(S_2)$, les enfants ont tendance à déclarer que S_1 est plus grande que S_2. En effet la perception visuelle se réfère plus à la place occupée par la surface obtenue en bouchant les creux.

L'aire se rapporte précisément à la partie hachurée et caractérise un invariant des parties hachurées par les membres d'une même équipe, et cela par convention. Cette convention est justifiée par le fait que, pour des surfaces dessinées sur papier quadrillé, par découpage et recollement convenable, le nombre de carreaux est invariant.

d) Consigne 2.

Comparer l'aire de toutes les surfaces produites par la classe.
On attend que les élèves se ramènent aux rectangles témoins.

2.3 Différenciation des notions d'aire et de longueur.

Notre objectif est maintenant de différencier les notions d'aire et de longueur en comparant des surfaces données (en particulier celles fabriquées précédemment (voir 2.2.)) d'une part selon l'aire, d'autre part selon le périmètre.

Nous modifierons des surfaces de façon à faire varier différemment l'aire et le périmètre. Nous comparerons aussi des polygones selon l'aire et selon les longueurs des côtés.

Nous ne parlons pas ici des différences et des relations entre longueurs et aires liées aux dimensions (dimension 1 pour les longueurs, dimension 2 pour l'aire : si on reproduit une figure à l'échelle k, les longueurs sont multipliées par le nombre k et les aires par le nombre k^2). Cet aspect essentiel, dont l'étude s'étend sur plusieurs années, sera abordé plus loin (2.5).

2.3.1. Comparaison des périmètres de différentes surfaces de même aire.

a) Matériel.

— Les surfaces en carton réalisées précédemment (voir 2.2).
— Bobine de fil (ficelle de boucher ou fil métallique fin : l'essentiel est qu'il ne s'allonge pas quand on tire dessus).
— Règle graduée.
— Colle ou scotch.

Organisation de la classe.

Les élèves travaillent par équipes de quatre : les mêmes que précédemment (voir 2.2).

b) Consigne. La consigne se donne en deux temps.

1) Commander par écrit la longueur de fil nécessaire pour border exactement la surface réalisée et vérifier si la longueur est bonne en collant ce fil sur le bord.

Commentaire.

Les commandes sont passées par écrit pour qu'il en reste des traces et qu'on puisse éventuellement comparer la commande à la livraison, en particulier dans le cas où le fil ne borde pas exactement la surface (la colle ne doit pas être trop forte pour qu'on puisse décoller le fil au besoin).

2) Quand toutes les surfaces sont bordées, on demande aux élèves, à l'intérieur de chaque équipe, de comparer les périmètres de ces surfaces.

Il y a peu de chances pour que les quatre élèves d'une même équipe aient des surfaces de même périmètre, en tous cas cela ne se produira pas dans toutes les équipes. Les surfaces réalisées ont la même aire mais non le même périmètre. **Pour classer les surfaces selon le périmètre**, les élèves ont à ordonner des nombres : les mesures en cm des longueurs de fil commandées (quand la commande est bonne !).

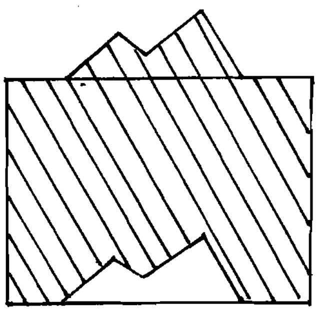
c) Des procédures observées : un conflit.

Pour mesurer le périmètre de leur surface, les élèves ont utilisé l'un des deux moyens suivants :

– promener leur règle autour de la surface, les longueurs s'ajoutent alors directement sur la règle ; puis compter le nombre de reports de la règle et traduire en cm la longueur trouvée (sans oublier les derniers cm au delà du dernier report de la règle complète) ;

– mesurer en cm chacune des longueurs qui interviennent dans le périmètre et les ajouter.

Les élèves avaient presque tous fabriqué des surfaces à bord très découpés. Les deux procédures étaient assez coûteuses. Dans une équipe en CM1, un élève (David) a eu l'idée de mesurer le périmètre du rectangle témoin pour faire sa commande de fil. Son coéquipier (Bruno) lui objecte que le fil sera trop court : «il ne pourra pas faire le tour de tous les zigzags, il faut tout mesurer». En réponse à cette objection, David déclare que la surface a été construite à partir du rectangle témoin et qu'elle a le même périmètre. Chacun fait sa commande de fil en suivant sa procédure. A la vérification, il manque environ 20 cm de fil à David. Bruno s'y attendait et croit avoir emporté la conviction de David. Or celui-ci met le décalage sur le compte des erreurs de manipulation dans la reproduction de la surface à border et dans la mesure du bord du rectangle. Il vérifie sa manipulation, modifie sa commande de 2 cm, ce qui ne résout pas le problème. Bruno alors modifie le rectangle témoin en créant une surface à bord irrégulier mais relativement proche du rectangle en découpant une pièce sur un bord et en la recollant le long d'un autre bord, comme dans le dessin ci-dessous.



A ce moment là seulement, David est convaincu et le restera de façon très stable dans toute la suite, contrairement à d'autres élèves qui avaient dès le début utilisé une procédure adaptée.

d) Compte rendu collectif et bilan.

Les équipes rendent compte de leur travail avec les difficultés éventuellement rencontrées :

— difficultés matérielles pour mesurer si on a réalisé une surface biscornue ;

— méthodes utilisées pour mesurer le périmètre ;

— décalage entre la longueur de fil nécessaire et la longueur de fil commandé : distinction entre erreurs dues à l'imprécision des mesures, aux manipulations et aux calculs, et erreurs de méthode ;

— quelle erreur peut-on admettre (à cause de l'imprécision) ?

— cause des autres erreurs ;

— différents périmètres obtenus dans chaque équipe ;

— pour la même aire, plus la forme est biscornue, plus le périmètre est grand.

Conclusion.

— Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre.

— Pour comparer les aires de deux surfaces, il ne sert à rien de comparer les périmètres.

2.3.2 Indépendance des variations d'aire et de périmètre.

a) Description de la situation.

Travail individuel ou par équipe de deux.

Consigne.

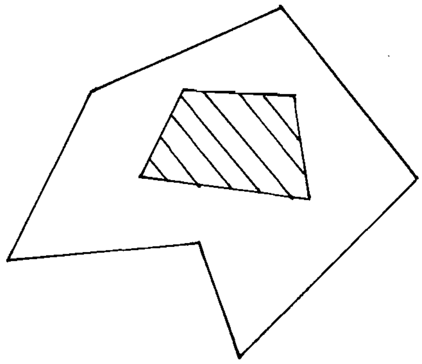
Dessiner une surface S (polygonale) quelconque. Cette surface a une certaine aire A(S) et un certain périmètre P(S). Modifier S de façon à obtenir une surface d'aire plus petite et de périmètre plus grand.

Remarque.

On peut faire travailler les élèves par deux. Chacun modifie la surface dessinée par son coéquipier. De cette façon, la surface que chacun étudie est arbitraire.

b) Analyse de la tâche.

■ Une manière efficace de répondre à la consigne est d'enlever une pièce à l'intérieur de la surface donnée. De cette façon, on diminue l'aire et on augmente le périmètre en créant un bord. Par exemple, dans le dessin ci-contre, on enlève la partie hachurée. Cette procédure a peu de chances d'apparaître si les enfants n'ont pas une certaine pratique des surfaces à trou.



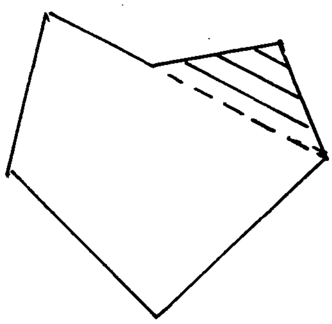
■ Une autre manière consiste à découper une pièce sur le bord. On est assuré de diminuer l'aire. On n'augmente le périmètre que si la longueur du bord supprimé est inférieure à celle du bord créé. Un procédé est d'augmenter l'irrégularité du bord : par exemple transformer un bord droit en une ligne brisée, ou encore remplacer un bord droit par un bord courbe.

■ Une troisième procédure consiste à dessiner une surface incluse dans la précédente mais à bord suffisamment irrégulier pour être sûr que le périmètre soit plus grand.

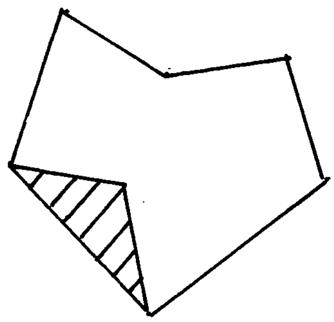
c) Procédures observées en CM1 et en 6ème.

La première procédure n'a pas été utilisée en CM1, elle l'a été par un seul élève en 6ème. Dans un premier temps, tout se passe comme si les élèves ne pouvaient prendre en compte qu'une des exigences. La première idée est de diminuer l'aire soit en enlevant un morceau sur le bord de la surface, soit en dessinant une surface incluse dans la surface donnée. Dans la plupart des cas, ils ont en même temps diminué le périmètre ; pour répondre à la deuxième exigence ils corrigent leur procédure :

— Pour ceux qui avaient enlevé un morceau sur le bord



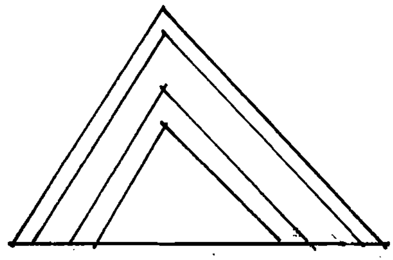
1ère idée : enlever la partie hachurée



2ème idée : enlever cette partie hachurée

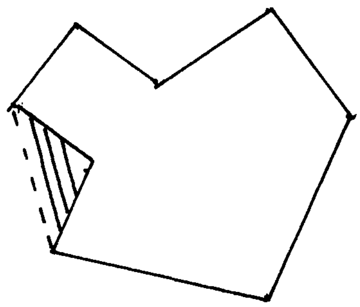
«Au lieu de remplacer un bord tordu par un bord droit, il faut enlever la pièce sur un bord droit». (Cf. Aude et Hélène).

— Pour ceux qui avaient dessiné une surface à l'intérieur, la correction a été plus difficile et certains sont restés en échec. Par exemple un élève a dessiné



et a déclaré que le problème était impossible. D'autres, cherchant toujours à dessiner des surfaces intérieures à peu près homothétiques à la surface donnée et proches du bord, ont résolu la question en dessinant une bande étroite suivant à peu près le bord de la surface donnée avec l'explication suivante : «l'aire est plus petite et le périmètre est à peu près double» (cf. Jeanlin et Raphaël). Un élève a augmenté l'aire et diminué le périmètre en régularisant la surface.

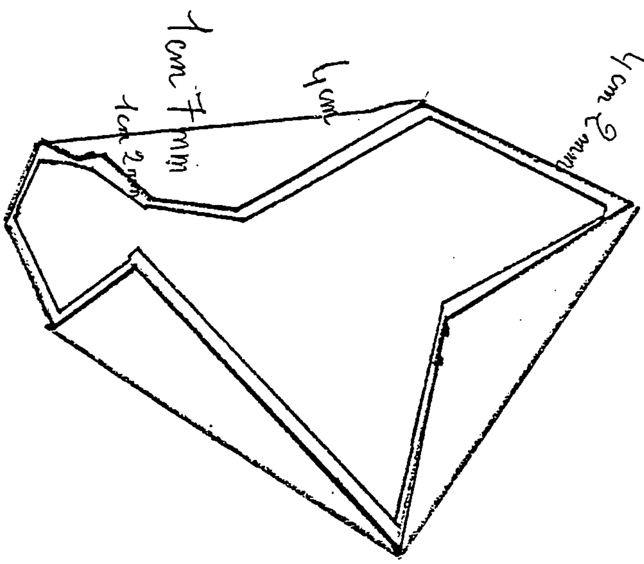
elle a ajouté la partie hachurée.



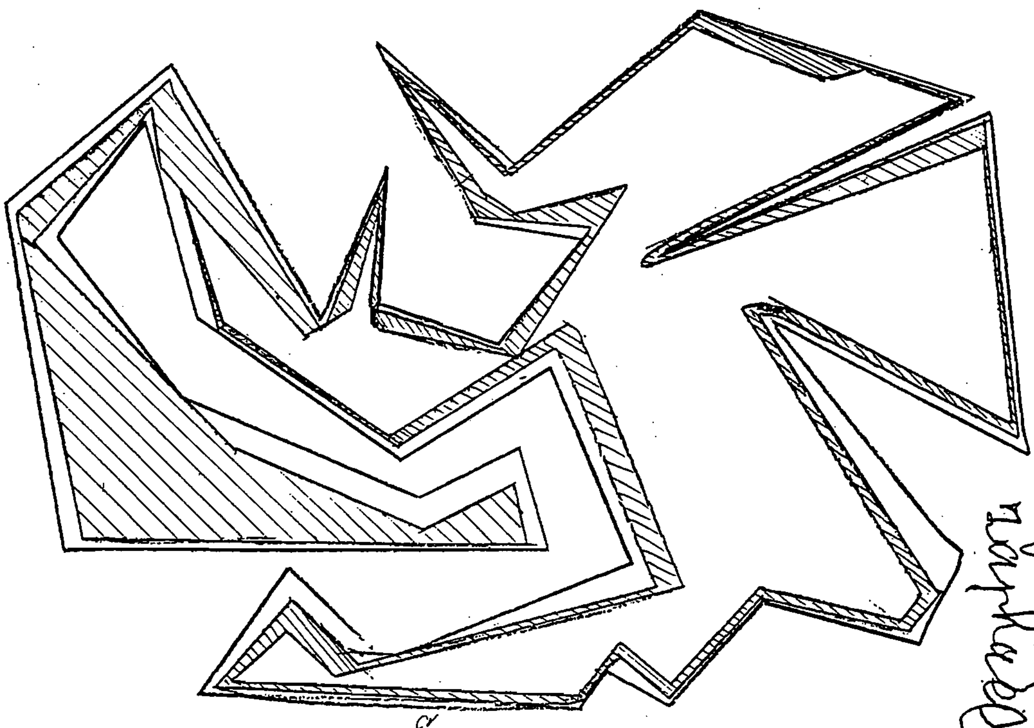
Cette erreur a d'ailleurs permis d'enrichir le bilan en répondant au problème inverse : diminuer le périmètre tout en augmentant l'aire.

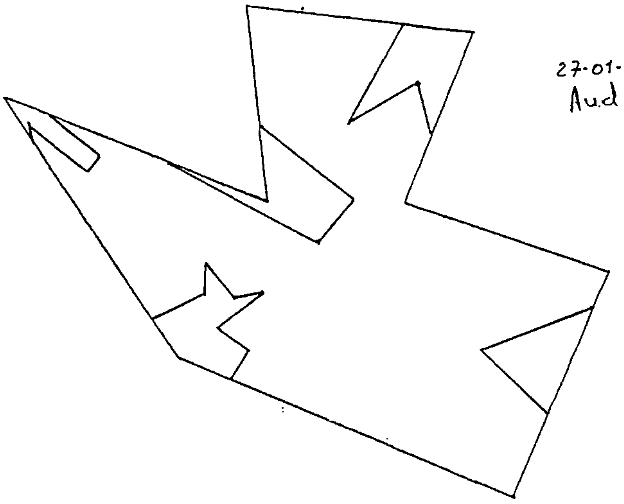
d) Bilan.

Le compte rendu des diverses propositions permet d'établir l'indépendance des variation d'aire et de périmètre : on a trouvé des surfaces S_1 et S_2 telles que $A(S_1) < A(S_2)$ et $P(S_1) > P(S_2)$, des surfaces S_3 et S_4 telles que $A(S_3) > A(S_4)$ et $P(S_3) < P(S_4)$, des surfaces de même aire et de périmètres différents ; il reste à fabriquer des surfaces de même périmètre et d'aires différentes.

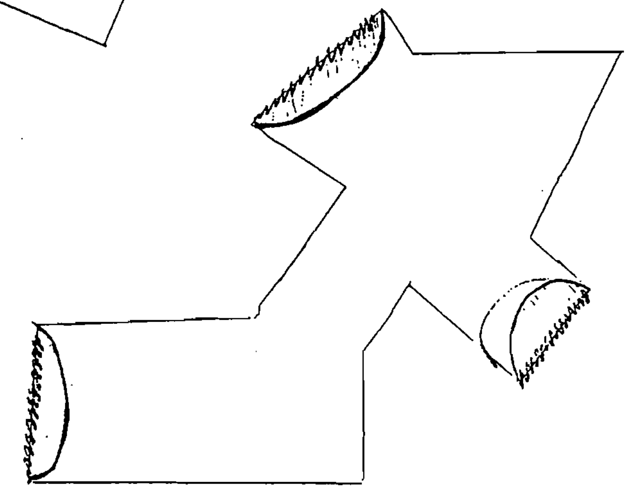


Magali





27-01-83
Aude



27-01-83
Hélène

2.3.3 Comparaison selon divers critères de figures géométriques simples.

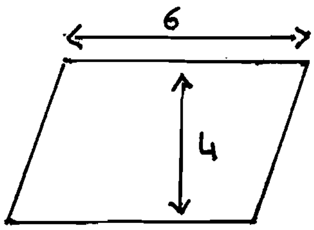
a) Objectif.

Même si les élèves ont établi qu'aire et périmètre pouvaient varier dans des sens différents, ils ont tendance à recourir à nouveau à la comparaison des longueurs pour comparer les aires de formes géométriques simples,; c'est ce que nous avons constaté dans des entretiens individuels. Le but des consignes suivantes est de se convaincre que cette procédure n'est pas valable. La dernière sert de test et de renforcement.

b) Consignes.

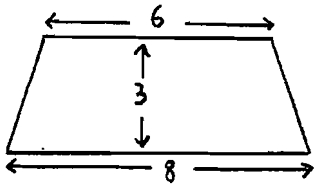
1) Voici un parallélogramme S_1.

(Echelle 1/2).

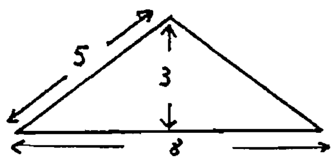


En découpant S_1 et en recollant convenablement les morceaux, on peut obtenir un rectangle. Dessiner un tel rectangle R_1. Comparer les longueurs des côtés de R_1 et de S_1. Comparer les périmètres de R_1 et de S_1. Comparer les aires de R_1 et de S_1.

2) Faire le même travail pour chacune des surfaces ci-dessous : S_2 est un trapèze isocèle, S_3 est un triangle isocèle, S_4 est un hexagone régulier.

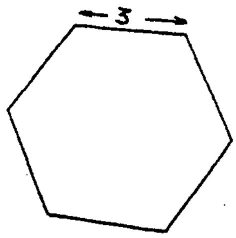


S_2



S_3

Les surfaces sont représentées à l'échelle 1/2.



S_4

3) Trouver deux surfaces de même périmètre et d'aires différentes.

c) Analyse de la tâche.

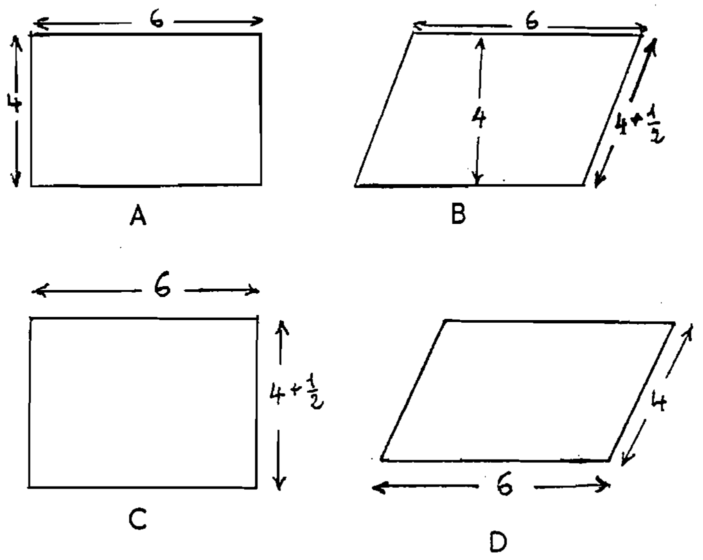
Pour comparer les périmètres, on a besoin de connaître les longueurs des côtés de R_i et de S_i. Pour comparer les aires, ces mesures ne seront d'aucune utilité : la procédure pertinente consiste à se référer à la construction de R_i et de S_i : par construction R_i et S_i ont même aire ($i = 1$, 2, 3 ou 4). Compte tenu des séquences précédentes, on prévoit que dans l'ensemble les élèves seront convaincus que R_i et S_i ont même aire. Tous devraient l'être au moment du bilan. S_3 et S_4 ont même périmètre et des aires différentes, ce qu'on vérifie facilement en essayant de les superposer. Il est possible de fabriquer d'autres surfaces répondant à la question.

d) Bilan.

Après découpage et recollement convenable des surfaces, l'aire n'a pas varié, alors que les longueurs des côtés et le périmètre eux ont varié. On a trouvé deux surfaces de même périmètre et d'aires différentes. La comparaison des longueurs des côtés et des périmètres ne donne aucun renseignement pour comparer les aires, sauf si cela assure que les surfaces sont superposables ou que l'une est incluse dans l'autre.

2.3.4 Test.

Comparer les surfaces suivantes selon l'aire.



Analyse de la tâche.

Dans la consigne précédente (comparaison selon divers critères de figures géométriques simples), découpage et recollement font partie des données ; le test a pour but de leur faire jouer le rôle d'outil pour répondre à la demande de comparaison des aires, sans qu'il y soit fait explicitement référence.

La correction de ce texte sera une occasion de renforcement des conclusions établies au cours de ce chapitre.

2.3.5 Exercices.

1. Pour les surfaces S_1, S_2, S_4 précédentes (2.3.3), fabriquer des triangles de même aire. Même question pour A et C (voir test).

2. a) A partir d'un rectangle donné, fabriquer une surface de même aire et de périmètre plus grand.

   b) Peut-on fabriquer un rectangle qui réponde à la consigne ?

3. a) A partir d'un rectangle donné, fabriquer une surface de même périmètre et d'aire différente.

   b) Peut-on fabriquer un rectangle répondant à cette consigne ?

4. a) Etant donnés deux rectangles R_1 et R_2 d'aires différentes : par exemple $A(R_1) < A(R_2)$, peut-on fabriquer une surface de même aire que R_1 (ou plus petite) et de périmètre supérieur à celui de R_2 ?

b) Peut-on fabriquer un rectangle répondant à ces conditions ?

2.4 Pavage. Mesure des aires.

2.4.1 Choix de la situation.

Notre objectif est d'utiliser une mesure pour comparer des aires de surfaces planes. Les surfaces choisies sont des figures géométriques dessinées sur une feuille de papier et polycopiées. La collection des surfaces a été choisie de façon que la comparaison directe et les comparaisons à l'œil ne donnent rien. La seule manière de s'en tirer est de passer par l'intermédiaire de la mesure. (On exclut les découpages et recollements).

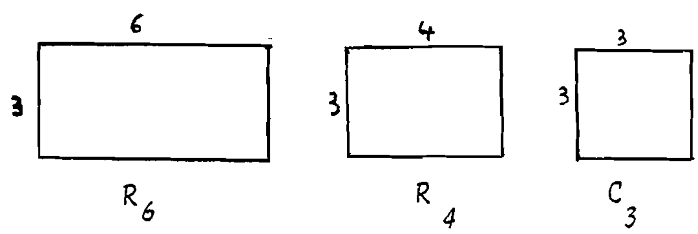
La mesure sera d'abord obtenue, quand c'est possible, par pavage de la surface à l'aide de «carrelages». Nous rappelons que la surface S est pavable avec le carrelage C si on peut recouvrir S avec un nombre entier de copies de C sans chevauchement et sans laisser de trous. Une première série de surfaces est choisie de manière que chacune d'elles soit pavable avec un ou plusieurs des carrelages donnés mais non avec tous. Les premières mesures seront obtenues directement à partir des pavés. Ensuite, en utilisant à la fois les relations entre aires des carrelages et la substitution, nous obtiendrons pour les surfaces des mesures à l'aide d'unités qui ne pavent pas la surface : ces unités paveraient une surface de même aire que la surface donnée.

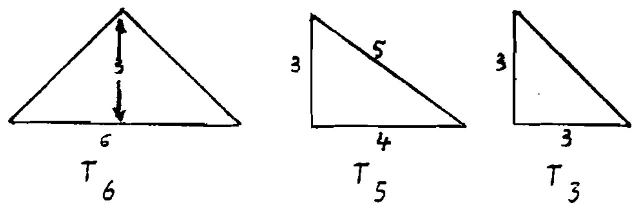
On introduit ensuite une surface (S_6) qui n'est pavable avec aucun des carrelages donnés mais dont la mesure s'exprime en nombre entier avec certains carrelages. Pour le voir il faut utiliser l'additivité des aires et par exemple utiliser plusieurs des carrelages donnés et les relations entre leurs aires : il s'agit là d'une des activités proposées dans le but de détacher la mesure du pavage.

Dans une troisième étape (voir 2.9) on donne des surfaces quelconques et des grilles à maille carrée, la solution adaptée est alors d'encadrer les mesures des surfaces en prenant comme unité la maille de la grille.

a) Choix des carrelages.

Nous avons choisi les carrelages suivants :





Remarque.

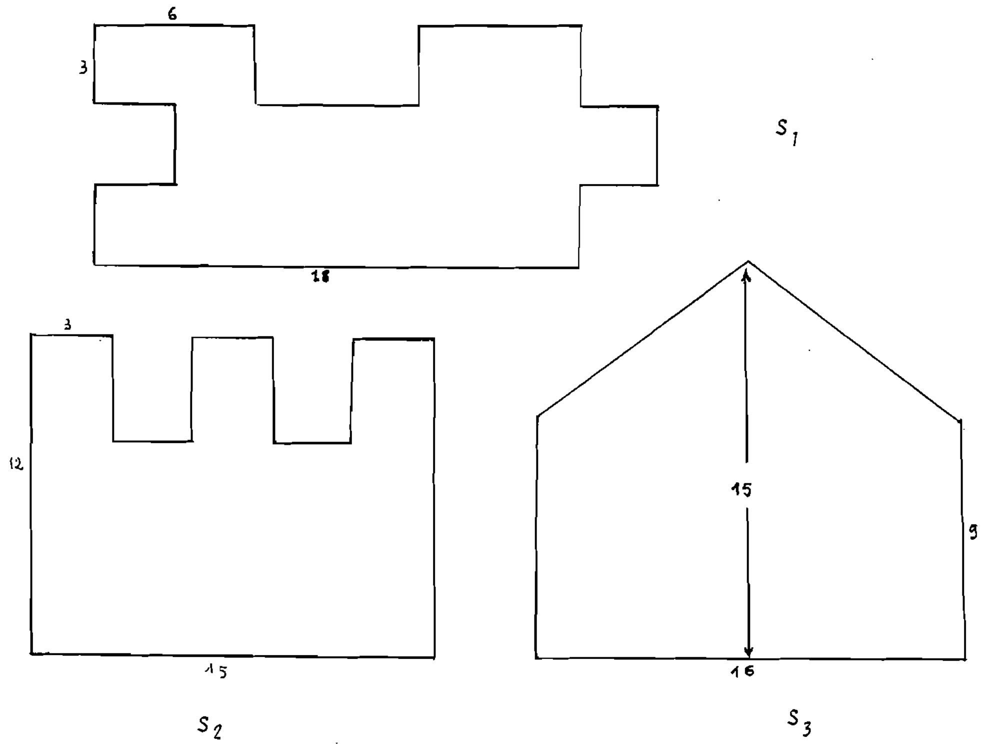
Ils sont représentés ici à l'échelle 1/2 pour les longueurs. Les notations introduites le sont pour la commodité de la rédaction et ne sont pas nécessairement celles utilisées par les enfants.

Certains rapports d'aires entre les carrelages sont entiers, ou inverses d'entiers. Les autres rapports sont moins simples. Si nous désignons par exemple par r_6 l'aire du rectangle R_6 et ainsi de suite pour les autres, nous avons :

$$r_6 = 2c_3 = 2t_6 = 4t_3$$
$$r_4 = 2t_5$$

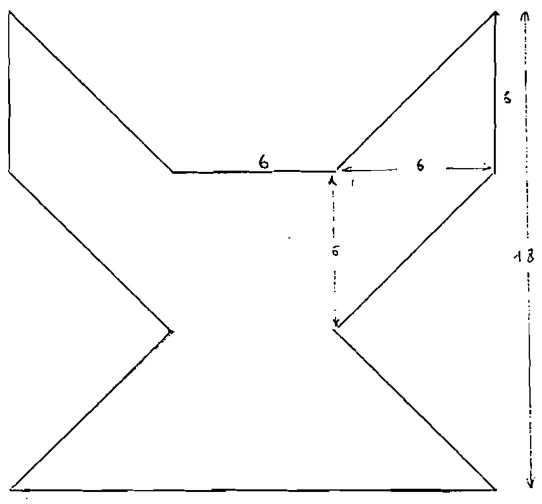
Nous avons ainsi deux types de carrelages : R_6, C_3, T_6 et T_3 d'une part, R_4 et T_5 d'autre part. Le rapport des aires de deux carrelages d'un même type est entier ou inverse d'entier.

b) Choix des surfaces.

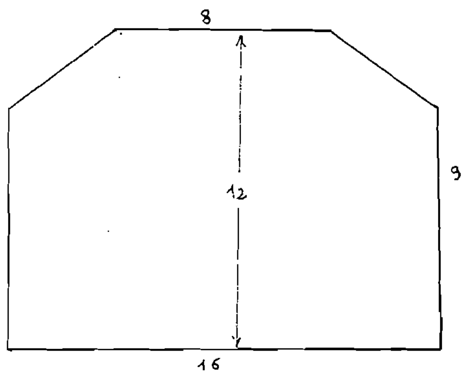


Les figures sont représentées ici à l'échelle 1/2.

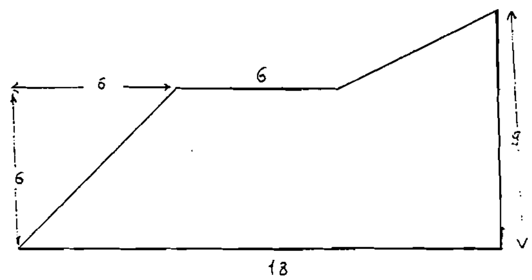
S_4



S_5



S_6



2.4.2 Mesure, par pavage, des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

a) Objectifs.

— Faire un travail géométrique de pavage des surfaces données avec les carrelages donnés.

— Expliciter des relations entre aires de carrelages.

— En déduire des relations entre mesures d'une aire avec des unités différentes et entre lesquelles on a des relations.

— Exprimer l'aire d'une surface en prenant pour unité l'aire d'un carrelage avec lequel on ne peut pas paver.

b) Organisation de la classe.

Les élèves sont répartis par équipes de quatre. On distribue à chaque équipe une collection de surfaces S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et à chaque élève une collection de carrelages. Les carrelages sont découpés dans du carton fin de différentes couleurs.

Chaque surface est polycopiée sur papier blanc.

c) Consigne.

Chacun des membres de l'équipe choisit une des surfaces S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Vous disposez de petits carrelages. En choisissant bien l'un de ces carrelages, on peut paver la surface choisie.

(i) Pavez-la. Combien de copies du carrelage avez-vous utilisées ? Est-ce possible avec d'autres carrelages ?

(ii) Pourriez-vous avec chacun des carrelages fabriquer une surface de même aire que la surface choisie. Pour chacun d'eux, dites de combien de copies vous auriez besoin.

d) Brève analyse de la tâche.

Si on demande seulement de paver il faut s'attendre à ce que les enfants ne donnent que les mesures et les relations entre carrelages qui découlent directement du pavage : même s'ils observent d'autres relations, ils ne les croient pas légitimes puisqu'il faudrait couper les carrelages : on ne peut plus paver avec des carrelages entiers.

Dans une classe, nous avons seulement proposé la consigne (i) et c'est ce qui s'est produit. On a alors donné la consigne (ii) et les élèves ont proposé d'autres relations.

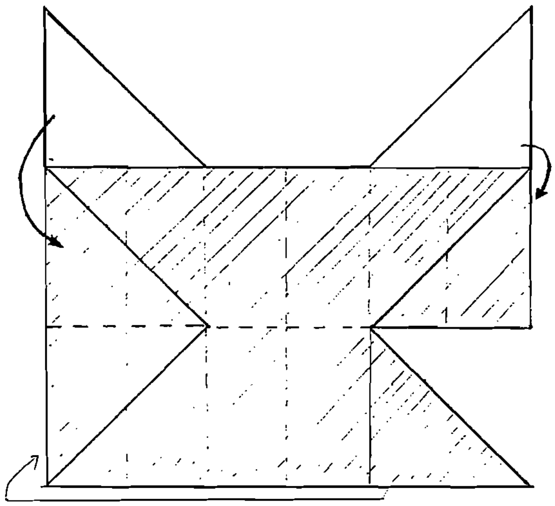
Dans une autre classe, on a donné directement la consigne (ii). Compte-tenu des séquences antérieures, construire une surface de même aire qu'une surface donnée revient à découper la surface et recoller convenablement les morceaux. C'est ce que certains élèves ont proposé en oubliant qu'il fallait se servir des carrelages. Quand on le leur a rappelé, ils n'ont pas vu d'autre moyen que de paver la surface donnée. Ils ont alors produit des relations, les unes liées au pavage, les autres non.

Cependant une autre procédure était possible : commencer à paver la surface choisie avec un des carrelages puis la modifier sans changer son aire de façon que la surface ainsi modifiée soit pavable complétement.

Par exemple.

La surface modifiée S'_4 est pavable avec R_6 et avec c_3, alors que la surface initiale S_4 ne l'était pas.

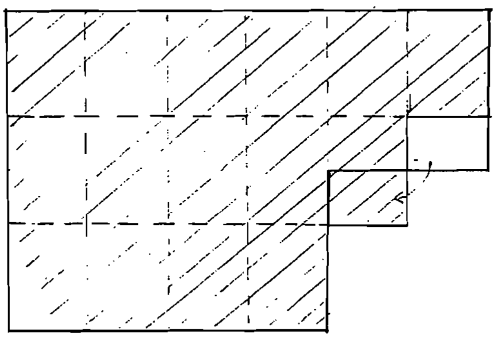
$A_4 = A_4 = 10r_6 = 20c_3$



et même, en modifiant encore cette surface, on obtient S''_4, pavable avec R_4.

$A''_4 = A'_4 = A_4 = 15r_4$.

(Et donc $A_4 = A_5$!).



De telles modifications exigent de bien exploiter les propriétés géométriques des figures proposées et donc déjà de pouvoir les repérer, d'autre part elles exigent d'en anticiper les conséquences sur le pavage : on ne réalise une modification que si elle conduit à une surface pavable, éventuellement après quelques essais. Cette procédure a peu de chances d'apparaître. De toute façon notre objectif n'est pas d'utiliser le pavage systématiquement mais d'exprimer des mesures d'aire indépendamment de la possibilité effective de paver. C'est pourquoi, pour bloquer cette* procédure, nous posons d'abord la consigne de pavage puis celle de construction de surface de même aire. Les élèves n'ont pas besoin de construire les surfaces de même aire pour savoir combien d'exemplaires d'un carrelage ils utiliseraient.

Toutefois, nous favorisons plus tard une telle procédure pour exprimer l'aire de figures géométriques classiques (triangle, parallélogramme, trapèze) en fonction de l'aire du rectangle.

* **Modification de la surface et pavage de la surface modifiée.**

e) Remarques sur le comportement des élèves.

Il n'y a en général pas de problème pour le pavage de S_1 (par R_6 ou C_3) ou de S_2 par R_4. Les autres manières de paver S_1 et S_2 s'obtiennent souvent après avoir remarqué les relations entre carrelages : par exemple on met $2T_3$ dans C_3, donc on peut aussi paver S_1 avec T_3.

Pour S_3, S_4, S_5, c'est beaucoup moins évident surtout pour S_3. Les élèves essaient des triangles mais les placent souvent dans des positions qui ne leur permettent pas de continuer.

Par exemple, pour S_4, ils essaient T_6 en le posant comme indiqué sur la figure 1 alors que seule la disposition de la figure 2 permet de continuer le pavage.

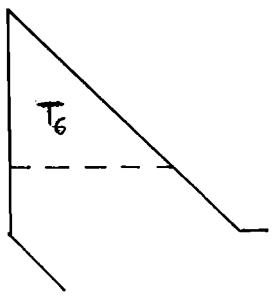


figure 1

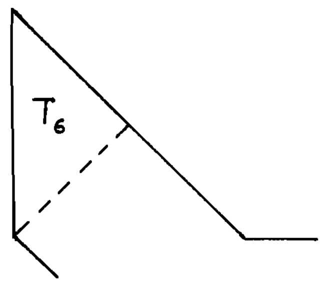


figure 2

Pour S_3, les élèves choisissent un des triangles mais ils essaient souvent de mettre l'angle droit dans l'angle du toit de la maison (figure 1) ou ils essaient plusieurs angles aigus (figure 2).

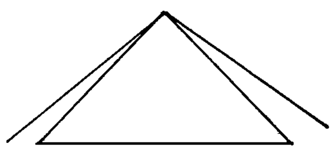


figure 1

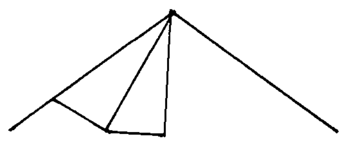


figure 2

Ceci avec tous les triangles proposés avant de penser à utiliser les caractéristiques géométriques de la figure : soit la symétrie, soit séparer le toit du reste de la maison. Pour S_5 le problème est à peu près le même mais plus facile : la position correcte de T_5 se repère plus facilement.

f) Bilan.

Le bilan collectif permet de récapituler tous les pavages possibles ; il est l'occasion d'introduire l'expression «mesure de l'aire avec l'unité...» et d'expliciter des relations entre les différentes unités d'aires proposées (mais pas toutes), et les différentes mesures des aires des surfaces selon l'unité choisie :

$r_6 = 2c_3 = 2t_6 = 4t_3$
$c_3 = t_6 = 2t_3$, $r_4 = 2t_5$ etc. et leurs inverses
$A_1 = 8r_6 = 16c_3 = 32t_3 = 16t_6$
$A_2 = 13r_4 = 26t_5$
$A_3 = 32t_5 = 16r_4$
$A_4 = 20t_6 = 40t_3 = 20c_3 = 10r_6$
$A_5 = 30t_5 = 15r_4$.

Dans une classe de CM2 observée, les élèves ont proposé de consigner les résultats dans un tableau à partir du moment où les relations écrites ont été trop nombreuses pour s'y retrouver facilement. Ce tableau est intéressant parce qu'il rend commode l'utilisation des relations entre unités d'aire pour exprimer des mesures indépendamment du pavage. Il met en évidence les couples d'unités d'aire entre lesquels on a des relations et ceux entre lesquels on n'a pas encore de relation.

Toute aire mesurée avec une unité u peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec u ; cette diversité des expressions d'une même aire sera très utile quand il faudra comparer plusieurs aires. La situation idéale est de pouvoir exprimer toutes les aires en fonction d'une même unité et donc de se ramener à la comparaison des nombres. C'est ce qui se produit ici, si on remplit le tableau ; l'unité commune choisie peut aussi être une unité qui n'est pas dans le tableau (voir séquences ultérieures : paragraphes 2.4.3 – 2.4.4 – 2.4.5).

Pour que ce tableau remplisse effectivement son rôle, il faut qu'il garde son sens de résumé d'informations et que toute relation écrite puisse au besoin se traduire en termes de surfaces.

Pour éviter les erreurs de lecture, il y a intérêt à écrire les relations complètement dans les cases comme ci-dessous :

	r_6	c_3	t_6	t_3	r_4	t_5
r_6	$r_6 = r_6$	$r_6 = 2c_3$	$r_6 = 2t_6$	$r_6 = 4t_3$		
c_3	$c_3 = \frac{1}{2} r_6$	$c_3 = c_3$	$c_3 = t_6$	$c_3 = 2t_3$		
t_6	$t_6 = \frac{1}{2} r_6$	$t_6 = c_3$	$t_6 = t_6$	$t_6 = 2t_3$		
t_3	$t_3 = \frac{1}{4} r_6$	$t_3 = \frac{1}{2} c_3$	$t_3 = \frac{1}{2} t_6$	$t_3 = t_3$		
r_4					$r_4 = r_4$	$r_4 = 2t_5$
t_5					$t_5 = \frac{1}{2} r_4$	$t_5 = t_5$

2.4.3 Comparaison des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

a) Objectifs.

Utilisation de mesures pour comparer des aires, plus précisément utilisation des pavages faits à la séquence précédente et des relations obtenues au bilan pour comparer certaines des aires

Nécessité de choisir une unité commune permettant de mesurer toutes les aires pour achever la comparaison.

b) Consigne.

Ordonner les aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 de la plus petite à la plus grande.
On ne dispose plus des surfaces mais seulement des carrelages et des mesures des aires déjà trouvées.

c) Analyse de la tâche.

Le bilan effectué au cours de la séquence précédente a donné diverses expressions des aires.

En rapprochant ces résultats, on a facilement $A_1 < A_4$ d'une part et $A_2 < A_5 < A_3$ d'autre part. De plus $A_3 = 32t_5$ et $A_1 = 32t_3$, mais $t_3 < t_5$ donc $A_1 < A_3$.

Mais pour les autres résultats, il faudrait mesurer toutes les aires avec la même unité ou revenir à des comparaisons directes, éventuellement après modification des surfaces conservant l'aire. On a bloqué cette procédure en ne donnant pas les surfaces. La seule issue est alors la recherche d'une unité commune permettant de mesurer toutes les aires.

Si les élèves ont repéré que $c_3 = \frac{3}{4} r_4$ ou que $r_6 = (1 + \frac{1}{2})r_4$ (qui sont les relations fractionnaires les plus faciles à repérer) et ont assez de pratique du calcul sur les fractions simples et la substitution, ils peuvent très bien choisir r_4 par exemple comme unité commune et exprimer toutes les aires en r_4. Cela ne sera pas possible sans ces prérequis.

Il se peut cependant que des élèves établissent la relation $2r_6 = 3r_4$ par exemple par juxtaposition des rectangles. Ils peuvent alors par substitution comparer toutes les aires. Par cette méthode certaines substitutions sont plus faciles que d'autres. Les substitutions faciles suffisent pour obtenir la comparaison des aires : elles permettent de mesurer toutes les aires avec r_4 comme unité.

D'autre part, à la séquence précédente, les élèves ont exprimé les mesures des aires avec plusieurs unités (en particulier r_6, c_3, r_4). Pour répondre à la question, il suffit de trouver un carrelage qui pave à la fois C_3 et R_4, ou R_6 et R_4. Ce carrelage peut être le rectangle R de dimensions 1 cm et 3 cm, le carré de côté 1 cm ou le rectangle R′ de dimensions 2 cm et 3 cm ; on note respectivement leurs aires r, c, r′. Il faut alors utiliser des substitutions pour exprimer toutes les aires en fonction d'une même unité.

Nous avons $c_3 = 3r = 9c$

$r_4 = 4r = 12c = 2r'$

$r_6 = 6r = 18c = 3r'$

Donc $A_1 = 16c_3 = 48r = 144c = 8r_6 = 24r'$

$A_2 = 13r_4 = 52r = 156c = 26r'$

$A_3 = 32t_5 = 16r_4 = 64r = 192c = 32r'$

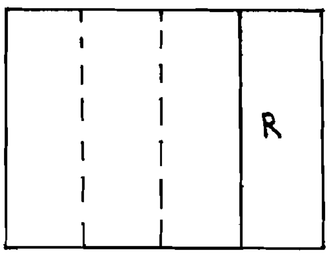
$A_4 = 20t_6 = 20c_3 = 10r_6 = 60r = 180c = 30r'$

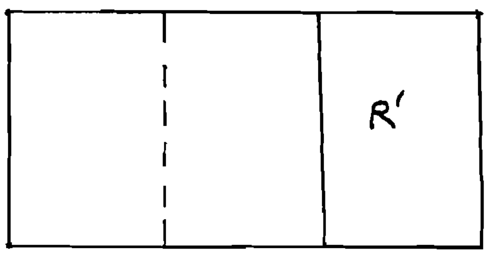
$A_5 = 30t_5 = 15r_4 = 60r = 180c = 30r'$

Nous avons donc : $A_1 < A_2 < A_4 = A_5 < A_3$.

d) Comportements observés.

Dans la classe de CM2 observée, les 3 unités r, r′ et c ont été utilisées. Les équipes qui ont utilisé r ou r′ l'ont fait, en nommant le bout qui dépasse après superposition de R_4 et C_3 (ou R_4 et R_6). Ce nouveau rectangle a été reporté sur R_1 et C_3 (ou R_4 et R_6).





Ces manipulations ont d'ailleurs abouti à l'écriture de relations entre r_4 et c_3 d'une part, r_4 et r_6 d'autre part, (cf. 2.4.4). Dans une classe de 6ème observée, les élèves ont utilisé la relation $2r_6 = 3r_4$ pour exprimer toutes les aires en r_4. Ils n'avaient fait aucun travail sur les fractions auparavant et nous n'avons pas eu le temps de le démarrer à cette occasion.

2.4.4 Mesure d'une aire donnée dans une unité donnée.

a) Objectif.

Augmenter le stock des aires mesurables avec une unité donnée.

Se familiariser avec le calcul sur les petites fractions à l'occasion des mesures d'aires comme on l'avait fait pour les mesures de longueurs (cf. [D.P.]).

b) Consigne.

Exprimer chacune des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 à l'aide de toutes les unités (r_6, c_3, t_6, t_3, r_4, t_5, c) les élèves disposent des mesures déjà trouvées, des carrelages, de papier quadrillé et de papier blanc.

c) Analyse de la tâche.

La tâche consiste à mesurer chacune des aires dans diverses unités. Certaines mesures ont déjà été calculées. Il faut trouver un moyen efficace de repérer celles qui manquent et ensuite de les calculer. Les outils nécessaires sont la substitution et le calcul sur de petites fractions (multiplication ou division d'une fraction par un entier).

Une manière de s'organiser est de noter les informations connues dans un tableau de la forme :

	r_6	c_3	t_6	t_3	r_4	t_5	c
A_1	$8r_6$	$16c_3$	$16t_6$	$32t_3$			144c
A_2					$13r_4$	$26t_5$	156c
A_3					$16r_4$	$32t_5$	192c
A_4	$10r_6$	$20c_3$	$20t_6$	$40t_3$			180c
A_5					$15r_4$	$30t_5$	180c

Certaines des autres cases peuvent déjà être remplies (par exemple la colonne r_4). Les cases vides indiquent les relations à chercher. Répondre à la consigne, c'est compléter le tableau.

d) Procédures observées.

Dans les classes de CM2 observées,(1) les élèves ont d'abord cherché toutes les relations entre carrelages puis utilisé des substitutions : par exemple, $A_2 = 13r_4$; $r_4 = \frac{2}{3}r_6$ donc :

$$A_2 = 13 \times \frac{2}{3}r_6 = \frac{26}{3}r_6 = (8 + \frac{2}{3})r_6$$

Dans la classe de 6ème,(2) beaucoup d'élèves avaient répondu à la consigne de comparaison (cf. 2.4.3) en utilisant la relation $3r_4 = 2r_6$ pour exprimer toutes les mesures des aires avec r_4 comme unité. La colonne r_4 était donc remplie. Les élèves ont exprimé toutes les aires en prenant comme unité r_4, t_5, r, r' et c. Ils n'ont pas

(1) Où l'étude des fractions a débutée au CM1 (cf. [DP]).

(2) Aucun élève de 6ème n'est issu d'un des CM2 observés.

abordé les mesures qui utilisaient les fractions, parce que la plupart n'étaient pas familiarisés avec les notations fractionnaires et que la situation était trop complexe pour une première approche.

e) **Bilan.**

Le bilan permet d'expliciter les différentes méthodes utilisées et de contrôler les calculs, chaque méthode servant de contrôle à l'autre. Il permet aussi de compléter le tableau.

On doit trouver le même ordre sur les aires, quelle que soit l'unité utilisée pour les mesurer, donc, dans chaque colonne, le même ordre sur les nombres de la colonne

2.4.5 Recherche de toutes les relations entre les aires des carrelages.

a) Objectif.

Calcul sur les fractions.

b) Consigne.

Compléter le tableau des relations entre les aires de carrelage. Si les enfants ont proposé un tableau pour consigner tous les rapports entre aires et carrelages, il reste dans ce tableau des blancs que l'on a envie de combler. Compléter ce tableau est d'ailleurs un moyen de répondre à la consigne 2.4.4.

Pour répondre à la consigne, les élèves disposent du tableau incomplet, des carrelages, de papier et de papier quadrillé.

c) Comportements observés.

Cette séquence a été réalisée en CM2. Cela avait été un moyen de répondre au problème précédent (2.4.4). Certains élèves avaient déjà recherché les relation entre r_4 et c_3 ou entre r_4 et r_6 pour répondre à la question de comparaison (cf. 2.4.3). Ils ont ensuite utilisé les relations déjà connues et la substitution. Par exemple $c_3 = \frac{3}{4}r_4$ et $c_3 = 2t_6$ donc $t_6 = \frac{1}{2}c_3 = \frac{3}{8}r_4$. Cette séquence n'a pas été réalisée en 6ème pour les raisons déjà évoquées plus haut.

2.4.6 Mesure de la surface S_6.

a) Objectifs.

Mesure d'une aire qui n'est pavable avec aucun des carrelages proposés : utilisation de l'additivité et de la substitution.

b) Organisation et consigne.

Travail individuel.

Chaque élève dispose des mesures des aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (travail des séquences précédentes) de la surface S_6 polycopiée sur papier blanc et de sa collection de carrelages.

Consigne.

Comparer l'aire A_6 aux autres aires.

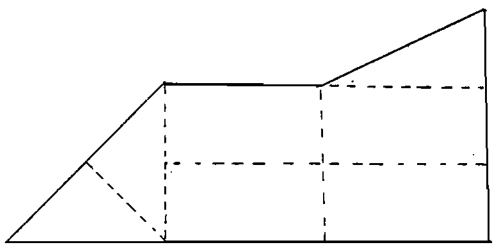
c) Remarques sur les comportements des élèves.

Dans la classe de CM2 observée, les élèves ont d'abord voulu paver et ont été très déçus de constater que R_4 ne pavait pas le triangle du haut. Le pavage avait donné de bons résultats pour les surfaces précédentes et ils pensaient que c'était cela que nous attendions. Il a fallu leur dire explicitement que le pavage n'était pas possible pour qu'ils cherchent autre chose. Ils ont alors très vite trouvé des solutions variées.

Dans la classe de 6ème, nous avons annoncé tout de suite que le pavage de S_6 n'était possible avec aucun des carrelages.

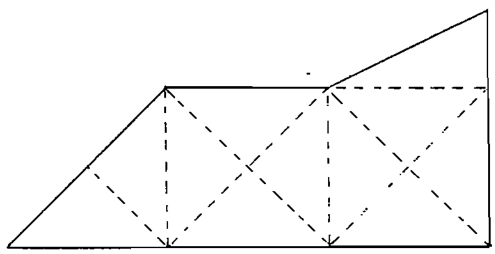
Exemples de propositions.

$A_6 = 4r_6 + 2t_6 + \frac{1}{2}r_6 = (5 + \frac{1}{2})r_6$.



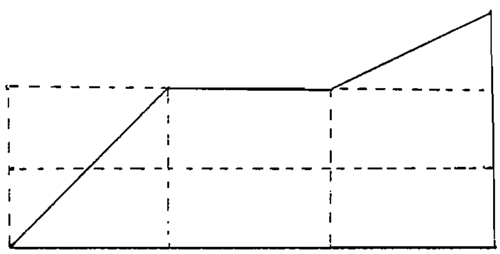
Ou encore

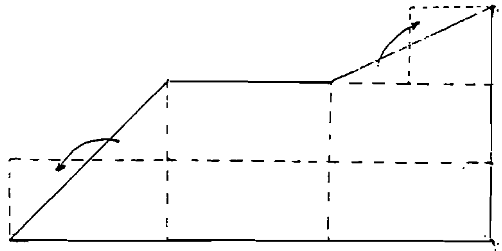
$$\begin{aligned} A_6 &= 10t_6 + \frac{1}{2}r_6 \\ &= 11t_6 \\ &= (5 + \frac{1}{2})r_6 \end{aligned}$$



On peut aussi en régularisant la forme :

$$\begin{aligned} A_6 &= 4r_6 + \frac{1}{2}r_6 + \frac{1}{2}(2r_6) \\ &= (5 + \frac{1}{2})r_6 \end{aligned}$$





Ou encore :

$A_6 = 5r_6 + c_3$

$= 11c_3 = (5 + \frac{1}{2})r_6.$

d) **Bilan.**

Pour mesurer une aire, on peut la découper en plusieurs morceaux, mesurer chacun des morceaux dans une même unité et additionner les mesures. On peut aussi fabriquer une surface de même aire et plus facile à mesurer avec l'unité choisie.

e) **Exercices.**

Calculer la mesure de A_6 avec chacune des unités utilisées dans ce chapitre (r_6, c_3, t_6, t_3, r, c, r', r_4, r_5).

Notons que le calcul en r', r_4 et t_5 est plus difficile et oblige à utiliser le calcul sur les fractions.

Par exemple : $r_6 = 3r'$ donc

$A_6 = (5 + \frac{1}{2}) \times 3r' = (16 + \frac{1}{2})r'$

$c_3 = \frac{3}{4}r_4$ donc $A_6 = 11 \times \frac{3}{4}r_4 = \frac{33}{4}r_4$

$r_4 = 2t_5$ donc $A_6 = \frac{33}{4} \times 2t_5 = \frac{66}{4}t_5 = \frac{33}{2}t_5.$

CONCLUSION.

Nous pensons avoir bien dégagé le processus de distinction des notions de surface plane et d'aire. Nous avons abordé la mesure des aires par le pavage et dégagé la notion d'unité d'aire. Il nous faut maintenant détacher la mesure des surfaces à mesurer de leur pavage effectif. Nous avons amorcé le processus, notamment en calculant l'aire des surfaces $S_1, ..., S_6$ en prenant l'aire de n'importe quel carrelage comme unité. Nous le développons dans la seconde partie de l'article, en particulier lors du calcul de l'aire des surfaces usuelles.