COMMENT LE CURSUS SECONDAIRE PREPARE-T-IL LES ELEVES AUX ETUDES UNIVERSITAIRES ?

Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie

Isabelle BLOCH
IUFM d'Aquitaine

Imène GHEDAMSI
ISEFC - Tunis

Résumé : La transition entre le lycée et l'Université est un point crucial pour l'orientation des bacheliers et pour le recrutement des étudiants poursuivant des études scientifiques. Nous nous sommes posé la question de l'adéquation du programme et des pratiques de l'enseignement secondaire pour préparer les élèves aux études supérieures, et tout particulièrement à l'apprentissage des notions d'analyse ; et, parallèlement, de la prise en compte des connaissances du secondaire par les professeurs enseignant à l'Université. Les indicateurs que nous avons dégagés font apparaître l'existence d'un écart important des pratiques et des modes d'enseignement. Si l'on souhaite encourager l'entrée dans les filières scientifiques, la responsabilité de la réduction de cet écart ne peut être laissée aux seuls étudiants comme c'est actuellement le cas : elle doit être prise en charge de façon différenciée par les deux institutions.

Introduction

1. Problématique

La transition entre deux institutions d'enseignement (primaire/collège, collège/lycée...) est toujours délicate : l'institution de niveau supérieur a tendance à rejeter sur l'institution précédente la responsabilité des échecs et des ignorances des élèves. Un exemple significatif est celui de la transition entre l'enseignement secondaire et les études scientifiques à l'Université ; une conséquence sociale bien connue des difficultés de cette transition – dont témoignent aussi bien professeurs qu'étudiants – est la raréfaction socialement et scientifiquement préoccupante des étudiants poursuivant des études scientifiques, particulièrement en mathématiques. Le cas de la Tunisie est certes différent car les étudiants n'ayant pas la possibilité, en raison de l'insuffisance de leurs résultats au baccalauréat, de poursuive les études supérieures qu'ils désirent, se dirigent ou sont affectés dans les facultés de sciences ; il n'y a donc pas tant un problème de quantité que plutôt de niveau et de motivation. Cette affectation non choisie ne fait que rendre plus sensibles les difficultés liées aux connaissances issues de l'enseignement secondaire.

Nous avons entrepris l'étude de cette transition dans le cas de l'enseignement de l'analyse, domaine pointé comme source de difficultés considérables par les étudiants comme par les professeurs. L'analyse est en effet un champ majeur du savoir à l'Université ; ce champ n'a été que peu fréquenté par les élèves au lycée, et sous des formes censées favoriser plutôt une première appréhension des concepts basée sur l'intuition que l'assimilation de règles formelles de validation et l'entrée dans une théorie mathématique.

Se pose alors la question de la réalité du rapport des élèves aux savoirs de l'analyse à la sortie du lycée et de son degré d'adéquation avec celui attendu à l'entrée à l'université ; quelles peuvent être les retombées de la distance entre les connaissances et les savoir-faire attendus et les savoirs effectivement disponibles ?

Dans la suite du texte, nous nous attacherons à exposer l'état des lieux dans les deux institutions en référence aux pratiques attendues, visibles à travers l'analyse des documents officiels[1]. Nous nous interrogerons, au fur et à mesure de l'étude, sur la prise en compte par les deux institutions des phénomènes liés à la transition. Dans la troisième partie nous ferons une synthèse des observations en proposant une analyse à l'aide des variables macro-didactiques que l'étude a permis de définir, puis nous conclurons sur quelques perspectives d'aménagement de la transition.

2. Méthodologie

L'étude a été réalisée en Tunisie, dont le système secondaire et supérieur est très proche du système français, et la tradition de haut niveau universitaire en mathématiques bien implantée. L'étude faite concerne les deux dernières années du lycée et la première année universitaire. Le corpus étudié comporte des cours et exercices de manuels de lycée, et des exercices de TD d'Université.[2] La structure de l'enseignement secondaire tunisien diffère quelque peu du système français, essentiellement en ce que le secondaire supérieur – le lycée – comprend quatre années et non trois ; de plus il existe encore des filières différenciées Mathématiques /Physique et Sciences expérimentales. Les programmes sont nationaux ainsi que les manuels, ce qui rend l'étude plus aisée en supprimant la variabilité due aux différences dans les manuels destinés à l'enseignement. Le programme de la première année d'Université est sensiblement le même que celui des universités françaises en filière Mathématiques et Informatique.

I. L'enseignement de l'analyse au secondaire

I.1. Objets de l'Analyse : existence instable

L'étude historique de l'enseignement de l'Analyse au lycée montre comment depuis trente ans l'enseignement secondaire, à la recherche d'une progression d'enseignement des notions d'analyse, plus spécifiquement des notions de suite, limite de suite, limite de

---

1. Dans les deux dernières années du lycée option scientifique, nous avons étudié le programme et les manuels officiels ; à l'université, les 6 premières séries de travaux dirigés en analyse ainsi que le cours correspondant.

2. La totalité de l'étude peut être trouvée dans le mémoire de DEA de I.Ghedamsi : "Transition lycée/université en Analyse : mise en évidence de facteurs de ruptures. Cas de la limite", ISEFC et Université Bordeaux2, co-encadré par Isabelle Bloch et Mahdi Abdeljaouad.

fonction, oscille d'une organisation basée sur des problèmes et peu de justifications théoriques (avant 1968), au tout formel des années 1970, puis à l'introduction d'éléments relatifs aux approximations. Actuellement, cet enseignement semble stabilisé autour de la manipulation d'un certain nombre d'ostensifs relatifs aux fonctions, limites et dérivées ; les sujets du baccalauréat, qui pilotent dans une mesure certaine l'enseignement effectif, s'avèrent basés sur des problèmes très stéréotypés. Une épreuve de "Restitution organisée de connaissances" a été programmée en France pour lutter contre cette sclérose des épreuves d'examen.

La succession rapide des réformes et l'état actuel jugé peu satisfaisant montrent que l'institution peine à trouver les moyens adéquats pour prendre en compte deux spécificités de l'enseignement d'une théorie complexe comme l'Analyse :

- Le savoir ne peut s'y construire de façon définitive lors de la première rencontre, et il faut nécessairement prévoir une progression qui fasse revenir sur les objets mathématiques dans différents problèmes afin d'enrichir leur fonctionnement. Ceci renvoie au fait que le sens d'un objet mathématique n'est jamais défini de façon isolée, mais il se construit dans son articulation et ses liens de fonctionnement avec d'autres objets de la théorie ; il en résulte que le sens d'un concept est toujours à venir, dans les possibilités futures de son fonctionnement et des relations avec les autres objets. L'enseignement doit donc se résigner, comme le dit d'ailleurs G.Brousseau dans *"Fondements et méthodes de la didactique"* [3], à n'enseigner qu'un sens provisoire, et le formalisme n'est, pas plus qu'un autre registre de représentation, garant du sens 'définitif'.

- Dans une théorie comme l'Analyse, les savoirs sont en fait en réseau à l'intérieur de la théorie et il est difficile de prévoir l'apprentissage d'un concept isolé ainsi qu'une progression linéaire de l'enseignement. De ce fait, il est sans doute illusoire de prétendre à une organisation linéaire optimale en attribuant des valeurs différentes aux mêmes variables à disposition pour l'enseignement du début de l'analyse, comme cela a pu être tenté en France dans les différentes réformes. Ces variables peuvent être par exemple : la chronologie d'apparition des premières notions, le degré d'utilisation des règles de la logique, le système de validation (algèbre des limites, définitions formelles, ou calculs basés sur des approximations), le degré de formalisation et/ou de généralisation.

Cette organisation des concepts en réseau devrait obliger à prévoir aussi le champ de problèmes que les étudiants vont pouvoir rencontrer et sur lequel ils vont pouvoir appliquer les techniques enseignées et perfectionner leur compréhension des savoirs de l'analyse.

Ces caractéristiques ne sont d'ailleurs pas propres à l'analyse, et on les retrouve dans l'apprentissage de toutes les théories complexes ; ainsi l'enseignement de l'algèbre linéaire a fait l'objet d'études de didactique mettant en évidence les mêmes difficultés de construction de connaissances provisoires et du savoir formel utile[4], et le même besoin de construction de problèmes pertinents.

---

3. Brousseau, 1998.
4 Cf. les travaux de Dorier, Gueudet, Robert.

I.2 Le contrat didactique relatif à la validation

Depuis la dernière réforme en Tunisie (1992 modifiée 1998), le programme de mathématique stipule : *"On évitera toute formalisation des définitions relatives à la limite d'une fonction"*[5]. L'organisation choisie dans les manuels met donc une insistance importante sur l'algèbre des limites, allant de pair avec quelques techniques de majorations / minorations. Selon les objectifs des programmes, l'élève sera capable d'étudier et /ou de calculer des limites de fonctions à partir des théorèmes d'opérations sur les limites, des théorèmes relatifs aux limites et ordres et des limites de fonctions de références à savoir : $x \to x$, $x \to a$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^n$, et $x \to 1/x$.

Mais l'absence de définition formelle de la limite d'une fonction dans le manuel de terminale scientifique option Mathématiques (1998) ne s'accompagne pas d'une organisation alternative cohérente en ce qui concerne la validation. Ainsi dans la démonstration du théorème relatif à l'unicité de la limite, les auteurs utilisent quasi subrepticement cette définition formelle alors que celle-ci n'a pas été énoncée comme telle, et qu'elle n'a pas reçu de statut clair pour la validation : rien n'est indiqué de l'usage du formalisme dans le travail des élèves. Il semblerait qu'il y ait là une volonté de réintroduction de "rigueur mathématique" ; mais les tâches prévues dans le manuel n'organisent pas cet usage du formalisme : quand doit-on utiliser cette définition ? Quand peut-on s'en passer et, soit admettre le résultat, soit user d'un autre moyen de validation ? Quelles propriétés générales les élèves sont-ils supposés connaître et utiliser ? Il reste à la charge du professeur de gérer l'articulation entre l'intuition et les outils de validation.

Un exemple de cette difficulté relative à la 'rigueur mathématique' est donné par l'introduction, en Terminale, des limites des fonctions trigonométriques, ainsi que logarithme et exponentielle. Concernant les limites des fonctions sinus et cosinus, le manuel de 3ème année admet $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, puis l'utilise (ainsi que certaines formules trigonométriques) pour retrouver les autres limites usuelles.

Pour ce qui est des limites des fonctions logarithmes et exponentielles, le manuel de 4ème année propose le paragraphe suivant pour déterminer la limite de *lnx* lorsque *x* tend vers $+\infty$:

Activité : A l'aide d'une calculatrice compléter le tableau suivant :

x	400	8.10^3	5.10^5	2^7	2^{15}	2^{1000}
lnx						

Que peut-on constater sur le comportement de lnx, lorsque x devient de plus en plus grand ?

Cette activité est suivie d'un exercice entièrement résolu sur le manuel :

Soit A un réel strictement positif.

5 Document officiel 1998, classe de 3ème année Mathématiques (année précédant le baccalauréat).

1- *Trouver un entier naturel n tel que : $ln(2^n) > A$.*

2- *Trouver un réel strictement positif B tel que : $x > B \Rightarrow lnx > A$ Que peut-on conclure ?*

En utilisant ce résultat, quelques encadrements et des changements de variables explicités par les énoncés, le reste des limites usuelles de la fonction logarithme est établi. Utilisant le fait que la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien, les limites à l'infini de la fonction exponentielle sont établies, et le reste des limites usuelles concernant la fonction exponentielle est établi moyennant des changements de variables explicitement donnés dans les énoncés.

Ceci ne peut pas jouer réellement le rôle de démonstration mais peut être considéré comme une façon dont intervient, dans le contrat didactique en vigueur au secondaire, la 'rigueur' mathématique, ici constituée par des éléments de validation. Ce que relève l'analyse didactique, c'est :

- le statut peu clair de cette validation ;
- la non responsabilité des élèves dans la prise en charge de ce calcul ;
- le caractère local et non relié de ces éléments de théorie.

Dans le manuel officiel de Terminale option Mathématiques, les tâches de type *recherche de l'existence d'un nombre*, pour lesquelles la détermination algébrique n'est en général pas possible, sont justifiées par des théorèmes d'existence sans calcul d'une approximation. La nature de l'Analyse rend difficile d'opter pour un moyen privilégié de validation, en excluant les autres : les moyens non déclarés officiellement se trouvent réintroduits subrepticement, mais du même coup leur statut reste obscur.

Ainsi dans un exercice – où il s'agit de trouver la limite d'une suite de terme général $u_n=2n+\cos n$ – il apparaît qu'on s'appuie, pour la démonstration, sur des propriétés qui n'ont pas encore été démontrées explicitement. En effet on y utilise l'inégalité $u_n \geq 2n-1$, or la technologie légitimant le passage à la limite n'a pas encore été instaurée (théorème sur $u_n \geq v_n$ et $v_n \to +\infty$). Mais l'intuition et le théorème se renvoient dos à dos : le théorème est introduit en suivant tout en étant 'appuyé' sur l'intuition, et réciproquement.

Enfin, les types de raisonnements requis sont parfois difficiles à identifier mais nous pouvons noter que le programme de 1998 ne prévoit pas de travail sur les raisonnements de type "condition nécessaire et/ou suffisante" ; contrairement au programme officiel de 1988 qui stipulait : *" Il ne sera pas perdu de vue que l'entraînement à l'utilisation des modes de raisonnement aussi divers que possibles amènera, entre autre, les élèves à distinguer entre condition nécessaire et condition suffisante, à formuler des propositions ainsi que leurs négations."*

L'enseignement secondaire semble donc faire une tentative d'introduction de l'analyse basée sur l'intuition ; tout se passe cependant comme si les choix didactiques conduisaient à piloter la "rigueur" de cet enseignement par la validation formelle, mais de façon non déclarée, faute sans doute d'avoir pu trouver une alternative valable et suffisamment outillée.

I.3 Pratiques attendues : standardisation et/ou transparence

L'étude des manuels des deux dernières années du lycée nous montre comment, à travers une même organisation de chacun des chapitres, ces manuels mettent bien en avant certaines pratiques précises définissant les principaux enjeux en classe de troisième année et de terminale. Ces pratiques se manifestent dans les exercices, notamment par l'existence de canevas d'exercices très répétitifs tous centrés sur une technique et/ou une technologie donnée.

I.3.1 Les tâches privilégiées

A travers l'étude des exercices répertoriés dans l'environnement de la notion de limite, nous avons pu classifier les types de tâches en trois catégories et à chacune de ces types de tâches nous avons associé les techniques à utiliser :

- Tâches de type algorithmique

Dans ce cas, il s'agit de considérer les tâches utilisant des techniques calculatoires pour étudier la convergence d'une suite ou la limite d'une expression algébrique dans le cadre de l'étude des fonctions. La complexité de ces techniques algorithmiques est à étudier.

- Tâches de type graphique

Il s'agit dans ce cas de tâches qui étudient graphiquement le comportement asymptotique d'une fonction, la position de tangentes en des points particuliers, le comportement d'une suite, etc., pour conjecturer des limites éventuelles. D'autre part, cette catégorie regroupe les tâches où le résultat d'un calcul de limite est à interpréter graphiquement.

- Tâches de type heuristique

Afin d'être en mesure d'utiliser les techniques qui répondent à ce type de tâches, l'étudiant doit mobiliser des compétences de raisonnement indépendantes du contenu en question, telles que l'élaboration d'une stratégie de résolution et la conjecture.

Nous avons ainsi pu voir que les techniques rattachées aux tâches de type algorithmiques sont majoritaires (52%) ; nous citerons les techniques de factorisation par le terme prépondérant, de multiplication par l'expression conjuguée et de changement de variable explicité par les énoncés. Dans le détail, la mise en œuvre de techniques de type algorithmique se rencontre essentiellement dans les questions portant sur l'étude de variations de fonctions (qu'il s'agisse ou non de fonctions logarithmes ou exponentielles). Dans le cas le plus complexe, il y a plus d'une étape à exécuter avant d'aboutir au résultat, comme le montre l'exemple du calcul de limite en $+\infty$ de $\frac{2\log x}{x^2+x}$, pour lequel il s'agit d'abord de diviser par x^2 le numérateur et le dénominateur pour ensuite utiliser le résultat d'une limite usuelle à savoir celle de $\frac{\log x}{x}$ en $+\infty$. La technique de changement de variable, renforcée par l'institutionnalisation du théorème de composition des limites en classe de terminale, est récurrente, fondamentalement à travers le calcul de limites d'expressions telles que $\frac{\sin(1-3x)}{(1-3x)}$ en $x_0=\frac{1}{3}$, $\frac{\cos(x^2)-1}{x}$ en $x_0=0$, ou encore $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $x_0=0$, $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ en $x_0=0$. Dans tous les cas, les exercices requièrent la mobilisation d'un résultat standard aboutissant à l'utilisation d'une limite remarquable (ou usuelle).

On observe les mêmes phénomènes en ce qui concerne les problèmes de convergence d'une suite : une part importante des questions nécessitant des techniques de type algorithmique est consacrée à situer la notion de limite d'une suite dans un contexte de connaissances déjà élaborées en 3ème année. L'essentiel du travail de l'élève consiste à aboutir aux théorèmes des opérations sur les limites de suites convergentes ainsi qu'aux différents résultats donnant lim q^n quand n tend vers $+\infty$.

Les techniques exigées dans les tâches faisant intervenir le graphique restent inscrites dans un contrat didactique peu étendu : nous en distinguons deux, celles qui induisent des conjectures à partir du graphique ou, à l'inverse, demandent des tracés. Cependant, la systématisation antérieure des études globales de fonctions par tracé du graphique favorise la mise en œuvre d'une technique d'interprétation graphique d'un nombre limite – ainsi le tracé de la tangente en un point de la courbe, le tracé des branches infinies, le tracé des asymptotes obliques, verticales ou horizontales. Réciproquement, lorsqu'il s'agit d'interpréter des courbes afin d'en conjecturer un résultat éventuel, l'élève n'est généralement pas confronté à une tâche de production complexe. On lui demande, soit d'utiliser la représentation graphique d'une fonction f (explicitement désignée dans l'énoncé) afin de conjecturer l'existence d'une limite éventuelle de f en x_0 (en l'occurrence de percevoir un nombre dérivé) ou encore de représenter les courbes par exemples de -f, | f |, f+k (k étant un réel donné). Ces tâches graphiques supposent de plus que la courbe ne recèle aucun implicite non visible, donc elles induisent une utilisation du graphique peu problématique et non problématisée.

Enfin, les tâches induisant la prise en compte par l'élève de l'utilité du graphique – telles que les questions relatives à la représentation graphique de la réciproque d'une fonction ou à la conjecture sur la convergence éventuelle d'une suite récurrente – n'exigent en général pas le recours autonome au graphique par les étudiants, que ce soit dans des phases de contrôle ou d'exploration. L'institution scolaire semble en effet prendre peu en charge le recours au graphique comme outil de validation et ne pas chercher spécifiquement à le développer, par un effet de contrat que nous avions signalé (cf. Bloch, 2002). Ce que nous pouvons noter, c'est une certaine carence de tâches graphiques moins élémentaires, correspondant à un degré de familiarisation plus élevé avec les notions liées à la limite et à l'aspect heuristique du graphique ; cette absence a été également signalée par Maschietto (2001). Une évolution de l'usage du graphique dans le sens d'une aide heuristique aux tâches plus complexes, pointée comme souhaitable par ce même auteur et, nous le verrons, souhaitée par les enseignants à l'université, n'est manifestement pas celle qui est prise en compte de la 3ème à la terminale.

I.3.2 La standardisation

La standardisation des tâches apparaît comme importante, à travers la routinisation de quelques tâches revenant fréquemment et systématiquement. Les tâches heuristiques les moins "standardisées" occupent une place très réduite (14% de l'ensemble des tâches dans le manuel de Terminale) ; de plus, les démonstrations associées n'appellent pas un réel travail de production personnelle. Nous distinguons dans l'environnement de la limite d'une expression algébrique trois techniques rattachées aux tâches heuristiques : l'encadrement et la comparaison, l'identification d'un nombre dérivé et la discussion suivant un paramètre.

En 3ème année comme en terminale, la technique de comparaison / encadrement fait essentiellement appel aux propriétés et inégalités concernant *sin x*, *cos x* ou E[x]. Dans l'exercice suivant (classe de Terminale), l'inégalité à utiliser est, de plus, expressément indiquée dans les textes de l'énoncé :

On considère la fonction $f : x \rightarrow x^2.E(\frac{1}{x})$.

Montrer que pour tout $x \in IR^*$, on a : $x-x^2 < f(x) < x$.

En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Afin de répondre à la première question, l'élève utilise une propriété fondamentale de la partie entière d'un nombre réel à savoir $x-1 < E(x) \leq x$, laquelle a été rappelée dans l'exercice précédent ; puis, il applique l'un des théorèmes relatifs aux limites et ordre. De tels types de calculs, très dirigés dans l'ensemble, et qui apparaissent surtout au niveau des exercices portant l'intitulé du thème (dans ce cas limites et ordre), n'appellent pas un réel travail de recherche de la démonstration, même s'ils font significativement appel à des compétences algébriques et d'organisation du raisonnement.

Par ailleurs, l'apprentissage des inégalités des accroissement finis et celles des intégrales contribue à enrichir le répertoire des élèves et à faire évoluer les exercices mettant en œuvre des encadrements / comparaisons. Mais, dans tous les cas, le découpage préalable de l'énoncé en questions intermédiaires induit la technique à mettre en œuvre et les moyens pour y arriver (c'est le cas du calcul de limite par encadrement, lorsque ce dernier est indiqué).

Notons par ailleurs que la technique du point fixe (utilisée pour déterminer la limite d'une suite récurrente convergente) est presque inexploitée au niveau des problèmes complexes sauf dans un contexte particulier, celui de l'étude d'une suite récurrente précédée par l'étude de la fonction considérée. La technique requise – la résolution algébrique d'équations de type : $f(x) = x$, est indiquée dans l'énoncé ; la presque totalité des exercices donnés en Terminale se retrouve dans le chapitre "Suites réelles : convergence", et le contexte est donc facilement identifiable par l'élève : il s'agit d'un savoir technique ou mobilisable (au sens de Robert) et non disponible.

Il convient enfin de signaler que la donnée de tâches complexes sans aide méthodologique, proposée dans certains exercices afin de favoriser une certaine prise d'autonomie de l'élève, reste dans un contexte très restreint. Ces tâches nécessitent l'utilisation de plus d'une technique à la fois, ou la mobilisation de techniques qui se maintiennent à faible inférence telle que l'identification d'un nombre dérivé lors du calcul de la limite d'une expression algébrique ; mais dans le cas le plus complexe, on demande de reconnaître la nécessité de distinguer "limite à droite / limite à gauche" ou l'étude des points particuliers d'une courbe. L'élève semble donc assez peu engagé à adopter des démarches autonomes lors de la résolution d'exercices. De plus nous ne pouvons assurer que les professeurs donnent effectivement ces exercices aux élèves : cela peut dépendre du niveau de la classe, et l'organisation didactique prescrite par l'institution n'est pas l'organisation effective (cf. Rogalski, 2001).

I.4 A propos du travail de conceptualisation : le cadre d'analyse

Plusieurs travaux ayant trait à l'enseignement supérieur soulignent l'apparition de certaines exigences en termes de flexibilité cognitive, et d'évolution du statut des notions.

En articulant les travaux d'Aline Robert (1998) et d'Anna Sfard (1991), nous avons été amenées à distinguer deux statuts des notions de l'analyse : processus et objet. La mise en œuvre du statut processus appelle un rapport opérationnel à la notion en question : c'est le cas par exemple de la notion de limite lors de la recherche de la pente d'une tangente. Quand à la dimension objet d'une notion, essentiellement liée à ses aspects unificateur, généralisateur et formalisateur, elle caractérise l'aspect structurel du travail de conceptualisation : c'est le cas par exemple de la notion de limite dans des activités de raisonnement sur des objets généraux, ou lorsque les énoncés en question portent sur des propriétés générales des limites ou des objets (fonctions, suites) ayant ou non des limites.

Robert pose, d'une part la question des relations que les nouvelles notions introduites à l'université entretiennent avec de notions connues ; d'autre part la question des fonctions que vont occuper ces nouvelles notions. Ceci conduit à distinguer plusieurs statuts possibles des notions concernées : statut formalisateur, unificateur, généralisateur ou simplificateur. Ces statuts sont nouveaux pour les étudiants et générateurs d'obstacles. Ainsi, le travail mené à l'université sur la définition du concept de limite de suite – fondé sur la formalisation en (ε, N) – dévoile les difficultés qu'ont les étudiants à élaborer une démarche formelle sur les problèmes de convergence, exigence nouvelle par rapport au travail sur des problèmes particuliers abordé dans l'enseignement secondaire. La démarche de formalisation ne peut être considérée comme jouant un rôle simplificateur, d'un point de vue didactique, que si l'aspect généralisateur peut en être déduit et des théorèmes facilitant le travail ultérieur prennent place dans les outils disponibles ; cette réorganisation ne peut avoir lieu que par le biais d'ingénieries *ad hoc*, et dans des organisations sur le long terme qui permettent à l'étudiant d'appréhender les gains méthodologiques ainsi conquis.

Pour qualifier le nouveau besoin de flexibilité à l'entrée à l'université, nous avons utilisé ce que Robert (1997) a défini comme le niveau de mise en fonctionnement des notions. Rappelons que Robert en recense trois ; le troisième, s'avérant spécifique à l'université, est adéquat pour nous permettre de saisir l'ampleur de l'évolution des pratiques attendues des étudiants.

- Le niveau technique,

" (...) correspond à des mises en fonctionnement isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc."(Robert, 1998, p. 165)

- Le niveau mobilisable,

" (...) correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois."(Robert, 1998, p. 166)

- Le niveau disponible :

Ce dernier exige que l'apprenant soit capable de résoudre ce qui lui est proposé sans aucune indication, donc de trouver par lui-même les connaissances nécessaires à la résolution. Ce niveau inclut donc le choix de techniques, théorèmes, stratégies. Ce niveau est rarement présent au secondaire sur quelque domaine mathématique que ce soit.

L'analyse des pratiques attendues dans l'environnement de la notion de limite à la fin du cursus secondaire nous montre que la notion de limite n'est presque jamais utilisée dans son statut objet. Ceci s'explique dans le contexte du travail de Sfard, qui met en avant le rôle que peut jouer la forme opérationnelle d'un concept pour une première introduction de celui-ci[6]. Effectivement, dans leur majorité, les textes des exercices de Terminale portant sur le statut processus de la notion de limite contiennent des indications sur des étapes de calcul de limites d'expressions algébriques (niveau technique de fonctionnement). Par ailleurs, les exercices qui n'indiquent pas le recours à la limite comme outil de résolution posent des questions familières, à savoir étudier la continuité, dérivabilité, construire une tangente, asymptote, une courbe, etc. ou encore étudier la nature d'une suite bien définie. En revanche, on a pu observer, à travers certains exercices concernant l'étude de la convergence d'une suite, un travail qui pourrait constituer une première approche de la définition formelle de la limite de suite. Un exemple est donné ci-dessous :

On considère la suite U définie sur IN par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$

1- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n - 2 = \dfrac{2-u_{n-1}}{\sqrt{6-u_{n-1}}+2}$.

Puis que : $|u_n - 2| \leq \dfrac{|u_{n-1}-2|}{2}$

2- En déduire que pour tout n de IN, $|u_n-2| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

3- Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Cependant, même ces exercices plus complexes ne révèlent pas de besoins spécifiques de formalisation dans le domaine de l'Analyse : la technique de base est l'encadrement – comparaison et rien n'assure que, pour les élèves, cet exercice est bien une approche de l'aspect généralisateur. De plus, dans une organisation de type "processus", les objets en jeu dans les exercices, même les plus difficiles, sont des fonctions (ou suites) particulières : il n'est jamais demandé de démonstration de propriétés plus générales ou décontextualisées des objets nouveaux introduits (ici les limites).

Cette organisation induit des conséquences d'ordre conceptuel. Si l'on peut attendre de ce travail des connaissances accrues sur certaines fonctions et des savoir-faire en calcul algébrique, il est clair que la conceptualisation sur la notion de limite comme objet ne peut émerger du travail prévu dans ce milieu. Concevoir la notion de limite comme objet mathématique suppose d'en maîtriser une définition et d'être capable de le voir comme inséré dans une théorie où il intervient dans la constitution d'autres objets et la validation de propriétés.

Un autre cadre théorique permet de préciser la nature du travail des étudiants : c'est celui des registres de représentations sémiotiques. En effet, un objet mathématique ne peut être accessible qu'à travers ses représentations sémiotiques et son traitement n'est possible que par ces représentations. Or les représentations sémiotiques ne sont pas homogènes dans un même cadre mathématique : pour un travail dans le cadre de

6 Ce qui rappelle la dialectique outil-objet de Douady.

l'Analyse on peut être amené à utiliser des ostensifs de type algébrique, graphique ou formel. On est aussi parfois amené à effectuer des conversions entre les registres sémiotiques, conversions congruentes ou non suivant la classification de Duval. Nous avons donc procédé à la classification des tâches attendues de la part des étudiants, selon les registres de représentations qui doivent intervenir dans la solution, en restreignant notre étude aux tâches dont la résolution nécessite une conversion entre registres de représentation sémiotique.

Ce travail nous a permis de faire apparaître les potentialités de traitements et de conversions de registres existant au niveau scolaire. Les données relatives aux pratiques induisant des conversions de registres de représentations sémiotiques ont montré une large prépondérance des conversions du type *algébrique /graphique,* toujours pilotées par les énoncés. Les énoncés réclamant ce type de conversion concernent notamment l'interprétation graphique d'un calcul de limite ou à l'inverse la conjecture graphique d'un nombre dérivée, d'une limite éventuelle d'une suite, de l'allure d'une courbe, etc.

I.5 Conclusion de l'étude dans l'enseignement secondaire

Cet état des lieux amène à constater que l'enseignement secondaire ne porte guère l'exigence d'une réelle cohérence théorique des objets qu'il entreprend d'étudier, et que l'étude est limitée à des objets isolés, sur des cas particuliers. Les connaissances sont ainsi essentiellement mises en jeu aux niveaux technique ou mobilisable (Robert, 1998) ; le travail de conceptualisation favorise un rapport opérationnel à la notion de limite, qui ne peut être plus ambitieux en absence du rapport à l'objet (Sfard, 1991). Les métaphores culturelles sur les limites sont supposées guider l'intuition lorsque les outils de validation font défaut, mais elles ne peuvent prendre en charge l'aspect généralisateur et unificateur. Enfin, le travail de formalisation analytique et de démonstration est quasi absent dans cet environnement, ou il est algorithmique et fortement guidé. De plus, il ne concerne que des objets spécifiques – fonctions et suites particulières – et non des propriétés générales[7] : l'enseignement secondaire ne prend pas en charge la décontextualisation des concepts introduits. Ces conclusions rejoignent celles de Bosch, Fonseca et Gascon (2004) sur le fait que l'enseignement secondaire ne propose que des organisations mathématiques locales, non suffisamment reliées entre elles, et ne permettant pas un accès aux relations qu'entretiennent entre elles les notions mathématiques.

Les connaissances construites dans cet environnement permettent-elles aux élèves d'aborder convenablement l'enseignement des mathématiques à l'Université ?

II. L'enseignement de la notion de limite à l'université

II.1 Texte du savoir en Analyse et nouveau contexte du travail des étudiants

Contrairement au lycée, les technologies utilisées dans le cours que nous avons étudié[8] s'inscrivent dans un cadre strictement formel de validation spécifique à l'Analyse. L'enseignement à l'Université choisit de considérer la notion mathématique en

7 Constat fait également dans Bloch, 2002.
8 Cours et TD d'analyse de première année Mathématiques et Informatique à l'Université de Tunis.

tant qu'objet théorique en adoptant le point de vue structurel, ce qui est bien entendu légitime dans des études supérieures de mathématiques.

Ce système est basé sur le registre formel mais comprend, de plus, des caractéristiques bien connues : travail sur des représentants "voisins" des nombres cherchés, raisonnement par condition suffisante, articulation des connecteurs logiques et des quantificateurs pour énoncer des propriétés portant sur des classes de fonctions (cf. Bloch, 1999, 2000 ; Chellougui, 2003). Cette spécificité est liée à la généralité des objets manipulés ; ainsi que nous l'avions mis en évidence par exemple dans Bloch (2003), pour faire entrer les élèves dans la théorie de l'analyse, un travail dans ce domaine ne doit pas se contenter de porter sur des exemples ou sur quelques fonctions exhibées ; il doit prendre en charge l'établissement de propriétés générales et le débat sur leur champ de validité.

Ce décalage entre les deux institutions d'enseignement conduit à une méconnaissance du répertoire du néo-bachelier entrant à l'université. Pour la majorité des enseignants de l'Université, il y a quelques années, les étudiants étaient supposés fonctionner d'emblée dans le registre formel, et l'institution s'appuie parfois encore, notamment en Tunisie, sur une conviction forte de ce que les étudiants devraient pouvoir, dès leur premiers pas à l'Université, saisir le sens des concepts dans ce registre et y pratiquer tout à la fois la recherche et la formulation de solutions correctes.

Nous avons identifié des attentes de l'institution universitaire par rapport à un certain corpus théorique requis, à savoir : des connaissances relatives à des démonstrations par inégalités (par exemple $a = b$ si et seulement si, pour tout ε, on peut affirmer que : $|a - b| \leq \varepsilon$) et à la détermination de l'existence de nombres connus seulement par l'application d'un théorème. Ce qui est en jeu, ce sont des savoirs et démonstrations présentant certaines régularités et des raisonnement mettant l'accent sur le formalisme et ce que Bloch appelle le *"système spécifique de preuves de l'analyse "*[9]. Par rapport au travail du secondaire, l'utilisation du langage formel exige l'intégration peu évidente des connaissances anciennes et leur réorganisation dans les savoirs nouveaux ; ceci nécessite sans aucun doute l'effacement de certaines images anciennes associées au travail antérieur. Les premières représentations pratiques que se forgent les élèves sur les tâches d'analyse (graphiques, métaphores, "intuitions"...) sont peu compatibles avec les exigences de justification formelle, et le maniement des outils logiques qu'exige la validation en analyse.[10]

II.2 Nouvelles attentes : maîtrise de techniques amalgamées et gestion personnelle de l'organisation de la preuve

Alors que les exercices et problèmes présents dans les manuels du lycée, se centrent le plus souvent sur la mise en œuvre de techniques dans des contextes très ciblés, les séries de travaux dirigés que nous avons étudiées mettent en lumière un amalgame de techniques plus complexes. Les activités proposées dans ces séries appellent à :

- des raisonnements sur des objets généraux telles que la preuve de conjectures ou la recherche de contre-exemples,
- des raisonnements par l'absurde,
- un travail de formalisation qui n'était pas de règle au lycée,

9 cf. Bloch 2000.

10 Cf. en particulier Chellougui, 2003 ; Bridous, 2005.

- un travail de réflexion critique sur la validité des résultats trouvés, sous-tendu par une capacité à évaluer une démarche mathématique,
- une éventuelle prise d'initiative (entièrement à la charge de l'étudiant) en vue de recourir, d'une façon autonome, aux graphiques pour contrôler, vérifier et découvrir.

De notre point de vue, la transition lycée/université est aussi marquée par l'importance accordée aux tâches heuristiques et la disparition des tâches graphiques guidées. Pour ce qui est des tâches algorithmiques, nous relevons aussi un développement important des compétences algébriques à travers l'introduction de fonctions nouvelles, comme les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques. Concernant l'étude de la convergence d'une suite, nous recensons une seule question où l'expression est inhabituelle (par rapport au vécu antérieur des étudiants), il s'agit de trouver la limite de la suite u_n de terme général :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, pour laquelle il s'agit d'abord de transformer l'écriture en :

$\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$, puis de simplifier tous les termes sauf $1 - \frac{1}{n+1}$, enfin, d'utiliser la technique de factorisation par le terme adéquat.

Comme nous l'avons déjà signalé, il n'existe aucune question qui exige explicitement ou implicitement l'utilisation de techniques relatives aux tâches de nature graphique. En contrepartie, il peut arriver que l'étudiant soit amené par lui-même à effectuer des tracés qualitatifs afin de contrôler le résultat d'un calcul de limite ou d'un développement limité asymptotique. C'est le cas par exemple de l'exercice suivant :

Soit $f :]-1,1[\to IR$ la fonction donnée par :

$f(x) = \log\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x+ax^2}{1+x}$

a) Déterminer le développement limité de f en 0, à l'ordre 3.

b) Discuter suivant la valeur de a, la position de la courbe représentative de f, par rapport à la tangente à l'origine.

c) Préciser les asymptotes à l'infini et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes pour la fonction : $f(x)=(x+1)e^{1/x-1}$

Par ailleurs, concernant la limite d'une suite, nous avons répertorié des exercices dans lesquels un graphique peut simplifier l'exécution, comme la recherche de la limite éventuelle d'une suite récurrente sans que l'énoncé n'indique de méthode.

Un autre exercice s'inscrit dans le cadre de l'étude d'une suite récurrente ; la fonction choisie étant paramétrée, il s'agit de vérifier graphiquement des résultats dans des cas particuliers (la suite (x_n) étant définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = a \sin x_n + b$). Enfin, la validation d'une condition nécessaire à l'existence et l'unicité du point fixe se traduit par l'existence de contre-exemples, que l'étudiant pourra trouver par le biais du graphique (il faut démontrer que les hypothèses : I intervalle fermé borné et $k \in]0, 1/4]$ sont nécessaires pour assurer l'existence et l'unicité du point fixe, dans le cas de fonctions k-lipschitziennes).

Ce qui est remarquable concernant les tâches heuristiques, c'est le fait que les techniques qui leur sont associées sont dans leur majorité d'une nature différente de celles qui apparaissent au lycée. Ainsi dans les techniques utiles figurent très souvent des développements limités, que les étudiants sont donc supposés pouvoir maîtriser comme connaissances disponibles. On peut classer les exercices faisant appel à ce type de techniques en deux catégories :

La première concerne la recherche de limite (en x_0 fini et à l'infini) de fonctions différentes par le biais de développements limités (implicitement demandés par les énoncés). C'est donc là un entraînement au calcul de développement limité intégrant les thèmes : somme, produit, quotient, composé, etc., et le choix de l'ordre du développement.

La deuxième pratique propose des tâches concernant : l'étude de branches infinies, l'étude locale d'une courbe paramétrée, la détermination de l'équation d'une asymptote ou tangente, l'étude des positions relatives entre courbe et tangente ou asymptote et l'étude locale de dérivabilité .

Les techniques de raisonnement par l'absurde – nécessitant dans la plupart des cas un travail de formalisation et de recherche de contre-exemples (qui sont aussi inexistants au lycée) – sont proposées de sorte que le choix de les mettre en œuvre est entièrement à la charge de l'étudiant. L'étudiant a donc à gérer une difficulté supplémentaire, il doit être capable de pressentir la règle adéquate au moment adéquat. Mais, comme le dit Wittgenstein, il n'y a pas de règle pour dire comment ni quand appliquer la règle, ce n'est que l'expérience des choses qui fixera l'usage de la règle ; or les règles mathématiques ne dérogent pas à cette règle !

Enfin, nous avons pu constater que les techniques correspondant aux tâches heuristiques sur la nature des suites, qui prenaient une certaine importance au lycée par la reconnaissance de suites spécifiques (reconnaître par exemple qu'une suite est géométrique), disparaissent à l'entrée à l'université en faveur de nouvelles techniques concernant des objets généraux. Nous regroupons ces techniques sous le thème 'identifier – reconnaître' (sans que cela soit explicitement formulé dans les énoncés). Dans ces techniques, on trouve le fait de reconnaître une suite de Cauchy, ou deux suites adjacentes, d'identifier des suites extraites, d'utiliser un contre-exemple ou de raisonner par l'absurde.

Tout ceci induit la nécessité de se détacher des pratiques scolaires secondaires afin d'intégrer un niveau supérieur de l'activité mathématique, incluant la réflexion sur la nature des concepts étudiés et leur reconnaissance sans aide de l'énoncé.

Il nous semble assez utopique de penser, compte tenu de la variété des difficultés présentées par les tâches proposées, et du peu de temps qui sera par suite consacré à chacune des techniques utiles, qu'une véritable routine d'exercices puisse ici s'installer et permettre une familiarisation suffisante de l'ensemble des étudiants à l'ensemble de ces tâches.

Par ailleurs, les exercices dont les énoncés indiquent le résultat à obtenir ne sont pas pour autant plus facilement exécutables, car ils concernent par exemple des corollaires de théorèmes, comme l'exemple très classique ci-dessous :

"En raisonnant par l'absurde montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle."

En effet, pour arriver à résoudre cet exercice, l'étudiant est censé connaître les définitions formelles de continuité et de continuité uniforme et avoir compris les différences qu'implique l'ordre des quantificateurs, jongler avec les inégalités, donc maîtriser un degré assez élevé de formalisme analytique : en d'autres termes appliquer en cascade des connaissances, savoirs et techniques jusque là nouveaux.

L'étude de suites récurrentes de type $u_{n+1}=f(u_n)$ est proposée sans que l'énoncé ait demandé une étude préalable de la fonction f, et même l'identification de cette fonction f intervenant dans la définition de la suite n'est pas suggérée. C'est là une différence essentielle avec les exercices de terminale abordant ce type de problème, qui sont, en général, d'abord centrés sur une étude de fonction spécifiée assez complète, l'étude de la suite récurrente associée ne venant qu'en seconde partie. La nécessité d'étudier la fonction f passe donc de connaissance mobilisable à disponible.

En fait, la majorité des activités induisent un choix à réaliser de la part de l'étudiant sans aucune indication explicite : reconnaître la nécessité de distinguer limite à droite et limite à gauche en x_0 fini, identifier l'encadrement adéquat, construire une stratégie de travail (dans ce cas il s'agit de mettre en œuvre plusieurs techniques pour trouver la limite), inventer un contre-exemple, se fixer des paramètres, reconnaître la nécessité d'utiliser un raisonnement par l'absurde, reconnaître la ou les suite(s) extraites pertinentes, se fixer l'ordre du développement limité adéquat, etc. Nous pointons ici un amalgame de techniques nouvelles dont la mise en œuvre induit une difficulté à double entrée pour les étudiants à savoir : *quand et comment?* Il y a là envers l'étudiant une exigence de prise en charge individuelle et de gestion personnelle des difficultés, à un degré non atteint jusqu'ici. Pratiquement l'ensemble des connaissances passe de *technique* ou *mobilisable* à *disponible* (cf. Robert, 1998).

II.3. Nouvelles exigences d'ordre conceptuel

L'étude que nous avons faite nous a permis de pointer l'intervention d'un nouvel aspect du travail de conceptualisation :

- Apparition d'exercices qui mettent en jeu le statut *objet* (rapport structurel) du concept de limite, essentiellement liés à ses aspects unificateur, généralisateur et formalisateur.

- Disparition d'exercices qui demandent une conversion entre les registres de représentations sémiotiques algébrique et graphique – pratique coutumière au lycée – cédant la place à des conversions dans le registre formel.

Des tâches mettant en œuvre la définition formelle de la notion de limite apparaissent à travers des études de liens nécessaires/suffisants pour des propriétés de continuité uniforme, en vue de démontrer des inégalités ou encore pour déterminer une limite. Il convient de noter que le travail demandé ici exige de la part de l'étudiant une maîtrise des concepts et des modes de validation, et une capacité d'adaptation importante.

Concernant l'étude des suites, les pratiques attendues incluent un travail de base sur des conjectures générales mêlant une nécessité d'adaptation parfaite à la définition formelle de la limite d'une suite. Il s'agit par exemple de montrer que :

Etant donnée une suite $(u_n)_n$ à terme entiers relatifs, $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle est stationnaire.

Ou encore, de vérifier si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

Toute suite convergente est bornée.

Par ailleurs, les questions qui induisent l'aspect processus de la notion de limite d'une suite (généralement non indiqué par les énoncés) demandent :

- l'étude algébrique de la convergence de suites données par leur terme général,
- la donnée de contre-exemples particuliers de limites de suites, pratique non abordée jusqu'à ce niveau du cursus,
- l'étude d'une suite récurrente, sans qu'aucune indication ne soit donnée sur la fonction associée et sur l'intervalle contenant les éléments de cette suite.

Enfin, la disparition d'exercices qui recourent à une conversion entre les registres de représentations sémiotiques algébrique et graphique (pratique coutumière au lycée), montre que l'université ne prend pas en charge les connaissances antérieures des étudiants afin de les développer et de leur trouver une utilité au moins dans la partie heuristique du travail de réorganisation des savoirs. Certes, en France tout au moins, on observe de nombreuses injonctions du type "Faites un schéma !", mais la responsabilité de la recherche graphique est laissée à l'étudiant.

III. Les variables macro-didactiques associées à la transition secondaire / supérieur

Nous avons voulu donner une vision plus synthétique des modifications qu'engendre, dans le travail demandé aux étudiants, le passage de l'enseignement du lycée à celui de l'université. Nous présentons donc dans ce paragraphe les variables finalement retenues pour décrire globalement cette transition, et leurs modifications dans le passage lycée / Université. Nous proposons ensuite quelques commentaires et exemples relatifs aux principales modifications des valeurs des variables.

Ce travail ayant fait l'objet du DEA de I.Ghedamsi, le corpus a été assez largement pris dans les manuels tunisiens de mathématiques au niveau des dernières années de l'enseignement secondaire, option scientifique, et de la première année d'études de mathématiques à l'Université. Cependant ceci ne limite que peu la portée de l'étude : un examen de ces données permet de constater leur étroite parenté avec ce qui existe dans d'autres pays, et notamment la France. La thèse de Praslon (2000) en témoigne, et cet auteur avait déjà défini des macro-variables afin d'analyser des manuels et des TD d'Université. Nous avons repris certaines de ses variables qui correspondent ici à VD1, VD3, VD6, VD8, VD9.

III.1 Variables macro- didactiques

Les variables que nous avons finalement retenues comme pertinentes, en fonction des éléments théoriques de notre étude, sont des variables macro-didactiques au sens qu'elles concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir (comme une situation). Elles sont au nombre de onze :

VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts ;
VD2 : le registre de validation, soit l'algèbre des limites, soit le raisonnement analytique ;
VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou fort ;
VD4 : le nombre de nouvelles notions introduites dans l'environnement de la limite, comme les développements limités, etc… ;
VD5 : le type de tâches, soit heuristique, graphique, algorithmique ;
VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant ;
VD7 : le degré d'autonomie nécessaire : faible ou élevé ;
VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet ;
VD9 : le type de conversions utilisées entre registres de représentation ;
VD10 : le statut des tâches demandées aux étudiants, soit simple exercice d'application, soit démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général. Cette variable est représentative du *contrat didactique* des deux institutions, dans la mesure où elle contribue à préciser la nature de la responsabilité mathématique dévolue aux étudiants.

Nous pouvons ajouter une variable V0 qui concerne l'introduction de la notion de limite : dans l'enseignement secondaire, il s'agit d'une introduction par des métaphores culturelles, alors que dans le supérieur, c'est par une définition formelle.

Le choix des valeurs de ces variables didactiques détermine le contrat didactique effectif ; particulièrement, les valeurs que prennent ces variables nous permettent de dégager la nature du partage des responsabilités mathématiques entre professeur et étudiant. Les modifications constatées des valeurs des variables correspondent à des ruptures entre les deux ordres d'enseignement. Nous avons pu ainsi catégoriser les tâches proposées dans un certain nombre de domaines de l'étude, ce qui nous a permis de disposer d'information – qualitative ou quantitative – sur la continuité du travail des étudiants entre le secondaire et le supérieur, et sur la nature des ruptures existantes : celles-ci sont-elles progressives et localisées ou constituent-elles une transition globale difficile à gérer par les étudiants ?

III.2 Les valeurs prises par les variables didactiques et leurs conséquences

III.2.1 Evolution des valeurs des variables

Le tableau ci-dessous montre à l'évidence une modification importante des valeurs prises par les variables, ce qui ne peut que s'accompagner d'une profonde mutation dans le travail mathématique demandé.

Variable didactique	*Enseignement secondaire*	*Début de l'Université*
0. Introduction de la limite	Métaphores	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre des limites	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (mais *sans* outils théoriques spécifiques de validation)	Importante (*avec* des outils théoriques spécifiques de validation)
5. Type de tâches	Algorithme, tracé de graphiques, calcul	Recherche et démonstration
6. Choix des techniques	Transparent	Amalgame
7. Degré d'autonomie exigé	Routines	Peu de routine
8. Mode d'intervention de la notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Alg/Graphique	Alg/Analytique
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation[11]	Théorème, corollaire, énoncé général

L'analyse du tableau permet de noter que le passage de l'enseignement secondaire à l'Université s'accompagne de modifications majeures : presque toutes les variables sont modifiées, avec un taux de changement considérable. Les valeurs prises ne montrent presque aucun recouvrement : les étudiants sont confrontés à une révolution globale, aussi bien du travail demandé que des moyens de ce travail.

III.2.2 D'un travail algorithmique à des techniques complexes

VD0 : l'introduction de la notion de limite au secondaire est supposée s'appuyer sur l'intuition et des métaphores culturelles, alors qu'à l'Université la question de l'existence ou non d'une limite n'est plus philosophique mais entièrement déterminée par la cohérence de la théorie et la puissance du formalisme comme outil de preuve.

VD1 : A l'Université le registre formel est introduit d'emblée et les étudiants sont supposés avoir compris son utilité et se mouvoir aisément dans ce registre.

VD2 : A l'entrée à l'Université l'usage de la définition de la notion de limite est général, et considéré comme un moyen de preuve habituel ; ceci contraste avec le travail usuel au secondaire, qui porte exclusivement sur des fonctions ou des suites particulières, données algébriquement, si bien qu'aucun travail n'est demandé sur des énoncés généraux. Dans l'enseignement secondaire, on ne procède qu'à des instanciations de théorèmes sur des fonctions simples ; et encore faut-il remarquer que les théorèmes ont été le plus souvent admis – conformément au programme.

VD2, VD3, VD5 : Comme nous l'avons vu au II., à l'Université les étudiants sont supposés tenir des raisonnements analytiques : ces raisonnements portent très souvent

11 Instancier un théorème, c'est considérer sa valeur de vérité sur un cas particulier.

sur des résultats généraux, faisant intervenir la définition de la notion de limite en (ε,η), ou des fonctions possédant telle ou telle propriété. Ces raisonnements comportent une dimension heuristique – recherche d'une solution non évidente – et l'usage de définitions formelles.

VD4 : Il pourrait sembler que la variable VD4 ait subi peu de modifications entre l'enseignement secondaire et l'Université. L'introduction de l'analyse s'accompagne, dans les deux cas, d'une augmentation significative des notions nouvelles étudiées. Cependant la nature de cette augmentation est différente dans les deux institutions :

- Dans l'enseignement secondaire, les notions sont présentées à l'aide de métaphores culturelles, et les notions sont donc introduites essentiellement par, a) un nouveau vocabulaire, b) des analogies ou des métaphores, ce qui est pointé comme devant reposer sur "l'intuition" par les programmes et les manuels. Une notion comme celle de limite est donc réduite à son nom, quelques occurrences (limites finies, infinies, en x_0 ou à l'infini, sur des fonctions polynômes et rationnelles simples, puis sans démonstration sur les fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle) et quelques exemples ; les élèves n'ont pas à prendre en charge de définition générale, ni le questionnement sur les fonctions ayant une limite ou non, ni ce que signifie cette notion de limite relativement à d'autres concepts reliés au premier.

- Dans l'enseignement supérieur, les notions sont introduites avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le statut d'un concept introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres notions, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau concept ou un autre niveau de validation (par exemple les rapports entre limite, taux de variation, dérivée, développement limité, intégrale, etc.).

VD6, VD7 : Les manuels du secondaire proposent des exercices et des problèmes usant la plupart du temps de la même (ou des deux ou trois mêmes) technique, techniques qui deviennent ainsi des routines pour l'élève. De plus un même exercice est en général consacré à *une* technique. A l'Université il en va tout autrement : les ensembles d'exercices analysés révèlent l'usage de nombreuses techniques, de plusieurs techniques dans un même problème, les étudiants étant supposés pouvoir faire usage de ce que nous avons appelé un *amalgame de techniques*.

VD8 : à l'Université, la notion de limite est en soi un objet de la théorie 'Analyse', étudié en tant que tel. On observe donc un travail sur la conception structurelle de la notion de limite : ses fonctionnalités dans des problèmes, ses relations avec d'autres objets de la théorie (développements limités, séries, intégrales...), et la validation dans le cadre du système de preuve de l'analyse. Dans l'enseignement secondaire, cet aspect est explicitement absent et, comme nous l'avons déjà remarqué, le travail demandé met essentiellement en jeu l'aspect "processus" de la notion de limite.

Les résultats de cette recherche viennent ainsi à l'appui de celle que nous avions menée sur la nature du travail mathématique demandé dans le secondaire (Bloch 2002) : ce travail ne permet presque jamais la mise en évidence de propriétés mathématiques, au sens où l'on pourrait interroger leur validité, trouver leur domaine d'efficacité, énoncer la propriété 'non p' et en déduire des relations entre propriétés 'voisines' (par exemple sur l'ordre et la continuité...), et insérer les différentes propriétés dans une théorie.

Cette recherche rejoint également le travail fait dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) par Bosch, Fonseca et Gascon (Bosch, Fonseca et Gascon, 2004). En effet ces auteurs pointent la faible possibilité ouverte, dans l'enseignement secondaire, de transformer des *organisations mathématiques ponctuelles* (OMP), comme l'étude des limites d'une fonction donnée algébriquement) en *organisations mathématiques locales* (OML) où les notions sont reliées entre elles par les règles de la théorie. Les travaux s'avèrent donc convergents : l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique au secondaire n'autorise qu'une 'visite guidée' d'un certain nombre de propriétés vues comme contingentes et ne permet pas de mettre en évidence les liens entre propriétés, entre concepts et la cohérence de l'édifice théorique, même de façon embryonnaire.

Force est de conclure que l'organisation actuelle de l'enseignement secondaire ne prépare pas les étudiants au travail qu'ils devront aborder à l'Université.

VD7, VD9 : Au lycée, les étudiants n'ont presque aucune opportunité de décider de l'usage d'un diagramme ou d'un graphique pour aborder une situation de recherche (dimension heuristique), et ceci quelle que puisse être l'utilité d'un tel usage dans les problèmes intégratifs concernant le concept de limite. Maschietto (2001) a pointé la fonctionnalité des représentations graphiques pour la résolution de problèmes d'analyse au début de l'Université. Maschietto relève ainsi les difficultés des étudiants à se saisir de diagrammes, schémas, graphiques, comme supports de recherche. Il faut noter que les étudiants doivent développer leur autonomie s'ils veulent acquérir ce type de compétences et en poursuivre l'usage à leur entrée à l'Université : en effet l'institution, si elle encourage comme nous l'avons dit l'usage du graphique, n'aide qu'à la marge le développement des compétences heuristiques graphiques. Cependant les travaux de Vandebrouck et Cazes (2004) exposent des expériences prometteuses. Pour certains enseignants de l'Université néanmoins, les étudiants sont supposés fonctionner très rapidement dans le registre formel, et les étudiants sont invités, dès leur premiers pas à l'Université, à saisir le sens des concepts dans ce registre et pratiquer tout à la fois la recherche et la formulation de solutions correctes dans ce cadre. Le travail de Bridoux (2005) est cependant un témoignage des interrogations de la communauté des enseignants universitaires[12].

VD9 : l'Université n'exploite pas non plus les possibilités ouvertes par les changements de registres de représentation, et on note même la disparition de tâches de conversion entre registre algébrique et registre graphique, qui étaient pourtant relativement courantes au secondaire, même si elles avaient tendance à n'être exploitées que dans un sens : de l'algébrique vers le graphique.

Nous pouvons constater que, si l'enseignement secondaire ne prépare pas les étudiants à leur futur travail à l'Université, l'enseignement supérieur ne se préoccupe guère des connaissances antérieures que les étudiants ont acquises au lycée, afin de pouvoir appuyer les nouveaux apprentissages sur ces connaissances.

12 Il n'incite pas à l'optimisme car il montre que, faute de contrôle, des étudiants de troisième année d'université usent du registre formel de façon encore plus fantaisiste que ceux de première année...

VD10 : enfin, l'analyse des énoncés de ce qui est considéré comme des exercices à faire par les étudiants, au secondaire et à l'Université, montre qu'au lycée les élèves n'ont à résoudre que des tâches ponctuelles portant sur des fonctions particulières, données par des formules algébriques, ce qui situe clairement le travail des élèves dans le domaine de l'application à des exemples ; les 'exercices' des séries de travaux dirigés de l'Université de Tunis consistent fréquemment à démontrer des corollaires de théorèmes du cours, dans des cas de propriétés particulières éventuellement (suite majorée, alternée, à valeurs dans **Z**...) mais non dans le cas d'une suite donnée par sa formule. Ceci porte clairement la responsabilité mathématique des étudiants vers l'établissement de résultats de cours, supposés réutilisables dans d'autres cas ; or ce type de responsabilité ne fait partie à aucun moment du contrat habituel de l'élève du secondaire.

Il faut noter que ceci ne se retrouve pas dans l'analyse des TD de l'université française : ce qui peut être demandé est de l'ordre de la reprise de démonstrations faites en cours par l'enseignant. L'objectif est de ne pas cantonner les étudiants à des tâches uniquement calculatoires ou d'application, et donc de leur faire rencontrer et utiliser des méthodes générales de résolution dans une situation où le risque est nul. De fait, l'alternative parfois rencontrée est de ne jamais organiser de dévolution aux étudiants de ces méthodes générales, mais bien plutôt de ne leur laisser que des tâches algorithmiques, ce qui assure peu la conceptualisation.

III.2.3 Remarques relatives à VD4

Les instructions officielles de l'enseignement secondaire précisent les bornes souhaitables de l'introduction de l'analyse à peu près dans les mêmes termes en Tunisie et en France :

« L'étude des limites n'est pas une fin en soi. Les différents théorèmes serviront surtout dans l'étude du comportement d'une fonction aux bornes des intervalles où elle est définie (dérivabilité à droite et à gauche, branches infinies...). Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples a priori. Les théorèmes relatifs à : la limite et l'ordre ; la limite d'une fonction composée, seront admis. » (Programme officiel de Tunisie, 1998).

L'apparition de nouvelles fonctions, en classe terminale de l'enseignement secondaire, s'opère comme celle des limites, à partir de règles plus ou moins algorithmiques : même l'introduction des intégrales ne prend en compte que le calcul de primitives. Ce n'est que récemment que la méthode d'Euler a été introduite en France pour la résolution des équations différentielles, mais sans justification théorique ou même de faisabilité (pas de condition des prémisses d'un théorème à vérifier, ce théorème n'étant d'ailleurs pas énoncé). Il en résulte que, si dans le secondaire il y a une relative importance des notions nouvelles désignées dans la programme, dans les faits cela ne s'accompagne pas de la nécessité d'introduire des moyens nouveaux de validation. La perception graphique et le travail algébrique demeurent dans la continuité des modes de validation algébriques déjà connus des élèves. Il faut donc relativiser la valeur (apparemment identique dans les deux colonnes du tableau) que nous avons donnée à VD4 : l'augmentation du nombre d'objets de savoirs existe dans les deux cycles, mais n'est pas de même nature.

Nous avons donné l'exemple des limites des fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle : l'introduction de fonctions et limites nouvelles au secondaire ne s'accompagne pas d'une formalisation accrue dans la formulation des limites, ni même d'une initiation au raisonnement analytique (majorations, conditions suffisantes...).

Nous observons par contre une nette augmentation des nouvelles techniques et technologies à maîtriser conjointement à l'introduction de nouveaux objets en première et deuxième année d'Université :

Première année :	*Deuxième année :*
1 Utiliser les définitions formelles	1 Utiliser les définitions formelles
2 Faire un développement limité	2 Prouver qu'une suite est une suite de Cauchy
3 Produire des contre-exemples	3 Identifier des suites adjacentes
4 Prouver par l'absurde	4 Utiliser des suites extraites
	5 Prouver par l'absurde
	6 Produire des contre-exemples

III.2.4 Remarques sur VD5, VD6, VD7

Les modifications dans les valeurs prises par VD5 s'observent particulièrement bien sur des pourcentages : au lycée 52% des tâches sont algorithmiques, et 33% concernent des réalisations graphiques ; seules 14% des exercices figurant dans les manuels comportent une dimension heuristique, encore peut-on douter s'ils sont effectivement donnés à faire aux élèves. Au début de l'enseignement supérieur, nous avons identifié 37% de tâches algorithmiques, pas d'occurrence de tâches graphiques, et 63% de tâches de recherche, avec l'usage de nouvelles techniques ou technologies.

Conclusion

L'étude des paramètres de la transition met en évidence les multiples composantes contribuant à creuser l'écart entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, et à rendre très difficile le travail des étudiants confrontés à des modifications majeures dans toutes les dimensions de leur travail et dans les connaissances en jeu.

Dans ces conditions, les choix faits ne peuvent se limiter à déterminer la "dose de formel" dans les premiers apprentissages : il est essentiel de penser les situations adéquates pour l'entrée dans une nouvelle théorie comme l'analyse, ainsi que le champ de problèmes que les élèves doivent rencontrer et les outils à leur disposition pour traiter ces problèmes. Il faut aussi envisager comment pourrait s'effectuer le passage de techniques plus ou moins algorithmiques à des techniques relevant de la validation en analyse. En bref, il est nécessaire d'envisager l'articulation de l'analyse presque algébrique du lycée et de l'analyse théorique de l'Université : comment penser l'introduction d'une nouvelle théorie dans une perspective d'adaptation ultérieure ? Des études sur les curriculums, les ingénieries et les situations, les connaissances des étudiants et leur évolution, etc ... sont encore nécessaires.

Par ailleurs un enseignement de l'analyse qui se donnerait comme objectif d'organiser l'introduction des outils théoriques, dans la perspective de leur articulation avec les savoirs prévus à l'Université, un tel enseignement prend du temps : or, en France, les horaires de mathématiques ont diminué drastiquement dans les séries scientifiques. Des ingénieries existent qui vont dans le sens souhaité d'une meilleure prise en compte des variables de la transition[13], tant au secondaire qu'au supérieur, mais elles nécessitent un temps d'enseignement plus long que ce que l'institution accorde actuellement.

La question se pose donc des moyens que se donne l'enseignement des mathématiques pour gérer des variations aussi importantes, afin de ne pas décourager, durant les deux dernières années de lycée, les élèves d'entreprendre des études de mathématiques ; et afin de ne pas évacuer brutalement, au début du cursus universitaire, les étudiants ayant réussi à s'y engager. Le rôle du professeur risque également d'en être rendu particulièrement difficile : comment s'appuyer sur des connaissances antérieures inadaptées, comment amener les étudiants à prendre en compte les nouvelles exigences ? Nous ne pouvons qu'énoncer actuellement le constat auquel conduit notre étude :

La transition lycée/université en Analyse s'accompagne de modifications majeures dans la nature du travail mathématique, induisant un basculement du contrat difficile à saisir de la part des étudiants et à gérer de la part de l'enseignant.

Bibliographie

BLOCH, I. (1999) 'L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 135-194.

BLOCH, I. (2000) *'L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée /université'*, Bordeaux : Université Bordeaux I.

BLOCH, I. (2002) 'Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée', *Petit x 58*, 25-46.

BLOCH, I (2003) 'Teaching functions in a graphic milieu: What kind of knowledge enables students to conjecture and prove?' *Educational Studies in Mathematics* 52, 3-28.

BLOCH, I (2005) 'Dimension a-didactique et connaissance nécessaire: Un exemple de "retournement" d'une situation', *Sur la Théorie des Situations Didactiques*, 143-152, MH Salin, P.Clanché, B. Sarrazy éditeurs, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOSCH, M., FONSECA, C., GASCON, J. 'Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares', *RDM 24/2.3*, 205-250, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIDOUX, S, (2005) Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université, mémoire de DEA, Université Paris 7
ftp://ftp.umh.ac.be/pub/ftp_san/DEA_memoire.pdf

BROUSSEAU, G. (1998) *'Théorie des Situations Didactiques'*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

13 Cf. Bloch, 2000 : Le flocon, chapitre 6 ; Sackur et Maurel, 2002. Voir aussi le travail du groupe TSG 12 au congrès ICME 10 en 2004 : www.ICME-10.dk , et les travaux sur WIMS : Vandebrouck et Cazes, à l'Université d'Evry.

CASTELA, C. (2000) 'Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique', *RDM 20/3*, 331-380, Grenoble La Pensée Sauvage.

CHELLOUGUI, F. (2003) 'Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien', *Petit x 61*, 11-34.

GHEDAMSI, I. (2003) *'La transition lycée/Université en Analyse. Mise en évidence de facteurs de rupture. Le cas de la notion de limite.'* Mémoire de DEA, Université de Tunis & Université Bordeaux 2.

MASCHIETTO, M. (2001) 'Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/1-2, 123-156.

PRASLON, F. (2000) *'Continuité et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement'.* Thèse, Université Paris 7.

ROBERT, A. (1998) 'Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université', *RDM 18/2*, 139-190, Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROGALSKI, M. et al. (2001) *'Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie'*, Paris : Ellipses.

SACKUR, C. & MAUREL, M. (2002) 'La presqu'île : une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG', *Actes de la XIème Université d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 167-176, Dorier éditeur, Grenoble : La Pensée Sauvage.

SCHNEIDER M. (2001a) 'Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d'un enseignement des limites au secondaire,' in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21-1.2, 7-56

SCHNEIDER M. (2001b) 'Une ingénierie didactique passée au crible de concepts de didactique,' in Mercier A., Rouchier A., Lemoyne G. (eds), *Sur le génie didactique usages et mésusages des théories de l'enseignement*, De Boeck, Louvain-la-Neuve

SFARD, A. (1991) 'On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different sides of the same coin' *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

VANDEBROUCK F, CAZES C., 'Exploitation des journaux de traces à l'Université', in *Actes du colloque TICE 2004* :
http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/docs/00/02/75/92/PDF/Vandebrouck_Cazes.pdf