REFLEXIONS SUR LE PROBLEME A L'ECOLE ELEMENTAIRE

par Jean DANIAU

La dictée et le problème ont été longtemps les deux piliers de l'enseignement élémentaire. Activités clefs, ils étaient tout à la fois les tenants et les aboutissants de l'acte éducatif et se voyaient consacrés par les examens qui leur réservaient une place de choix. Il n'était pas rare de trouver des classes où chaque jour était marqué par la rituelle dictée et le sacro-saint problème ; un livre de «calcul» était le plus souvent jugé sur le nombre et la variété des problèmes proposés.

Le nouveau programme de mathématique et les commentaires du 2 janvier 1970 qui l'accompagnent ont contribué à favoriser la remise en question du problème et de sa pratique et ont alimenté une recherche propre à mieux situer la nature et la place de cet outil qui reste une «activité privilégiée» (paragraphe 8 des I.O. du 2.1.1970) et dont il serait dommage de se priver.

On trouvera précisément dans cet article quelques idées qui ne prétendent nullement à l'originalité mais qui, en développant certaines recommandations des textes officiels, peuvent être l'amorce d'une réflexion à laquelle chaque maître est en mesure de se livrer en s'appuyant sur les divers manuels actuellement en usage à l'école élémentaire. Précisons que le présent texte intègre les observations et les remarques résultant d'une première lecture à laquelle ont bien voulu se prêter quelques maîtres à la demande du comité de rédaction.

Après un bref rappel de définition, quatre points seront successivement abordés : la place et le rôle du problème ; la forme, le contenu et la résolution des problèmes.

DEFINITION.

Le commentaire du 2 janvier 1970 affirme que «il y a problème, si connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement». Par son caractère très général, cette définition a le mérite d'élargir la notion de «problème» pour déboucher sur le concept de «situation problèmatique» englobant toutes les activités de recherche numériques ou non qui peu ou prou se présentent à l'école élémentaire ; ajoutons seulement qu'une situation étant donnée l'activité de l'élève consiste à lui adapter un modèle mathématique convenable qui permette de trouver les réponses aux questions explicitement ou implicitement posées.

I – LA PLACE ET LE ROLE DU PROBLEME.

1.1 **La pratique traditionnelle assigne au problème un rôle de contrôle,** soit de **contrôle immédiat** sous forme d'exercice d'application prolongeant une activité conduite au préalable collectivement, soit de **contrôle lointain** sous forme de compositions ou d'examens venant à intervalles réguliers faire le point des acquisitions. En fait, la présentation stéréotypée de la plupart des problèmes rencontrés dans les livres anciens reposent sur certains types de raisonnement, faisant appel à des «formules» (PV = PA + B : le prix de vente est égal au prix d'achat augmenté du bénéfice) et rédigés sous une forme immuable, ôte à cet outil beaucoup de sa portée évaluative : elle tend à enfermer l'enfant dans des réactions mécaniques qui masquent éventuellement une insuffisante compréhension de la situation. Ainsi conçu, le problème devient une activité quasiment autonome, un exercice qui trouve en soi sa propre finalité au lieu d'être un véritable instrument éducatif.

C'est, bien évidemment, une toute autre dimension qu'il convient de donner au problème. Utilisé comme moyen de contrôle, il doit permettre, non de vérifier l'acquisition de réflexes conditionnés qui ne mettent pas en jeu une véritable analyse mathématique de la situation proposée, mais l'assimilation de concepts mathématiques clairement répertoriés. Aussi le problème de contrôle devra-t-il, de préférence, renvoyer à une notion connue «habillée» par une situation qui présentera une certaine originalité par rapport à celles qui ont permis d'induire la notion en question. S'il s'agit, par exemple, de contrôler l'acquisition du concept de «différence de deux nombres» au CE on évitera de proposer un texte, tel que celui-ci, qui suggère trop directement la réponse à donner (dans ce cas précis à cause de l'utilisation du verbe «rester»).

> *«Dans mon porte-monnaie j'ai 88 francs ; je fais un achat qui coûte 63 francs ; combien reste-t-il d'argent dans mon porte-monnaie».*

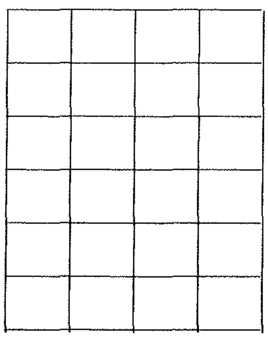
Du moins aura-t-on avantage à libeller la question d'une autre manière («combien ai-je d'argent dans mon porte-monnaie après l'achat» ?) et à lui associer d'autres rédactions plus originales.

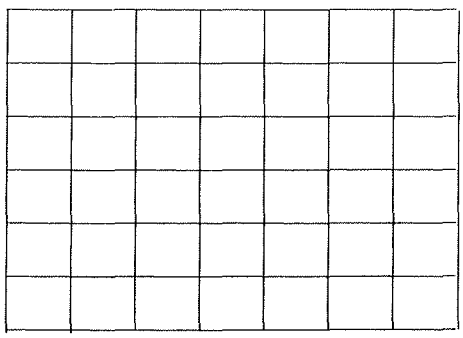
> *«88 coureurs ont pris le départ d'une course cycliste ; 63 coureurs franchissent la ligne d'arrivée. Combien de coureurs ont abandonné» ?*

1.2 Mais le problème peut aussi servir d'amorce à une activité mathématique sur un thème donné. Supposons, par exemple, qu'on veuille introduire la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ; on peut poser, d'emblée le problème suivant à toute la classe.

> *«Dans le fond de la salle de classe on installe côte-à-côte deux meubles de rangement de même hauteur ; le premier a 4 colonnes de 6 casiers ; le second a 7 colonnes de 6 casiers. De combien de casiers de rangement dispose-t-on pour entreposer le matériel» ?*

On pourra demander aux élèves de s'aider d'un croquis suggestif.





La mise en évidence de la propriété se fera par la confrontation des résultats fournis par les élèves selon qu'on calcule séparément le nombre de casiers ou qu'on s'intéresse au nombre des colonnes dont on dispose :

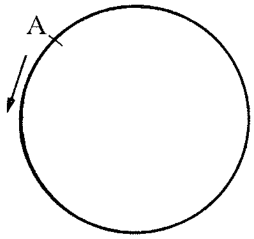
$$(4 \times 6) + (7 \times 6) = (4 + 7) \times 6.$$

Remarquons d'ailleurs que partir d'un problème inducteur permet souvent de substituer à la recherche individuelle **la réflexion par petits groupes** ; on passe ainsi à une technique pédagogique qui présente quelques avantages ; voici par exemple un problème que les élèves peuvent chercher par équipe sur le thème «lecture d'une carte routière» :

> *«On veut se rendre de la ville A à la ville B – trouver plusieurs itinéraires possibles et les longueurs de chacun d'eux».*

La comparaison des réponses permettra de déterminer l'itinéraire le plus court ou le plus long.

Voici un autre exemple, permettant, sur le thème de la «division euclidienne», de conduire une recherche par groupes :



Une piste circulaire a un périmètre de 600 m ; un cycliste partant de A dans le sens indiqué, effectue un parcours de 3750 m. Combien de tours complets a-t-il accomplis ? A quelle distance de A se trouve-t-il ?

Certains groupes pourraient être amenés à résoudre ce problème par soustractions successives, tandis que d'autres pourront d'emblée se référer à un répertoire multiplicatif : $600 \times 5 = 3000$

$600 \times 6 = 3600$

$600 \times 7 = 4200.$

De la confrontation des méthodes et de la discussion se dégagent les notions de diviseur, de quotient et de reste.

1.3 Disons aussi qu'une **séquence pédagogique entière peut consister en la résolution d'un problème** composé à l'aide de questions «gigognes». Le rôle du maître est alors de conduire la recherche et, quand celle-ci a abouti, de la «relancer» par une nouvelle interrogation adressée à toute la classe. Supposons par exemple qu'au cours moyen on se propose d'étudier la proportionnalité et ses propriétés. La séance correspondante peut être fondée sur la résolution d'un problème articulé en plusieurs parties étudiées successivement.

Soit deux paquets de jetons, les uns verts, les autres rouges. On décide de suivre la règle d'échange suivante : 3 jetons verts valent 2 jetons rouges.

1) Trouvez les nombres de jetons rouges correspondant à 6, 9, 12, 15 jetons verts ?

2) Combien de jetons verts s'échangent respectivement contre 10, 12, 18, 22 jetons rouges ?

3) Quel est l'opérateur qui fait passer de chacun des nombres de jetons rouges à chacun des nombres de jetons verts correspondant ?

4) Combien de jetons verts s'échangent contre 36 jetons rouges ? Cette détermination peut se faire de plusieurs manières.

5) Combien de jetons rouges s'échangent contre 150 jetons verts ? Il y a plusieurs manières de faire le calcul.

Bien entendu à chaque étape on s'efforce d'introduire l'étape suivante par une confrontation des résultats et une discussion au sujet des procédés employés ; les conclusions partielles auxquelles on aboutit sont explicitées.

Est-il besoin de dire qu'une séance conçue comme le développement d'une situation problèmatique n'appelle pas obligatoirement de problème final d'application. Il en est ainsi de presque toutes les leçons dites de «géométrie» qui se présentent comme une succession d'exercices d'observation d'objets géométriques, de pliage, de découpage, de construction à l'aide de la règle et du compas : l'activité des élèves en cours de séance se suffit à elle-même ; le contrôle apparaîtra au bout de plusieurs séances portant sur le même thème sous forme d'un test simple et rapide.

1.4 Enfin il convient d'évoquer **les problèmes qui se rencontrent occasionnellement et qui prolongent ou accompagnent des activités qui ne sont pas toutes de nature mathématique.** Une recherche géographique peut, par exemple, déboucher sur la comparaison des densités de population des divers états qui forment «l'Europe des neuf» ; une recherche sur la croissance d'un rameau au printemps peut conduire à une représentation graphique (croissance des internœuds et croissance totale en fonction du temps). En activités d'éveil scientifique les occasions de poser un problème mathématique se présentent dès qu'on passe du qualitatif au quantitatif ; par exemple l'étude de la transmission du mouvement circulaire à l'aide de roues engrenées s'accompagne de la confection d'un tableau de variation (nombres de tours des poulies) et du calcul d'un facteur de proportionnalité. Ajoutons que dans une classe organisée sous forme coopérative, les circonstances offrent facilement des problèmes à résoudre : tenue des comptes de la coopérative, calcul du prix de revient d'un journal scolaire, détermination du «bilan» d'une fête scolaire, etc... Les élèves, habitués à apporter en classe toutes sortes d'informations peuvent soumettre à leurs camarades des «problèmes vivants» que leur suggère la vie de la classe ou leur expérience vécue. Il y a là toute une «mine» de situations problèmatiques qu'on peut avantageusement exploiter.

II – LA FORME DES ENONCES.

Il est important que le texte d'un problème présente des qualités de clarté et de simplicité propres à aider l'enfant dans sa recherche.

2.1 **On évitera d'abord les énoncés condensés,** rédigés à l'aide d'un vocabulaire prétentieux et construits par emboitement de propositions difficiles à lire. Les anciens manuels (et parfois aussi les nouveaux) offrent de nombreux exemples relevant de ce type :

> *«Sachant qu'un groupe de propriétaires d'un immeuble doit payer la réfection des peintures de l'immeuble s'élevant à 4 160 F, qu'il y a 4 propriétaires par étage et que l'immeuble compte 8 étages, calculer la charge de chacun».*

2.3 Il nous semble intéressant d'entraîner les élèves à affronter **des problèmes dont les données ne sont pas distribuées dans l'ordre des calculs à effecter** et dont les énoncés fournissent des renseignements superflus. Voici un premier exemple (surabondance des données).

On donne les dimensions suivantes d'un rectangle

diagonale : 5 cm
largeur : 3 cm
longueur : 4 cm.

Construire le rectangle.

La construction peut se faire en ne prenant que deux dimensions sur les trois fournies.

Voici un second exemple : (une donnée est inutile).

Une salle de spectacle présente les caractéristiques suivantes :

12 rangées de «balcon» de 15 fauteuils chacune.
25 rangées de «parterre première catégorie» de 22 fauteuils chacune.
10 rangées de «parterre deuxième catégorie» de 20 fauteuils chacune.
La fosse d'orchestre permet de loger 35 musiciens.
Chaque rangée compte en outre un strapontin à chaque extrémité.

Combien de spectateurs peuvent assister à une représentation ?

Le traitement mécanique de ce texte conduit à compter les 35 fauteuils de musiciens comme tous disponibles et à oublier les strapontins. Il est évident qu'on ne saurait proposer une telle situation à des enfants qui n'auraient aucune idée de ce qu'est une salle de spectacle.

2.4 L'imagination doit avoir cours en mathématique.

Dans cette perspective, les problèmes peuvent fournir d'intéressantes occassions. Voici quelques possibilités à exploiter.

Tout au contraire, on s'efforcera de trouver une rédaction se présentant comme une suite de propositions indépendantes, chacune ne fournissant qu'un ou deux renseignements à la fois et écrite avec un vocabulaire simple. Avec ces principes le texte précédent pourrait devenir :

«On fait refaire les peintures intérieures d'un immeuble de 8 étages où tous les appartements sont identiques pour une somme de 4 160 F. Chaque étage est habité par 4 propriétaires. Combien chaque propriétaire devra-t-il payer» ?

Remarque.

On peut certes reprocher à un tel texte de prendre quelque liberté avec la réalité ; il ne peut en être autrement : les situations réelles sont si complexes qu'il faut nécessairement les simplifier quand on veut en faire des thèmes de réflexion mathématiques à l'intention des élèves de l'école élémentaire ; mais il convient alors que la transposition respecte l'essentiel des rapports entre les éléments de la situation réelle et que la démarche de calcul qui en découle ne s'éloigne pas trop de celle qui est réellement suivie.

2.2 A l'inverse il sera bon d'écarter les **énoncés «transparents»**, c'est-à-dire ceux qui, grâce à l'ordre des données et grâce aux indications fournies, suggèrent trop directement la marche à suivre et les calculs à effectuer. Sur le thème précédent, voici un énoncé qui nous paraît présenter ce défaut.

«Dans un immeuble de 8 étages il y a 4 propriétaires par étage. On fait refaire les peintures intérieures de l'immeuble pour une somme de 4 160 F. Les propriétaires se partagent également la dépense ; combien chacun d'eux aura-t-il à payer»?

L'ordre des données numériques reproduit l'ordre d'utilisation des nombres et l'expression «se partagent également» suggère qu'il faut diviser 4 160 par 32.

2.4.1 L'énoncé d'un problème étant donné, on peut simplement poser la question : «Que peut-on chercher» ?

«Patricia va faire des commissions pour maman ; elle achète 1 kg de sucre à 2 F., une boîte de haricots verts à 5 F., un paquet de lessive à 2,50 F. des pamplemousse à 1 F. chacun. Pour payer elle a 12 francs».

2.4.2 **Il peut manquer une ou plusieurs données** ; on laisse les enfants chercher jusqu'à ce qu'ils constatent que le problème n'est pas soluble. On leur demande alors de fixer à leur gré les données manquantes :

«Aujourd'hui Fabrice n'a pas de chance : toute la journée il n'a fait que perdre des billes en jouant avec ses camarades. Voici ses pertes successives :

avant l'entrée en classe du matin : 4 billes ;
à dix heures : 7 billes ;
à quatorze heures : 1 bille ;
à la récréation de l'après-midi : 2 billes.

Combien de billes a-t-il encore à la fin de la journée» ?

Dans l'exemple ci-dessus il conviendra de fixer le nombre de billes que possédait Fabrice en arrivant à l'école ; les enfants s'apercevront que ce nombre ne peut être inférieur à 14 ce qui peut donner lieu à une discussion intéressante.

2.4.3 **On peut proposer aux élèves une suite de calculs** qu'ils ont, en un premier temps, à effectuer et en un second temps à «habiller» à l'aide d'un texte à inventer.
Par exemple l'écriture : (84 + 25) - 69 peut suggérer les problèmes suivants :

«J'ai 84 centimes dans mon porte-monnaie ; maman me donne 25 centimes ; j'ai dépensé 69 centimes pour acheter des bonbons. Combien ai-je d'argent dans mon porte-monnaie» ?

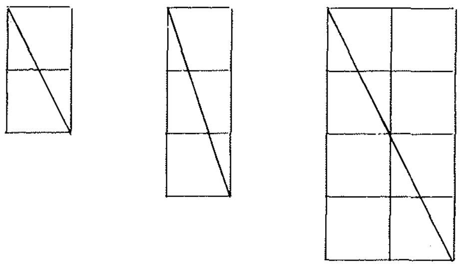
«Sur un parking il y a 84 voitures ; dans l'après-midi 25 voitures entrent dans le parking tandis que 69 en sortent. Combien de voitures sont encore sur le parking à la fin de l'après-midi» ?

On n'abusera pas toutefois de ce procédé qui peut faire retomber dans l'ornière du problème-type qu'on a eu tant de mal à éviter.

2.4.4 A la limite, l'énoncé peut se réduire à un croquis accompagné d'une indication brève et d'une question. Les élèves sont invités par cette amorce à se poser d'autres questions en examinant des cas similaires.

Exemple 1.

(D'après «Points de départ» Cs. Banwell, Kd. Saunders, Dg. Tahta, Edition Cédic, p. 23).



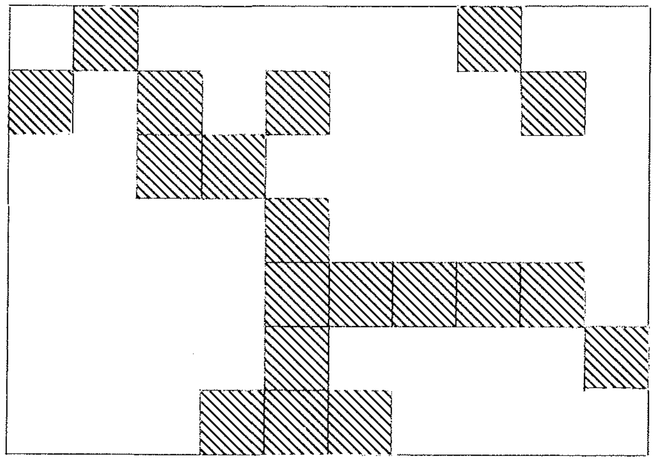
Combien de carreaux sont traversés par la diagonale d'un rectangle ?

On incitera les élèves à tracer d'autres rectangles afin qu'ils soient amenés à remettre en question eux-mêmes la loi à laquelle on peut penser en première approximation : $n = d_1 + d_2 - 1$ après de nombreux essais et tâtonnements.
(n : nombre de carreaux traversés ; d_1 et d_2 dimensions du rectangle).

Exemple 2.

(D'après une idée de Jacques Painchault).

Pour fabriquer le dessus d'une table en mosaïque j'ai utilisé des carreaux blancs et des carreaux coloriés. Voici le dessin de ma table où ne sont représentés que les carreaux coloriés. Combien ai-je utilisé de carreaux pour fabriquer le dessus de cette table ?



Solution.

Il y a 7 lignes et 10 colonnes donc 70 carreaux.

Sur ce thème les enfants peuvent imaginer toutes sortes de dessins les uns permettant de conclure, les autres non.

2.4.5 On peut enfin organiser un **concours de problèmes** ; les élèves construisent eux-mêmes des énoncés qu'ils soumettent à la sagacité de leurs camarades. Bien entendu, en un premier temps, les textes fournis par les enfants sont décevants parce qu'ils se contentent d'imiter des énoncés déjà rencontrés ; mais si on persévère et si on encourage les élèves à regarder autour d'eux les productions deviennent originales. C'est ainsi que dans la classe de M. Blochet (Ecole d'application - Grenoble, Elisée Chatin) un élève propose un jour le problème suivant inspiré par le célèbre dessin animé de la télévision : «Les Shadoks».

Les Shadoks ont une langue qui ne compte que quatre syllabes : ga, bu, zo, me ; combien de mots les shadoks peuvent-ils fabriquer ? On tient compte de l'ordre des syllabes (buzo n'est pas le même mot que zobu) et dans un mot il n'y a pas répétition d'une syllabe donnée.

Nous laissons aux lecteurs le soin de trouver la solution de ce sympathique problème et c'est avec plaisir que nous insèrerons leurs réponses dans un prochain bulletin.

III – LE CONTENU DES PROBLEMES.

La variété des situations débouchant sur des «problèmes» est telle qu'il est bien difficile de définir une typologie des contenus à proposer aux élèves. On peut toutefois développer quelques idées.

3.1 **Première recommandation : «éviter le problème type»** qui pourrait être proposé aux élèves avec l'intention de déclencher certaines réactions se situant loin de toute réflexion authentique et qui aboutirait à un conditionnement des enfants. C'est ainsi que les manuels anciens plaçaient sous une même rubrique toute une série d'énoncés construits de manière similaire et supposant une démarche de résolution identique d'un problème à l'autre. Si par exemple il s'agissait du chapitre «prix de vente, prix de revient, bénéfice, frais» on entraînait l'enfant à réagir de manière stéréotypée selon des schémas bien codifiés :

– S'il faut déterminer un prix de vente il convient de calculer une somme : PV = PR + B (prix de revient augmenté du bénéfice).

– Si le bénéfice est à déterminer, c'est une différence : B = PV - PR (prix de vente diminué du prix de revient).

– Si on calcule un prix de revient c'est encore une différence : PR = PV - B, à moins que ce ne soit la somme PR = PA + F (prix d'achat augmenté des frais).

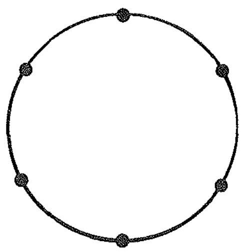
Le recours à des formules voire à des schémas mémorisés renforçait encore cette tendance.

Prenons un autre exemple fameux, celui des «intervalles». On procédait jadis à un inventaire de tous les cas possibles que les enfants étaient entraînés à reconnaître :

– Si les objets sont placés aux extrémités du segment (ou de la courbe non fermée) à partager, «il y a autant d'intervalles que d'objets moins un».

– S'il n'y a pas d'objets aux extrémités «le nombre des intervalles est égal au nombre des objets augmentés de un».

– Si la courbe jalonnée est fermée «le nombre d'intervalles est égal au nombre d'objets».



Un problème «d'intervalle» étant posé la performance de l'élève consistait à reconnaître l'un des schémas et à appliquer la règle correspondante.

En fuyant le «problème-type» on cherchera au contraire à placer l'élève dans des situations mathématiques qui obligent sans cesse à la découverte d'une démarche qui n'a pas forcément déjà été rencontrée ; c'est cette «accomodation» exigée de l'enfant qui nous paraît être éducative.

La plupart des manuels actuellement en usage s'attachent à éviter de classer les problèmes par type. On se contente, à juste raison, de faire référence à des thèmes plus généraux et proprement mathématiques autorisant une grande variété de situations : «relations, les dizaines, les nombres de 10 à 19, addition sans retenue, soustraction de grands nombres, ...». Cependant, tout danger n'est pas pour autant écarté ; par exemple si en étudiant «le sens de la multiplication» au CE, on ne propose à titre d'illustration et de contrôle que des problèmes conduisant à la détermination d'un produit, le risque est grand de conditionner les élèves à un seul type d'opération ; il est bon, pour l'éviter, que quelque **contre-exemple** se glisse dans la suite des énoncés à résoudre (calcul de sommes, calcul de différences). La vigilance sera également de règle quand on abordera des thèmes tels que ceux-ci pris dans un livre destiné au cours élémentaire :

«problèmes : diagrammes et tableaux» ;
«arbres» ;
«problèmes sur l'addition : tableaux» ;
«problèmes : soustractions et tableaux».

Comme on voit, il s'agit dans ces cas d'entraîner les enfants à l'usage **d'outils mathématiques très particuliers** ; si on n'y prend pas garde on court le risque de **lier étroitement tel type de problème à tel procédé de recherche** ; n'est-il pas préférable à l'inverse, pour traiter une situation, d'essayer successivement plusieurs outils et de comparer les cheminements empruntés ? Supposons, par exemple, que le texte suivant ait été proposé aux élèves.

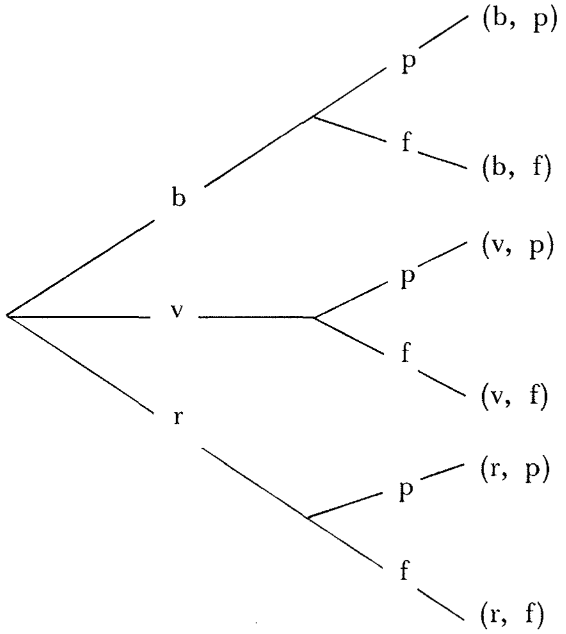
«Pour habiller sa poupée, Béatrice peut choisir entre trois robes de son trousseau (une blanche, une verte rayée, une rouge à pois) et deux couvre-chefs (un chapeau de paille, un feutre). Quelles sont toutes les tenues possibles de la poupée» ?

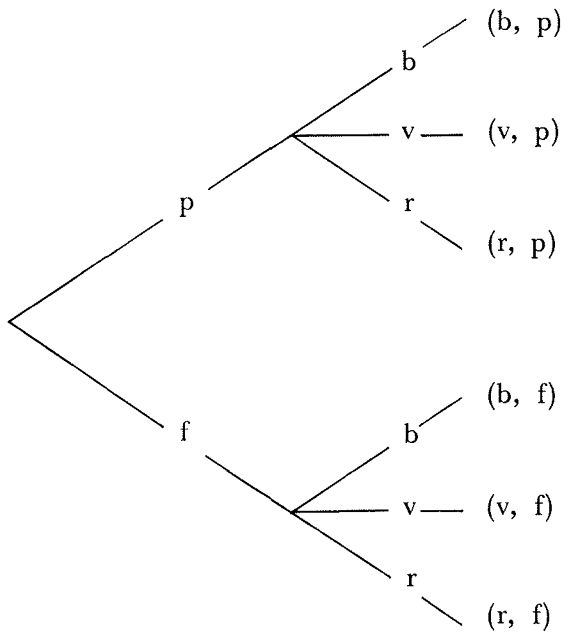
Ce problème qui consiste à chercher tous les couples du type (robe, couvre-chefs) peut se traiter :

— soit à l'aide d'un tableau à deux entrées :

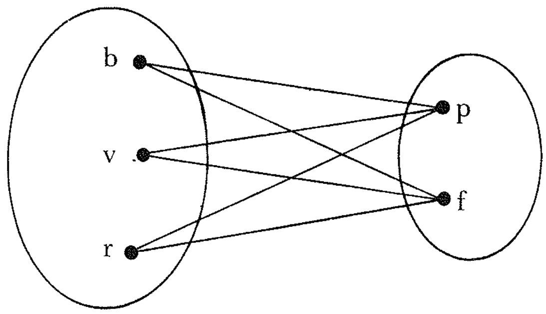
couvre-chefs / robes	b	v	r
p	(b, p)	(v, p)	(r, p)
f	(b, f)	(v, f)	(r, f)

— soit à l'aide d'un «arbre» (pouvant prendre deux formes) :





– soit à l'aide d'un diagramme :



Il est évident qu'il serait maladroit de privilégier un procédé par rapport aux autres. Il convient au contraire d'inciter les enfants à trouver la solution, qui est ici unique, par tous les moyens possibles.

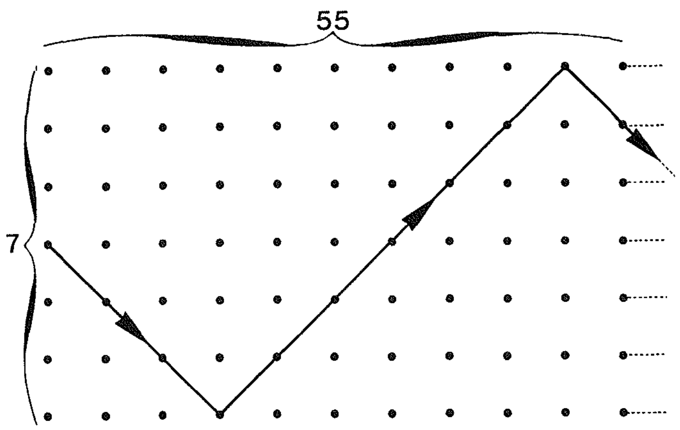
3.2 Seconde recommandation : se méfier des problèmes évoquant des situations faussement concrètes. Ce n'est pas parce qu'un énoncé renvoie à des objets familiers que la situation qu'il présente a une résonance concrète ; elle peut être, au contraire, tout à fait artificielle comme c'est le cas dans le problème suivant :

> *« Un jardin rectangulaire a une dimension double de l'autre. Pour le clôturer au prix de 5,40 F. le mètre linéaire, le propriétaire a supporté une dépense de 243 F. Quelles sont les dimensions du jardin »* ?

Est-il nécessaire de préciser que le propriétaire du jardin en question commence plus volontiers par mesurer les dimensions de son terrain pour calculer la dépense à engager et non l'inverse ?

Nuançons toutefois notre propos à ce sujet en rappelant la remarque du paragraphe 2.1 ci-dessus : une situation concrète peut rarement être proposée telle quelle à la réflexion des enfants ; il convient très souvent de la simplifier au préalable. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire que tout problème soit la traduction d'une situation réelle ; on ne se privera pas de faire appel à des énoncés où la fantaisie prend tous ses droits ; il faut alors que ni les élèves ni le maître ne soient dupes. Voici un exemple construit sur une idée de Jacques Painchault.

Une limace qui a «la bouche de travers» se promène en suivant les directions diagonales dans une planche de salades plantées sur 7 lignes et 55 colonnes. Calculer le nombre de salades mangées quand la limace suit l'itinéraire indiqué sur la figure. Faire le même calcul pour d'autres itinéraires (la limace part toujours d'une salade de la première colonne).



3.3 **C'est de préférence vers des situations «ouvertes»** qu'on se tournera, car dans la vie, on est souvent conduit à faire un **choix parmi plusieurs solutions possibles** ; on ne se privera donc pas de proposer des problèmes qui n'ont pas de solution unique tels que celui-ci :

Une boîte métallique a la forme d'un parallélépipède rectangle. La mesure du volume de cette boîte est 144 cm^3. Quelles dimensions peut avoir cette boîte ? (Les dimensions sont des nombres naturels exprimés en centimètres).

Dans le même ordre d'idée on peut demander quelles sont les dimensions d'un rectangle de 36 cm^2. Les enfants sont parfois surpris de constater que plusieurs rectangles peuvent être tracés.

Voici un second exemple.

Un voyageur va de MARSEILLE à PARIS, de nuit, par un train ordinaire et désire se coucher.

Les tarifs sont les suivants :

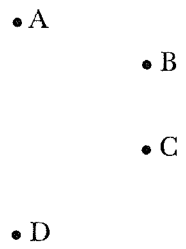
- *billet de seconde classe 102 F. ;*
- *couchette de seconde classe 20 F. de supplément ;*
- *billet de première classe 153 F. ;*
- *couchette de première classe 25 F. de supplément.*

Le supplément dans un wagon-lit est 71 F. quelle que soit la classe.

Calcule le prix pour les diverses solutions. Dis en particulier s'il est plus avantageux de prendre un wagon-lit seconde classe plutôt qu'une couchette de première classe. (D'après «Mathématique contemporaine» Thirioux et Gaspari, cours moyen, tome I, p. 83, (Magnard édit.)).

Un problème peut également être considéré comme «ouvert» si, une fois résolu, il peut se prolonger par des questions que l'élève se pose lui-même. Nous avons déjà présenté ci-dessus quelques énoncés qui offrent cette particularité : exemples 1 et 2 du paragraphe 2.4.4 ainsi que le problème de la «limace qui a la bouche de travers» (paragraphe 3.2) ; en voici un autre exemple.

Soit quatre points non alignés dessinés sur une feuille de papier. Combien de segments joignant deux de ces points peut-on tracer au maximum ?



Il est évident qu'à partir de cette situation on peut être amené à se poser le même problème pour 5 points, 6 points, etc... et à dresser un tableau donnant le nombre maximum de segments en fonction du nombre de points :

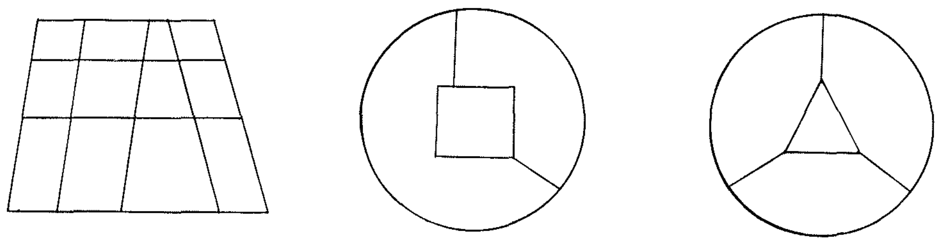
nombre de points	nombre de segments
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
.	.
.	.
.	.

En examimant le tableau une nouvelle recherche peut s'amorcer : Quelle progression permet de construire la liste des nombres : 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21... ?

Ainsi, par recherches successives non déterminées à l'avance, l'enfant découvre une loi numérique.

3.4 On admettra enfin qu'il **peut y avoir situation problèmatique même si cette situation ne repose pas sur des données numériques et ne conduit pas à des calculs.** Il en est ainsi de tous les problèmes de topologie, de géométrie, de logique. Nous en avons déjà fourni un exemple au paragraphe 3.1 (Béatrice qui habille sa poupée) ; en voici un autre :

> *«On veut colorier les figures suivantes de telle sorte qu'on n'utilise pas la même couleur pour deux régions voisines. Combien faut-il de couleur dans chaque cas»* ?

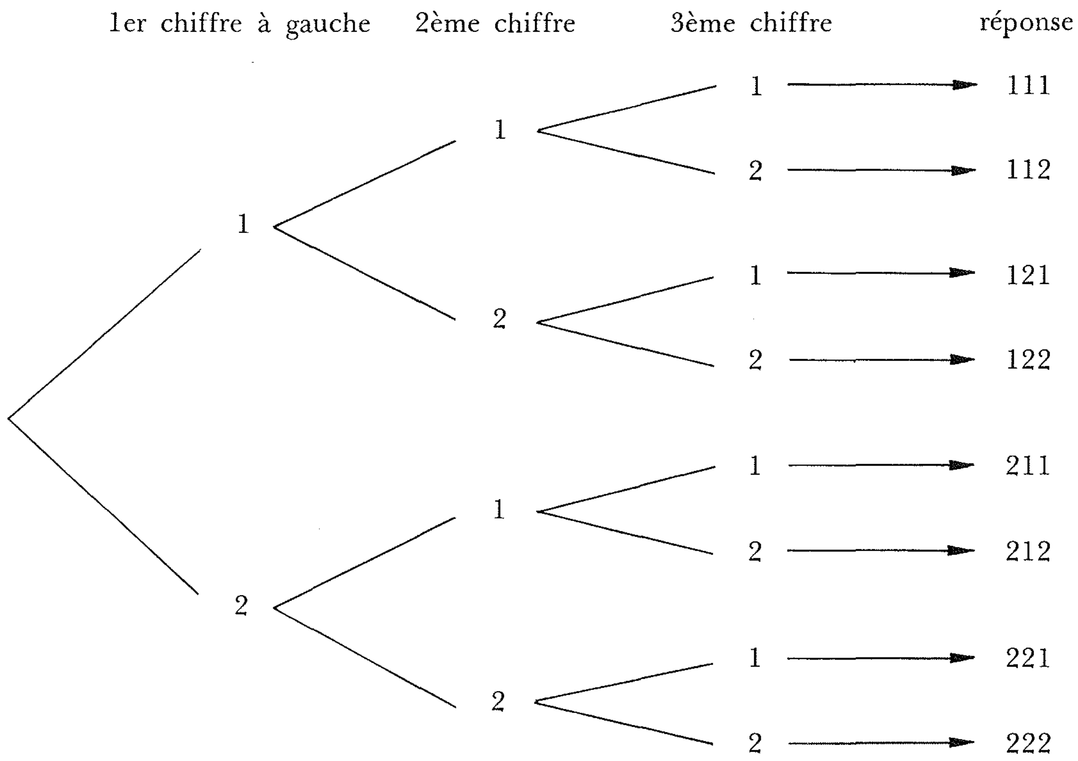


Cette recherche pourra être conduite par petits groupes travaillant sur des grandes feuilles qui seront ensuite exposées au tableau. On déterminera collectivement pour chaque cas le nombre minimum de couleurs utilisées.

Prenons pour terminer l'exemple d'un problème qui, tout en jouant sur des nombres, est en fait un problème de combinatoire simple ne faisant intervenir aucun calcul :

> *«Je veux écrire un nombre de 3 chiffres avec les chiffres 1 et 2 ; trouver tous les nombres que je peux ainsi écrire»*.

On pourra par exemple résoudre ce problème par la construction d'un arbre de choix.



Il s'agit là d'un «arbre dichotomique» ; ce n'est pas le seul type possible (cf. article de Claude COMITI. «Enumération à l'aide d'un arbre de choix ; dénombrements correspondants»).

IV – LA RESOLUTION DES PROBLEMES.

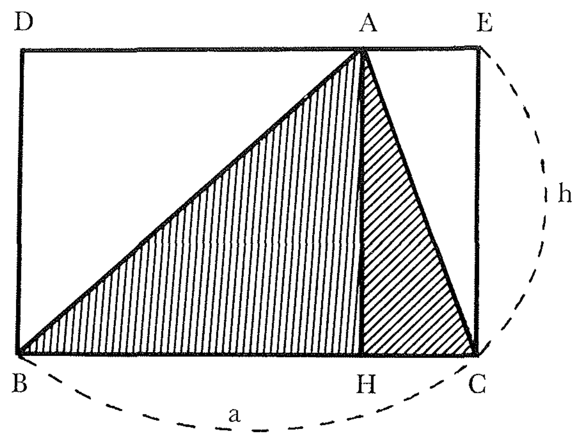
La définition donnée par les commentaires du programme nous paraît parfaitement résumer la démarche qui préside à la résolution d'un problème : «résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement les chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés». Ajoutons seulement que pratiquement, une fois la solution trouvée, l'enfant doit en général traduire soit oralement soit par écrit le cheminement suivi et les conclusions auxquelles on aboutit.

Nous nous garderons bien de tenter une classification des méthodes de résolution des problèmes : là encore la diversité est trop grande et, chaque problème ayant sa physionomie propre, il ne nous paraît pas intéressant de nous attarder sur cet aspect de la question. Voici toutefois quelques idées simples pouvant alimenter la discussion sur ce sujet :

4.1 Disons en premier lieu qu'on évitera de faire résoudre un problème à l'aide d'une formule littérale.

L'emploi d'une formule invite en effet à une conduite mécanique qui prive l'enfant d'une véritable réflexion éducative. C'est une sorte de «moule» qu'on risque de remplir sans vraiment saisir les rapports des données entre elles ; l'économie de pensée qu'elle représente peut être intéressante à un stade avancé de la scolarité ; à l'école élémentaire, elle dispense l'enfant non sans inconvénient d'une recherche formatrice.

Si, par exemple, au CM2 dans une série de problèmes il s'agit de déterminer l'aire d'un triangle, il vaut mieux à chaque fois raisonner sur une figure pour retrouver la méthode de calcul plutôt que de recourir à l'expression $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times h \times a$; ainsi à partir du triangle on construit un rectangle qu'il suffira de décomposer ensuite en quatre triangles rectangles superposables deux à deux par déplacement dans le plan.



4.2 Dans un problème on n'exigera pas des réponses fournissant des résultats numériques avec une illusoire précision.

Par exemple, à quoi bon exprimer les dimensions d'une salle en millimètres alors que l'erreur absolue commise sur une mesure de cette nature est de l'ordre du centimètre. On entraînera, au contraire, les élèves à exprimer des mesures de grandeurs à l'aide d'un encadrement.

Voici un premier exemple relatif à l'encadrement d'une aire :

«Soit S une surface découpée dans un morceau de carton (chaque groupe ou chaque élève est en possession d'un élément semblable).

1) Dessine S sur une feuille quadrillée en centimètres et donne un encadrement de l'aire de S.

2) Dessine S sur une feuille quadrillée en demi-centimètres et donne un encadrement de l'aire de S».

Voici un autre exemple où il s'agit d'encadrer une dépense exprimée en francs :

«En préparant les étrennes de papa et de maman, j'hésite entre des cadeaux dont les prix sont :

papa : 80 F. ou 130 F. ;
maman : 95 F. ou 145 F.

Quelle dépense maximum et quelle dépense minimum puis-je faire» ?

La réponse est bien évidemment : $175 \leqslant x \leqslant 275$.

Au cours moyen, le nombre des décimales dans l'énoncé d'un résultat sera subordonné à la précision des mesures fournies ; soit ; par exemple, à résoudre le problème que voici :

«En se pesant, les enfants du même âge trouvent les résultats suivants exprimés en kg :

Jacques : 30,4
Pierre : 32,5
Sophie : 28,2
Arthur : 31
Patricia : 30,6
Colette : 29,8

Quelle est la mesure moyenne de la masse des enfants» ?

Il est évident ici que les mesures des masses ayant été données à l'hectogramme près il serait malvenu d'annoncer le résultat sous la forme : «30,416» c'est-à-dire au gramme près ; les enfants devront être entraînés à «laisser tomber» les décimales inutiles ; ici la réponse : «30,4» suffira.

4.3 Entraîner les élèves à prévoir **l'ordre de grandeur** d'un résultat relève d'une bonne attitude pédagogique ; aussi sera-t-on inspiré de demander aux élèves, avant tout calcul écrit, quel sera «à peu près» la réponse à fournir. Pourquoi ne pas insérer parfois dans l'énoncé du problème lui-même une question du genre : «donne approximativement la valeur du résultat avant d'effectuer les calculs» ? On pourrait alors être en présence d'un texte tel que celui-ci :

«Le directeur de l'école a commandé en librairie :

1 250 cahiers à 1,25 F. l'un ;
820 crayons à 0,45 F. l'un ;
530 gommes à 0,85 F. l'une.

Avant de faire tes calculs prévois l'ordre de grandeur de la dépense.

Effectue les calculs et compare le résultat au nombre prévu».

Face à un problème de ce genre, l'enfant sera conduit à raisonner ainsi oralement :

* Chaque cahier vaut un peu plus de 1 F. et il y en a un peu plus de 1 000 ; cela coûtera donc à peu près 1 500 F.

* Chaque crayon vaut un peu moins d'un 1/2 francs ; la dépense sera de l'ordre de 400 F.

* Il y a un peu plus de 500 gommes et chacune d'elles coûte un peu moins de 1 F. ; il faut s'attendre à une dépense de l'ordre de 500 F.

* Au total le montant de la facture sera voisin de 2 400 F. (Le calcul exact donne 2 382 F.).

L'avantage d'une telle démarche est double : elle permet d'abord à l'enfant de mieux dominer les calculs et de ne pas perdre de vue la chaîne du raisonnement ; elle représente ensuite un moyen de vérifier un calcul en évitant les erreurs grossières. Ajoutons que c'est ce procédé de calcul rapide que l'on utilise couramment dans la vie pour supputer le montant d'une dépense ou d'un gain.

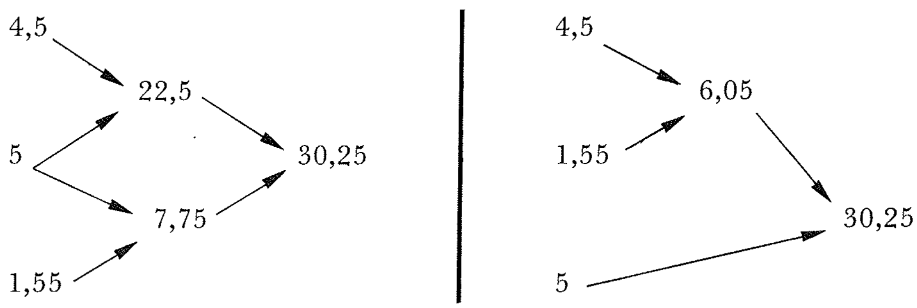
4.4 Certains problèmes peuvent se résoudre en suivant des cheminements variés.

Il sera éducatif d'entraîner les élèves à trouver pour un même énoncé les voies différentes conduisant à un résultat ; on veillera donc à ne pas écarter les diverses démarches heuristiques (1) suivies par les enfants en laissant à chacun la liberté d'exposer celle qu'il a choisie ; au cours d'une phase de synthèses la confrontation permettra de déterminer le processus le plus «économique».

Voici un exemple :

> *«Pour fréquenter l'école Eric doit chaque jour payer son repas à la cantine (soit 4,50 F.) et payer le car de transport scolaire (soit 1,55 F.). Combien Eric dépense-t-il par semaine (5 jours de classe)» ?*

Les deux cheminements possibles sont :



La seconde méthode (calcul de la dépense journalière) se prête plus facilement au calcul rapide.

Remarque.

Les schémas fléchés ci-dessus n'ont pas de signification mathématique ; ils ont été placés dans le cadre de cet exposé pour l'éclairer ; il n'y a donc pas lieu de s'en inspirer systématiquement en classe.

4.5 Un certain nombre d'idées reçues font croire **qu'il n'y a problème que si on rédige une suite de réponses sous les rubriques classiques : «Solution» «Opération»**. Outre que la «solution» n'est le plus souvent que l'annonce des résultats, en procédant ainsi on ignore les autres formes possibles que peut prendre le «traitement» d'une situation problèmatique ; sans qu'il soit question d'en présenter ici

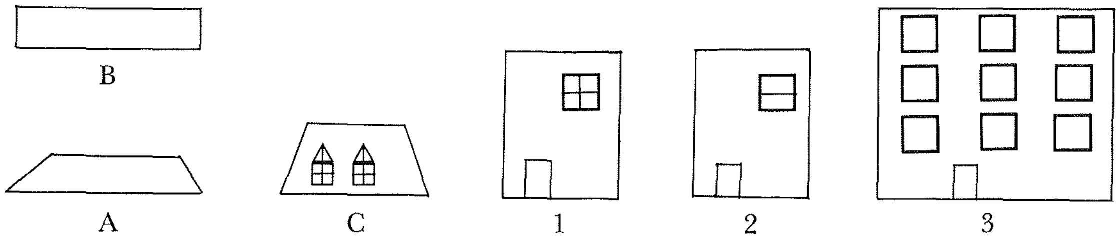
(1) c'est-à-dire : démarche de recherche.

un inventaire complet, le réflexion s'arrête volontiers sur les formes de résolutions suivantes qui peuvent être soit suggérées par le texte soit laissées à l'initiative de l'élève :

4.5.1 La résolution du problème peut consister en **l'exécution d'un dessin.**

Exemple 1.

Voici les pièces d'un jeu de construction.



Dessine les constructions représentées par les couples : (1, A), (2, A), (3, B), (1, C), (2, C).

(D'après Mathématique contemporaine CE2 – p.11 – Thirioux - Magnard Editeur).

Exemple 2.

Pour payer 27 centimes tu donnes au marchand une pièce de 1 F. Dessine les pièces qu'il te rendra.

4.5.2 On peut demander aux élèves de dessiner un **diagramme.**

Exemple.

On donne les deux ensembles :

$$A = \{1, 5, 3, 7\}$$
$$B = \{14, 21, 35, 17, 101, 23\}$$

Représenter la relation de A vers B définie par «... divise exactement...» à l'aide d'un diagramme avec des flèches.

4.5.3 On peut inviter les élèves à **dresser un tableau.**

Exemple.

Dans un magasin d'alimentation il y a le mardi matin :

135 bouteilles de vin rouge ;
43 bouteilles de vin blanc ;
151 bouteilles d'eau minérale ;
57 bouteilles de cidre.

Dans la journée les clients achètent :

112 bouteilles de vin rouge ;
27 bouteilles de vin blanc ;
88 bouteilles d'eau minérale ;
15 bouteilles de cidre.

Le soir après la fermeture, on réapprovisionne les rayons en apportant :

100 bouteilles de vin rouge ;
52 bouteilles de vin blanc ;
80 bouteilles d'eau minérale ;
32 bouteilles de cidre.

Fais un tableau qui fera apparaître toutes ces données ainsi que le nombre des bouteilles de chaque catégorie dans les rayons le mercredi matin.

4.5.4 Résoudre un problème peut aussi revenir à **compléter un tableau.**

Exemple 1.

Complète le tableau en écrivant V si la relation écrite est vraie, F si elle est fausse :

$5 + 9 + 4 = 18$	
$3 + 4 + 7 \neq 23$	
$20 + 10 + 5 > 31$	
$15 + 20 \neq 35$	
$7 + 0 + 8 \neq 9 + 6$	
$17 + 27 > 37$	

Exemple 2.

Complète la table de multiplication :

×	7	18	1	20	3
15				300	
0					
13	91		13		
22					

Exemple 3.

Un autobus de transport d'élèves «ramasse» des garçons et des filles dans trois groupes scolaires différents : A, B, C. Complète le tableau ci-dessous en calculant le nombre de garçons transportés, le nombre de filles transportées, le nombre d'enfants transportés pour chacun des trois groupes scolaires, le nombre total d'enfants transportés.

	groupe A	groupe B	groupe C	
garçons	15	26	34	
filles	10	25	41	

4.5.5 La solution d'un problème peut être le dessin d'un **arbre.** Nous avons déjà rencontré des exemples de ce type. (paragraphe 3.4). Voici un autre énoncé.

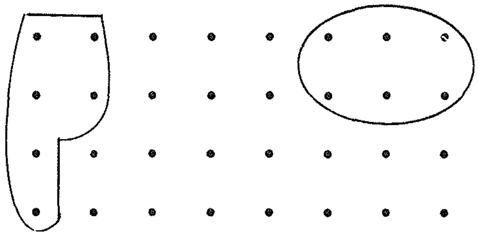
Au restaurant le menu à la carte porte les indications suivantes :

entrée : jambon ou hors-d'œuvre ou terrine de pâté ;
plat : côte de porc grillée ou poulet ;
dessert : glace ou tartelette.

Quels sont tous les menus possibles ?

4.5.6 Pour répondre à la question posée il peut s'agir **de terminer un schéma** dont l'amorce est proposée aux élèves ; tel est le cas de l'énoncé suivant.

Voici un dessin qu'Isabelle a commencé. Termine-le.



L'intention est là, de toute évidence, d'appliquer une règle de groupement par six des éléments d'une collection. Mais les réponses peuvent être variées et on les accepte toutes.

4.5.7 La réponse peut prendre la **forme d'une phrase écrite par l'élève** comme dans cet exemple.

Pierre a calculé une somme :

$$\begin{array}{r} 234 \\ +\ 403 \\ \hline 1\ 041 \end{array}$$

Dans quelle base a-t-il opéré ?

Il suffira que l'élève écrive sur son cahier : «c'est la base six».

4.5.8 Un problème peut être un **exercice à «trou»** que l'élève doit remplir convenablement soit à l'aide de chiffres, soit d'une autre manière.

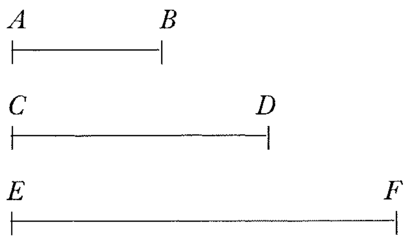
Exemple 1.

Pierre a fait une multiplication ; pour plaisanter son camarade a effacé certains chiffres ; retrouve ces chiffres.

$$\begin{array}{rccc} & & 2 & . \\ \times & & . & 4 \\ \hline & . & . & . \\ & 2 & . & \\ \hline & . & 5 & 0 \end{array}$$

Exemple 2.

Voici des segments.



En prenant [AB] comme unité (la mesure de sa longueur est $AB = 1$) complète les relations :

.... $< CD <$ ....

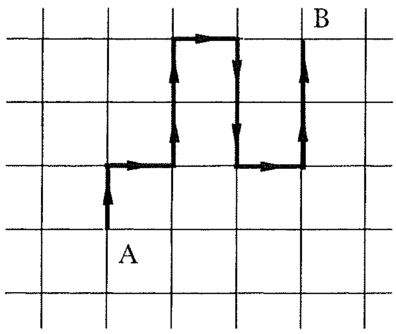
.... $< EF <$ ....

Remarque.

Le texte ci-dessus est rédigé avec les conventions suivantes : le segment d'extrémité A et B (ensemble de points) est noté [AB] ; la mesure de la longueur du segment [AB] est représentée par : AB.

Exemple 3.

Sur un quadrillage on peut se déplacer d'un pas à gauche (noté g) d'un pas à droite (d) d'un pas vers le haut (h) d'un pas vers le bas (b).



1) Le code du chemin représenté sur le quadrillage par → est : ....
Ecrire le code d'un autre chemin pour aller de A à B.

2) En partant de A on suit un autre chemin codé : d d b d h h g g h g ; on arrive en C ; marque le point C sur le quadrillage ; écris le code d'un autre chemin plus simple pour aller de A à C : ......

4.5.9 Disons enfin que les problèmes de géométrie et de topologie se résolvent par un tracé ou un coloriage. Nous en avons déjà donné un exemple (paragraphe 3.4). En voici un autre.

Trace une bande. Prends un point A en dehors de la bande ; trace une demi-droite qui coupe la bande en B et C ; trace une deuxième demi-droite qui coupe la bande en D et E. Décompose le quadrilatère BCDE en un parallélogramme et un triangle.

Il est évident que le tracé correctement exécuté suffit ; il sera inutile de demander à l'élève d'expliquer ce qu'il a fait.

4.6 Si on s'intéresse maintenant à **la trace écrite qui prolonge et conclut la résolution d'un problème,** on peut formuler pour terminer deux recommandations, l'une relative à la présentation des résultats, l'autre à la transcription des calculs.

* **Première recommandation** : ne pas mêler langage courant et langage mathématique. Illustrons ce précepte par un exemple :

Pierre achète une bicyclette dont le prix est 381 F.; il achète en même temps quelques accessoires : un porte-bagage à 17 F., un rétroviseur à 5 F., un anti-vol à 10 F. A combien lui revient sa bicyclette ?

Considérons la réponse telle qu'elle est le plus souvent libellée : «la bicyclette de Pierre revient à 381 + 17 + 5 + 10 = 413 F.». L'écriture «413 F.» **n'est pas celle d'un nombre mais d'une valeur monétaire exprimée à l'aide d'une certaine unité** ; les commentaires du programme du 2/1/1970 nous invitent d'ailleurs à abandonner la distinction, faite par les I. O. de 1945, entre nombre «abstrait» (ici 413) et nombre «concret» (ici 413 F.). La notation «413 F.» relève donc du langage courant et c'est celui qui est employé en général dans les énoncés ou dans l'annonce d'un résultat (ici «la bicyclette de Pierre revient à...»). Par contre la suite des signes : «381 + 17 + 5 + 10», est l'expression d'un nombre sous une forme additive ; c'est une écriture mathématique. Or on voit ici, placés à un même niveau, langage courant et langage mathématique ; en particulier l'usage du signe = ne respecte pas le statut de l'égalité puisque les signifiants écrits de part et d'autre de ce signe ne renvoient pas au même signifié ; le premier membre de l'égalité est l'écriture d'un nombre tandis que le second évoque une grandeur.

Que convient-il donc d'écrire ? Sans doute existe-t-il plusieurs manières de lever l'ambiguïté ; en voici une qui consiste à séparer très nettement ce qui ressortit au langage courant (2ème ligne) et ce qui relève du langage mathématique (1ère ligne) :

$381 + 17 + 5 + 10 = 413.$
La bicyclette de Pierre revient à 413 F.

Autrement dit, la première ligne est un «schéma mathématique» décrivant la seconde ligne qui traduit une situation réelle ; il convient que les élèves soient entraînés à bien distinguer ces deux niveaux.

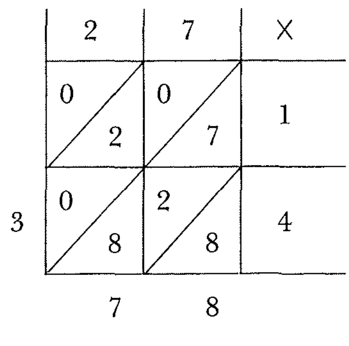
* **Deuxième recommandation** : ne pas exiger des élèves qu'ils transcrivent tous les calculs qu'ils ont effectués. En particulier les calculs qui sont normalement faits mentalement ou par des procédés rapides ne gagnent rien à être traduits par écrit. Pourquoi par exemple «poser l'opération» suivante :

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times\ 3 \\ \hline 180 \end{array}$$

dès lors que le produit 180 peut être déterminé «de tête» ?

Ajoutons qu'un même résultat peut être trouvé par des méthodes opératoires diverses qu'il faudra savoir accepter des élèves même si elles ne sont pas «classiques». Par exemple le produit 27 X 14 peut être calculé à l'aide de l'un des alogorithmes suivants :

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 14 \\ \hline 108 \\ 27 \\ \hline 378 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ \times\ 14 \\ \hline 270 \\ 108 \\ \hline 378 \end{array}$$



(algorithme à la grecque)

Au terme de ces quelques remarques il est évident que le problème demeure un outil pédagogique de premier choix et c'est à juste titre que les nouveaux manuels de mathématique destinés à l'enseignement primaire lui réservent une place importante. Il est bon cependant qu'il ne soit utilisé qu'à bon escient c'est-à-dire en sachant que de la conception étroite traditionnelle on passe, comme nous y invite le commentaire du programme du 2 janvier 1970, à la notion plus large et plus riche de «situation problématique». En outre il nous semble capital de faire jouer au problème des rôles multiples : moyen de contrôle, il peut aussi servir d'amorce et de point d'appui aux activités mathématiques et éventuellement illustrer certaines activités d'éveil. Un soin particulier sera apporté à la forme des énoncés qui ne seront ni difficiles à lire ni trop transparents. En abandonnant le «problème-type» on s'orientera volontiers vers des situations «ouvertes» offrant plusieurs voies de recherche possibles. Quant à la résolution des problèmes, elle ne saurait sans dommage se laisser enfermer dans une typologie trop restreinte : les formules ne sont pas de saison à l'école élémentaire et c'est avec fruit que les élèves seront conduits à s'intéresser à l'ordre de grandeur des résultats et à la recherche des divers cheminements aboutissant à une même conclusion. Que la variété des formes de résolution soit aussi pour le maître un souci permanent. Habitués à passer d'une solution à une autre, à utiliser pour résoudre les problèmes des procédés divers, à mettre en œuvre leur curiosité d'esprit et leur imagination créatrice, les élèves verront s'affermir «leur pensée mathématique» et prendront mieux «connaissance du pouvoir qu'elle leur donne sur le monde extérieur» (commentaire du programme 1ère partie, paragraphe 8).