DES APPRENTISSAGES SPECIFIQUES POUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES ?

Jean JULO
Maître de conférences en Sciences de l'Education
UFR Mathématiques / IREM
Université de Rennes 1

La question des rapports entre apprentissage et résolution de problèmes est sans doute l'une des plus complexes qui se pose dans le domaine des recherches sur l'enseignement. Et cette question concerne en premier lieu la didactique des mathématiques tant la résolution de problèmes est liée, intrinsèquement, à la formation et au fonctionnement des connaissances qui caractérisent cette discipline.
Au niveau intuitif, deux hypothèses concernant ces relations paraissent avoir longtemps influencé les pratiques :
- d'abord l'hypothèse d'un réinvestissement quasi automatique des notions enseignées dès lors que celles-ci sont " vraiment " comprises ; il existe pourtant quantité de faits observés tous les jours par les enseignants et peu compatibles avec cette idée ; mais si l'on prend comme référence ceux qui ont les meilleures performances et si l'on se contente de mesurer le réinvestissement dans quelques problèmes bien choisis, on pourra effectivement avoir cette impression qu'un bon apprentissage notionnel conduit assez " naturellement " à des compétences élevées en matière de résolution de problèmes ;
- la seconde hypothèse est que pour bien maîtriser un type de problèmes, il faut en faire plusieurs de cette sorte et s'entraîner systématiquement à leur résolution ; que ce soit en vue d'une pratique donnée (vie courante, activité professionnelle) ou en vue d'un examen, l'exercice semble le moyen le plus sûr de tendre vers une performance optimale ; bien sûr, cette hypothèse est apparemment contradictoire avec la précédente mais on s'en tire en considérant qu'elles ne se situent pas sur le même plan : ce qu'il faut automatiser ce sont les procédures et les modes de raisonnement pour qu'ils deviennent très disponibles et très opérationnels ; les notions serviraient, quant à elles, à comprendre et à transférer la compréhension d'une situation à une autre.
En fait, ces deux hypothèses traduisent vraisemblablement, chacune à leur manière, l'idée plus générale et très ancienne que résoudre " intelligemment " des problèmes ne s'apprendrait pas. Soit on résout mécaniquement après s'être longuement exercé, soit la solution s'impose d'elle-même, issue de ce que l'on a pu appeler l'intuition, le travail inconscient ou, tout simplement, l'intelligence.
Or une telle conception n'est plus compatible avec les données dont nous disposons aujourd'hui. Ces données sont diverses, issues de plusieurs champs de recherches, elles sont encore très parcellaires, loin de pouvoir être intégrées dans un modèle cohérent, mais elles permettent au moins d'envisager des manières différentes de poser cette question cruciale de la possibilité d'un apprentissage à la résolution de problèmes. Le point de vue que nous présentons ici s'appuie à la fois sur des données de la psychologie cognitive concernant l'activité de résolution de problèmes et sur une réflexion didactique autour de la notion d'aide à la résolution de problèmes en mathématiques. Notre but est d'apporter

une contribution au débat alimenté par plusieurs articles de cette revue au cours des années passées (voir Grand N n° 63 pour un récapitulatif).

APPRENDRE À RESOUDRE DES PROBLEMES : LES PRINCIPALES APPROCHES

Il nous semble utile de commencer par une brève synthèse des travaux qui se sont directement intéressés à la question qui nous occupe ici. Ces différentes approches peuvent être regroupées autour de trois axes principaux que nous présenterons dans l'ordre chronologique de leur apparition mais qui, loin de se remplacer, ont continué à se développer, s'influençant réciproquement et s'imbriquant en partie.

Du transfert d'apprentissage au raisonnement par analogie

Cet axe est celui des recherches en psychologie qui, très tôt, se sont intéressées aux relations entre apprentissage et résolution de problèmes en tentant de considérer cette dernière activité comme un cas limite de transfert d'apprentissage. Dans une revue de questions sur ce thème (Turquin, 1970), l'auteur analyse plusieurs expériences concernant des entraînements à la résolution de problèmes (il s'agit en l'occurrence de problèmes se prêtant bien à un contrôle expérimental c'est-à-dire non liés à un enseignement) et montre les effets très limités de cette variable. Des chercheurs travaillant dans une perspective théorique différente avaient d'ailleurs, dès le départ, critiqué cette approche, considérant que de tels entraînements ne pouvaient conduire qu'à une “ mécanisation ” de la pensée et nuire au mécanisme qui leur semble essentiel pour la découverte de la solution : la restructuration des données du problème. Ces travaux d'orientation gestaltiste (se référant à la *Gestalttheorie* ou Théorie de la Forme) s'orientent donc plutôt vers l'étude des caractéristiques de la situation qui favorisent ou, au contraire, font obstacle à une telle résolution “ par compréhension ” ; ils sont même conduits, ainsi, à expérimenter certaines indications ou aides (*hints*) qui influeraient sur l'activité de résolution mais sans que leurs travaux débouchent vraiment sur des résultats transposables à l'enseignement.
Avec les années 70 et l'émergence du courant dit du traitement de l'information, c'est une tout autre approche de la résolution de problèmes qui est privilégiée (la parution en 1972 de l'ouvrage de Newell et Simon - *Human Problem Solving* - est généralement considérée comme la charnière entre les deux périodes). La préoccupation principale devient celle d'une meilleure connaissance du fonctionnement cognitif en situation et la question des liens avec l'apprentissage passe au second plan. Toutefois, des notions importantes comme celles de représentation, de schéma, de stratégie, de planification et de contrôle vont montrer leur intérêt pour étudier des problèmes plus “ riches ” sémantiquement que ceux pris en compte auparavant (voir par exemple le numéro spécial de Psychologie Française *Résoudre des problèmes au laboratoire, à l'école, au travail* coordonné par Richard - 1984). Au cours des deux dernières décennies, la question des rapports entre apprentissage et résolution de problèmes est réapparue, posée cette fois en termes de processus cognitifs et dans le cadre d'une problématique très particulière : celle du raisonnement par analogie (raisonnement qui s'appuie sur le traitement de la “ ressemblance ” qui existe entre des objets ou leurs représentations). Ce type de raisonnement est au cœur de l'activité de résolution de problèmes, on le savait depuis longtemps, mais on a commencé à mieux

comprendre la nature des processus qui font que l'on est capable ou non d'utiliser ce que l'on a appris dans un problème donné pour résoudre un autre problème plus ou moins proche (Gineste, 1997 pour une synthèse). Ces travaux, qui renvoient souvent à la notion de schéma dont nous parlerons un peu plus loin, devraient jouer un rôle de plus en plus important dans notre manière d'appréhender la relation entre résolution de problèmes et formation des connaissances (Cauzinille-Marmèche & Didierjean, 1999).

Heuristique, problem-solving, métacognition

L'ouvrage du mathématicien George Polya dont la première édition paraît en 1945 marque le point de départ d'un axe de réflexion et de recherche distinct du précédent. D'abord *How to solve it ?* (traduction française : Polya, 1965) se veut d'emblée un outil pratique pour les enseignants de mathématiques. Si " l'heuristique moderne " est définie comme une discipline s'efforçant « de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier les opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles à l'application de cette méthode », le but affiché est très clair et très concret : aider les élèves et les étudiants (« l'un des devoirs les plus stricts du professeur » pense Polya) en leur apprenant à résoudre des problèmes. Polya connaissait les travaux de psychologie menés au début du siècle (en particulier ceux des gestaltistes) et s'est peut-être inspiré d'un ouvrage pédagogique plus ancien (Young, 1924 cité dans Higgins, 1997) mais il lui revient le mérite, pas assez reconnu, d'avoir clairement posé la question de la place des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il est vrai que la méthode proposée par Polya n'a jamais fait ses preuves et ceci, comme l'a remarqué très tôt un spécialiste de la résolution de problèmes en mathématiques, parce que « nous savons trop peu de choses à propos de la manière dont les sujets utilisent les règles heuristiques et absolument rien à propos de la manière dont ils adaptent ces heuristiques à différentes sortes de problèmes. » (Kilpatrick, 1969).
Malgré cette inefficacité, au moins apparente, des démarches visant à rendre les élèves plus performants dans la résolution des problèmes mathématiques, la réflexion initiée par Polya va se poursuivre en intégrant des idées et des notions issues soit de la psychologie cognitive, soit de la didactique des mathématiques, soit de la pratique même de l'enseignement par la résolution de problèmes. Les travaux qui relèvent de ce courant dit du *problem solving* sont en fait très divers et difficiles à décrire de manière exhaustive. On connaît en France, les travaux sur le problème " ouvert " (Arsac et al, 1988) et le lien fait avec la notion de situation-problème. On connaît aussi les tentatives de redéfinition des objectifs attribués à une formation à la résolution de problèmes en mathématiques (Pluvinage, 1992). Les principaux emprunts faits à la psychologie cognitive concernent les notions de stratégie et de métacognition (Schoenfeld, 1985 ; Robert & Robinet, 1996). Dans le cas de cette dernière approche, les risques à la fois théoriques et pratiques d'une telle transposition, alors même que les concepts n'ont pas encore un fondement bien établi, ont été mis en avant tant par des psychologues (Fayol & Monteil, 1994) que par des didacticiens (Sarrazy, 1997). Des recherches enfin, et ce sont sans doute les plus convaincantes, essaient tout simplement d'analyser les effets de séquences plus ou moins longues d'apprentissage des méthodes de résolution de problèmes. L'habituel constat d'une absence de transfert pour la résolution de problèmes " du tout-venant " conclut généralement ces recherches mais des analyses plus fines montrent aussi des effets intéressants au niveau de l'attitude des élèves (persévérance plus grande dans la recherche d'une solution par exemple) ou encore au niveau de leur conception des mathématiques

(Higgins, 1997). L'ennui, bien sûr, est que ces progrès, dont beaucoup de ceux qui adoptent le point de vue de Polya ont le sentiment qu'ils sont bien réels, ne se retrouvent pas au niveau des performances et ne sont donc pas “ utiles ” aux élèves.
On peut noter ici que certaines dérives des pratiques proposées, actuellement dans les manuels scolaires pour l'enseignement élémentaire (Houdement, 1998) trouvent leur source dans ce courant très fort de l'apprentissage méthodologique. Ce serait par l'enseignement de règles d'action générales (des méthodes) que l'on aiderait le mieux ceux qui ont des difficultés en mathématiques. En dehors du fait que rien ne permet d'étayer, ni théoriquement ni empiriquement, les fondements de cette approche, le risque de faire “ de la résolution de problèmes pour la résolution de problèmes ”, indépendamment de toute finalité conceptuelle, est grand.

Classes de problèmes, catégorisation, apprentissage de schémas

Deux séries de travaux vont contribuer à faire émerger, au début des années 80, un axe de recherche distinct des deux précédents. La première concerne la résolution des problèmes appelés souvent maintenant “ additifs ” (problèmes arithmétiques dont le traitement implique une addition ou une soustraction) et la mise en évidence des différentes classes que recouvre cet ensemble si l'on examine de près les relations entre les éléments constitutifs du problème (et pas seulement l'opération à effectuer comme on le faisait précédemment). On sait le rôle de pionnier qu'a joué Gérard Vergnaud dans le développement de ce domaine de recherche (Vergnaud & Durand, 1976 ; Brun, 1999 pour une synthèse des travaux sur ces problèmes) et l'on connaît relativement bien maintenant l'influence de la structure relationnelle qui caractérise le problème sur les stratégies mises en œuvre par les élèves et sur leur capacité ou non de le résoudre. La seconde série de travaux qui va conduire à poser de manière nouvelle les relations entre apprentissage et résolution de problèmes concerne l'organisation des connaissances en mémoire et la catégorisation des problèmes. Plusieurs recherches ont montré, à partir des années 80, que l'une des variables qui caractérise le plus un “ expert ” dans un domaine donné (sciences physiques ou mathématiques dans les premiers travaux - par exemple : Schoenfeld & Hermann, 1982) est sa manière de catégoriser un ensemble de problèmes qu'on lui propose. La capacité de regrouper des problèmes qui ont des structures proches (et qui relèvent donc de la même classe de problèmes du point de vue du domaine considéré) est le premier critère qui a frappé les chercheurs mais on sait maintenant que d'autres critères sont aussi pris en compte par les experts pour organiser efficacement leurs connaissances en vue de résoudre des problèmes. S'appuyant sur la notion de schéma développée par ailleurs en psychologie cognitive, l'idée que cette aptitude plus ou moins grande à catégoriser les problèmes et à reconnaître des classes de problèmes pertinentes correspondrait à la formation de “ schémas de problèmes ” plus ou moins élaborés s'est peu à peu imposée. Nous reviendrons sur cette idée qui nous semble essentielle par la suite.
La conjonction de ces deux séries de résultats ne pouvait que conduire à envisager la possibilité d'apprendre aux élèves à catégoriser les problèmes et ceci tout particulièrement dans les domaines où l'analyse des classes pertinentes du point de vue de la compréhension est la plus avancée (problèmes additifs et multiplicatifs simples). Beaucoup de ces tentatives mettent en œuvre des outils de représentation graphique (des diagrammes ou des “ schémas ” au sens courant du terme) pour aider les élèves à différencier certaines classes de problèmes (voir par exemple : Lewis, 1989 ; Fischer, 1993

; Levain, 2000). Sans être toujours probants, les résultats des expérimentations réalisées semblent encourageants, mais le nombre d'expérimentations est encore trop faible pour avoir une idée précise de l'efficacité de cette manière de procéder (les premiers travaux réalisés dans le cadre du problem solving montraient aussi des résultats encourageants).

On notera que cette dernière approche représente, d'une certaine manière, un aboutissement dans une évolution qui semble se traduire par une particularisation de plus en plus grande des compétences visées lorsqu'on met en place un apprentissage à la résolution de problèmes. Pour être efficace, il faut que ce que l'on apprend aux élèves soit très spécifique des problèmes qu'on voudrait qu'ils sachent résoudre. Le risque n'est-il pas alors de revenir à des formes d'apprentissage dans lesquels les aspects conceptuels jouent un rôle secondaire ? On a toujours su entraîner les élèves à résoudre des problèmes appartenant à des classes bien définies et relativement restreintes, c'était même là l'objet central de l'arithmétique élémentaire il n'y a pas si longtemps. En quoi apprendre à représenter graphiquement la structure d'un problème et à reconnaître des classes de problèmes diffère-t-il des pratiques anciennes d'entraînement systématique à la résolution de certains types de problèmes ? Ces interrogations renvoient directement à la notion de schéma de problèmes qui est devenue centrale dans la réflexion actuelle.

COMMENT SE FORMENT LES SCHEMAS DE PROBLEMES ?

Ce qui semble acquis, en examinant les données dont nous disposons désormais, est l'existence de processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes. L'accès aux connaissances et leur instanciation dans une situation donnée ne sont pas des phénomènes triviaux, même dans le cas où l'on a une bonne compréhension et une bonne pratique (entendue comme résultat d'un exercice) de ces connaissances. Ce sont des processus cognitifs *ad hoc* qui vont faire que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour la traiter. On peut raisonnablement supposer, en outre, que si ces processus spécifiques de l'activité de résolution de problème ont un versant opératoire (que l'on évoque souvent sous le terme général de stratégie), ils ont également un versant représentationnel dont le rôle est déterminant. Et l'hypothèse que ce second versant serait très lié aux objets cognitifs particuliers que l'on désigne actuellement sous le terme générique de schémas de problèmes est à envisager sérieusement lorsqu'on s'interroge sur la possibilité d'un apprentissage à la résolution de problèmes.

La nature des schémas de problèmes

La notion de schéma de problèmes a d'abord été développée dans un contexte (celui des travaux en intelligence artificielle) qui incitait à concevoir ces objets comme des entités abstraites (des “ ensembles organisés de variables ”). Les conceptions actuelles mettent plutôt en avant la diversité importante qui existe, très vraisemblablement, au niveau de la nature de ces objets qui organisent notre mémoire des problèmes (voir par exemple : Lamour & Coulet, 1998 ; Cauzinille-Marmèche & Didierjean, op cit). Nous pouvons en distinguer au moins de trois sortes.

■ Les schémas de type “ cas ”

Ces cas correspondent à des problèmes qui, comme tels, laissent une “ trace ” en mémoire à long terme. Une telle trace est de nature sémantique (et non épisodique : il ne s’agit pas du souvenir de l’événement “ avoir résolu tel problème dans telle circonstance ”), c’est-à-dire qu’elle a fait l’objet d’une élaboration cognitive conséquente. La nature de cette élaboration est elle-même variable, suivant que le problème a été résolu ou non, compris ou non, identifié comme exemplaire ou non, qu’il appartient à un domaine bien maîtrisé ou non,...

C’est sans doute dans le domaine du jeu d’échec (étudié par les psychologues comme situation de résolution de problème) que l’existence de tels objets a été le plus clairement mise en évidence. Des inférences faites à partir de résultats obtenus dans diverses expériences portant sur des joueurs à différents niveaux d’expertise (débutants, maîtres, grands maîtres) conduisent à penser qu’une composante importante de l’expertise est formée d’un ensemble de “ cas ”. Il s’agit, en l’occurrence, de certaines configurations de pièces sur l’échiquier. On estime ainsi à 50 000 le nombre de ces patterns significatifs que peut reconnaître un très bon joueur (Getz, 1996, pour une synthèse). Pour chacun de ces patterns, de nombreuses options de jeu sont possibles et c’est à ce niveau qu’interviennent d’autres connaissances, en particulier des heuristiques, qui vont contribuer à la stratégie adoptée par le joueur. La compétence d’un grand joueur d’échec c’est donc d’abord une “ bibliothèque ” d’environ 50000 cas organisée d’une manière propre, avec des indexations directement liées à son expérience particulière et des liens vers d’autres sortes de connaissances.

Pour les problèmes relevant d’un domaine plus riche sur le plan conceptuel, comme les mathématiques, il est vraisemblable que nous nous dotons aussi, progressivement, d’une telle bibliothèque de cas, celle-ci se complexifiant très vite dès que notre maîtrise du domaine augmente. Nous avons quelquefois conscience de l’intervention de ces cas dans le processus de résolution, en particulier lors d’un raisonnement par analogie explicite (« Ah oui, c’est comme le problème que j’ai fait l’autre jour... »), mais cette intervention reste le plus souvent totalement implicite, limitée au façonnage de notre représentation du problème.

On peut noter ici le fait qu’il est probable que quelques-uns de ces cas occupent une position très particulière dans la compréhension que nous avons de certains concepts. Ils vont, soit pour des raisons propres à l’individu, soit en raison de leur lien avec la connaissance en jeu, acquérir un statut d’exemples privilégiés, de prototypes, au sein de notre mémoire sémantique. En ce qui concerne la proportionnalité, par exemple, le problème du puzzle à agrandir ou certains problèmes d’engrenages de rouagesnous ont paru occuper, assez souvent, cette position privilégiée pour les jeunes élèves. L’hypothèse des « situations fondamentales » développée par Brousseau (1986) pourrait, bien évidemment, être envisagée aussi sous cet angle.

■ Les schémas de type “ regroupements ”

Cette seconde sorte de schéma n’est pas directement évoquée dans les travaux de psychologie cognitive. On a d’abord considéré qu’il existait une hiérarchie entre deux modes de catégorisation des problèmes : celui qui repose sur les “ traits de surface ” (les

éléments non pertinents du point de vue de leur résolution - en particulier les fameux “ habillages ” dont on a parlé à une certaine époque) et celui qui repose sur la “ structure ” de ces problèmes (les éléments qui permettent de les rattacher à une classe pertinente du point de vue des connaissances en jeu). Des expériences portant sur des tâches de classification de problèmes ont montré, effectivement, que la maîtrise progressive d’un domaine de connaissances s’accompagne de la capacité de plus en plus grande de reconnaître des problèmes ayant une “ même structure ”. Or, récemment, pour rendre compte de nombreux résultats incompatibles avec cette hypothèse d’une expertise qui s’accompagnerait systématiquement d’une évolution des schémas vers plus d’abstraction, l’idée s’est imposée que les traits de surface ont aussi une fonction importante dans l’organisation de notre mémoire des problèmes. Il est fortement probable, en fait, que les traits de surface coexistent avec des schémas plus abstraits, même chez ceux qui maîtrisent bien un domaine, et qu’ils peuvent avoir un rôle important dans la mise en place de notre représentation d’un nouveau problème (en particulier un rôle d’amorçage par rapport à d’autres sortes de schémas).
On peut sans doute aller plus loin en supposant l’existence de véritables schémas de problèmes correspondant à des regroupements non liés à la structure “ profonde ” des problèmes. Ces regroupements pourraient se mettre en place à partir de certaines ressemblances de surface mais surtout à partir de critères de nature pragmatique. Dans le champ de la proportionnalité, par exemple, nous avons souvent observé que les problèmes mettant en jeu des prix ne sont pas traités de la même manière que les autres. C’est vraisemblablement qu’ils font l’objet, au niveau cognitif, d’un regroupement à part, non seulement en raison de la grandeur qui les caractérise mais aussi parce que les expériences liées à ce type de problèmes sont anciennes, nombreuses et très particulières. De même, les résultats d’une recherche portant sur un problème de recettes/dépenses (Brissiaud, 1984) et qui tendent à montrer que les élèves auraient très jeunes un schéma particulier correspondant aux problèmes de ce type rencontrés à l’école (avec la caractéristique d’une différence toujours très faible entre le montant des recettes et celui des dépenses) nous semblent très significatifs.

■ Les schémas de type “ catégories abstraites ”

Ces schémas abstraits sont ceux qui ont été privilégiés dans un premier temps, en particulier dans les recherches sur la résolution de problème par analogie. C’est en devenant capable de percevoir la ressemblance qui existe entre deux problèmes, du point de vue de leurs structures, que l’on deviendrait capable de transférer la solution d’un problème connu à un problème nouveau. Et c’est la mise en place de schémas de plus en plus abstraits qui nous permettrait de percevoir et d’analyser de mieux en mieux cette analogie entre problèmes appartenant à une même classe.
Les choses sont sans doute loin d’être aussi simples. D’une part, nous venons de le voir, parce que ces schémas abstraits ne remplacent pas d’autres schémas que l’on a d’abord considérés comme plus archaïques et destinés à être supplantés. Plusieurs sortes de schémas se développent en parallèle, très vraisemblablement, se coordonnant en partie mais conservant aussi des fonctions distinctes et complémentaires. D’autre part, les schémas abstraits ne constituent pas, eux-mêmes, un ensemble très homogène. Prenons par exemple les problèmes additifs élémentaires : on a agi pendant longtemps en considérant que le schéma le plus abstrait était celui qui permettait de différencier les problèmes où il faut faire une addition de ceux où il faut faire une soustraction, en s’appuyant sur l’idée

générale des relations entre un tout et plusieurs de ses parties. Or, on sait que de nombreuses données permettent de penser, désormais, que devenir expert dans la résolution de ce type de problèmes consiste aussi à devenir capable de différencier les six grandes structures relationnelles qui les caractérisent, c'est-à-dire à se doter de schémas correspondant à ces différentes catégories abstraites. Il en est de même pour la proportionnalité où le schéma abstrait qui va pouvoir se construire à partir de l'idée de suites proportionnelles et de coefficient de proportionnalité n'est pas de même nature que celui qui va permettre de différencier les problèmes de composition d'isomorphismes des problèmes de double proportionnalité.
On peut supposer qu'il existe au moins trois sortes de schémas abstraits :
- ceux qui correspondent à des catégories bien différenciées en termes de structures de problèmes (notons que l'on commence tout juste à savoir reconnaître ces catégories et à les analyser de manière systématique) ;
- ceux qui correspondent à des outils de modélisation introduits dans l'enseignement (par exemple le tableau de proportionnalité ou les diagrammes fléchés pour les problèmes additifs) ;
- ceux qui correspondent à des procédures de résolution acquérant le statut de règle d'action pour une catégorie donnée de problèmes, c'est-à-dire de procédures à la fois automatisées et comprises pour cette classe de problèmes (par exemple la règle de trois autrefois).
On pourrait considérer que seule la première sorte de schémas relève de la notion de schéma de problèmes, la seconde relevant plus de la formation des concepts eux-mêmes et la troisième plutôt d'une analyse en termes de schèmes d'action. Il est vrai que le propre des schémas abstraits est de se former en liaison souvent étroite avec les autres formes de connaissances qui contribuent à la maîtrise conceptuelle d'un champ donné. Il nous semble essentiel, toutefois, d'insister sur la spécificité de ce mode d'organisation de l'expérience en schémas qui n'a pas vocation, comme on l'imagine parfois, à se diluer dans une sorte de “ compréhension globale ” des choses et qui reste bien distinct, au contraire, des autres composantes de l'apprentissage conceptuel même lorsqu'il se coordonne avec elles.

L'apprentissage des schémas de problèmes

La question posée au début de cet article revient donc, au moins en partie, à se demander dans quelle mesure il est possible d'agir, par un apprentissage provoqué, sur la formation de ces connaissances spécifiques que constituent les schémas de problèmes. Dans la première partie, nous avons montré comment cette idée a émergé à la fin des années 80, au confluent de plusieurs axes de recherche :
- les travaux portant sur le repérage des classes de problèmes pertinentes pour la maîtrise d'un domaine de connaissances particulier,
- les travaux portant sur l'activité de catégorisation et montrant comment l'expertise dans un domaine est liée à certaines formes d'organisation en mémoire des problèmes déjà rencontrés,
- l'axe enfin, beaucoup plus flou, des travaux portant sur la notion de schéma prise quelquefois dans le sens courant de représentation graphique épurée et quelquefois dans le sens décrit précédemment de schéma de problème (Levain, op cit).

Du point de vue pratique, les démarches d'apprentissage/enseignement mises en œuvre reposent quasiment toutes sur les trois options suivantes :

- agir sur l'activité de catégorisation en vue de mettre en place des compétences plus élevées en matière de résolution de problèmes ;
- expliciter les structures qui caractérisent certaines classes de problèmes en vue d'apprendre aux élèves à catégoriser ces problèmes (c'est-à-dire leur apprendre à reconnaître ceux qui ont la même structure et à différencier cette classe des autres) ;
- utiliser plus ou moins systématiquement des représentations graphiques de type diagrammes pour expliciter les structures des différentes classes de problèmes, les symboliser et fournir un principe de catégorisation.

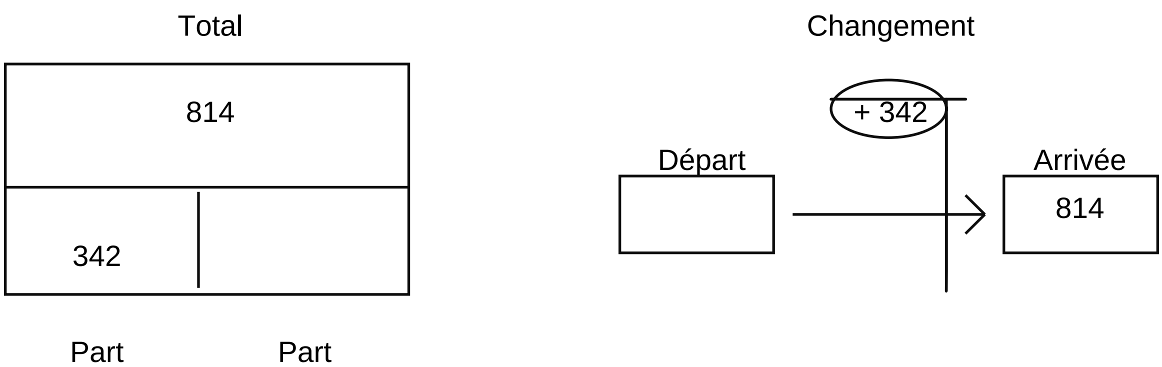
Or ces trois options nous semblent appeler une discussion prenant en compte les données précédentes sur la notion de schéma de problèmes. Pour cela, nous les prendrons à rebours de l'ordre d'énumération précédent.

■ Recourir à des représentations symboliques conventionnelles ?

Rappelons le principe à partir de l'une des premières recherches mettant en œuvre un tel apprentissage basé sur l'utilisation de représentations graphiques des problèmes additifs. Willis et Fuson (1988) proposent ainsi de représenter et de différencier les problèmes de type " combinaison " (*John et Bill ont 814 jouets ensemble. John a 342 jouets. Combien Bill a-t-il de jouets ?*) des problèmes de type " changement " (*John avait des jouets. Alors Bill lui a donné 342 jouets de plus. Maintenant John a 814 jouets. Combien de jouets John avait-il au départ ?*) de la manière suivante :

Exemple 1
Problème de combinaison :
recherche de la seconde part

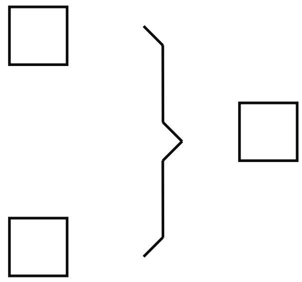
Exemple 2
Problème de changement :
augmentation avec recherche
du nombre de départ



Diagrammes proposés par Willis et Fuson (d'après Fischer, 1993)

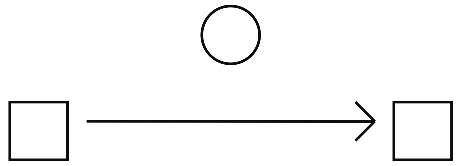
Actuellement, en France, ce sont les diagrammes proposés par Vergnaud qui s'imposent comme signifiants pour expliciter la structure relationnelle qui caractérise chacune des classes retenues dans la théorie. Ainsi, dans *Le Moniteur de Mathématiques*, outil pédagogique pour le cycle 3 publié sous sa direction (Vergnaud, 1997), les diagrammes suivants sont proposés pour représenter les deux catégories précédentes :

Relation partie-partie-tout



Transformation d’états

Relation état-transformation-état



Diagrammes proposés dans *Le Moniteur de Mathématiques* (1997)

Le statut transitoire de ces diagrammes est nettement mis en avant dans la méthode que propose ce document pédagogique : « En tant que support pour les problèmes, ils sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes » (Vergnaud, op. cité, p. 34). Il n’en reste pas moins qu’ils ont une fonction clé dans l’apprentissage : « Mais cette maîtrise ne vient pas d’un seul coup, et les schémas et représentations adaptés sont dans un premier temps un support utile, voire indispensable *(souligné par nous)* pour comprendre un problème et envisager des procédures de résolution » (Vergnaud, op. cité, p.34). Dans une expérience récente (Levain, op. cité) qui étudie les effets d’une séquence didactique basée sur l’introduction de ces mêmes représentations issues de la théorie de Vergnaud (pour des problèmes additifs et multiplicatifs), la conclusion est aussi très affirmative bien que les dérives possibles d’une telle approche soient évoquées : « A l’intérieur du cadre de travail que nous venons d’exposer, l’apprentissage et l’utilisation de schémas, comme autant de représentations graphiques isomorphes aux différentes structures de problèmes, nous semblent très utiles. Ces schémas nous apparaissent comme de formidables outils facilitant l’identification des opérateurs et l’analyse des procédures. Il convient bien évidemment de ne pas rigidifier outre mesure ces schémas qui ne traduisent qu’une modélisation de la situation parmi d’autres » (Levain, op. cité, p. 426).

On voit donc que les représentations symboliques ont un statut complexe dans ces séquences d’apprentissage. Elles sont d’abord une aide à la catégorisation, c’est-à-dire un support pour l’activité cognitive permettant de reconnaître et de différencier plus facilement les classes de problèmes considérées comme pertinentes. Mais les conventions choisies ont aussi une vraie fonction sémiotique : elles sont supposées “ représenter ” la structure du problème (la flèche horizontale par exemple représente la transformation dans le diagramme choisi majoritairement pour les problèmes additifs dits de transformation d’états ou de changement). Or, à ce niveau, on prend un risque important sur le plan cognitif : non seulement on cherche à induire la formation d’un schéma de problèmes particulier (celui correspondant à des catégories abstraites) mais on l’associe d’emblée à une forme symbolique particulière, fixant par là même un mode d’organisation de la connaissance parmi tous ceux qui seraient possibles (on suppose bien sûr qu’il ne sera que provisoire et évoluera rapidement). Enfin, on attribue aussi une fonction opératoire à ces représentations symboliques : elles peuvent servir de support pour l'élaboration de la procédure de résolution ; là encore, on espère que cette fonction ne sera que provisoire, l'élève devenant rapidement capable de construire ses propres représentations mentales et d'élaborer des procédures indépendantes de celles qui sont induites par les schémas. Il n'en reste pas moins que ce sont ainsi les trois branches de la conceptualisation (la branche des situations, celle des langages et celle des actions) qui se trouvent étroitement associées dès la première étape de l'apprentissage ; on peut y voir un avantage, on peut aussi considérer que c'est un vrai risque dès lors qu'on suppose que les schémas de problèmes pourraient se former suivant une logique très différente de celle mise en œuvre dans un tel apprentissage.

■ Expliciter la structure des problèmes ?

Indépendamment de cette ambiguïté concernant l'utilisation de représentations symboliques conventionnelles dans ces démarches (avec les risques de dérives vers certaines formes de systématisation qu'elle entraîne), c'est le fait même d'expliciter la structure des problèmes qui nous semble devoir être discuté. On privilégie ainsi l'un des modes d'organisation de l'expérience, celui qui correspond à des schémas abstraits, alors que la diversité des formes d'organisation en mémoire est sans doute un atout majeur pour améliorer notre maîtrise d'un ensemble donné de problèmes. Cette logique d'implémentation d'un certain type de schémas nous paraît avoir plus d'inconvénients que d'avantages mais seules les données empiriques nous permettront, dans quelques années et après une généralisation de la pratique, de trancher.
Des démarches qui ne reposent pas sur cette logique et qui ne conduisent pas à expliciter la structure des problèmes existent. D'ailleurs un outil comme *Le Moniteur de Mathématiques* évoqué ci-dessus peut être utilisé sans recourir à une telle explicitation. Les cahiers qui constituent pour l'élève la partie visible de la méthode ne contiennent que des énoncés de problèmes regroupés d'une manière très élaborée et qui semble intéressante. Définir très précisément la base de problèmes à laquelle on va confronter l'élève, et tout particulièrement une structuration de cette base qui tienne compte des données actuelles de la recherche, est déjà une manière d'induire une activité de catégorisation et la formation de schémas de problèmes. Il est possible également, dans le même esprit, de recourir à des tâches de classement de problèmes ou des tâches de fabrication d'énoncés (par rapport à des énoncés cibles) qui permettent, sans expliciter d'aucune manière la structure des problèmes en jeu, d'amener l'élève à faire des rapprochements et des différenciations qui resteront pour la plupart implicites.

■ Agir sur l'activité de catégorisation ?

Il est vraisemblable que l'activité de catégorisation joue un rôle dans la formation des schémas de problèmes. Toutefois, ce rôle pourrait n'être que partiel, n'intervenir que pour certains types de schémas, ou alors seulement à certains moments, pour réorganiser par exemple notre mémoire des problèmes après une nouvelle avancée sur l'un ou l'autre des axes de la conceptualisation. La formation des schémas de type “ cas ”, au moins, ne paraît relever ni d'un processus de catégorisation ni même d'un processus d'induction (celui qui permet de repérer et d'abstraire des régularités dans un ensemble d'objets distincts). Elle pourrait relever plutôt d'un processus de type abduction, c'est-à-dire de la possibilité que semble avoir notre système cognitif de fabriquer de la compréhension à partir d'une seule situation et d'une activité particulière liée à cette situation (une " auto-explication " par exemple - Cauzinille-Marmèche & Didierjean, op. cité). Les recherches en didactique des mathématiques ont effectivement pointé certains de ces problèmes qui pourraient avoir des " vertus " particulières du point de vue de la formation des connaissances.

On voit donc que poser la question qui nous occupe ici en termes " d'apprentissage de schémas " n'est peut-être pas le meilleur moyen d'avancer, tout au moins dans l'état actuel de nos savoirs. Pourquoi alors ne pas tenter d'aborder les choses à partir d'un autre point de vue ?

Une hypothèse

Une partie de l'activité mentale mise en œuvre dans une situation de résolution de problème consiste en une activité de représentation du problème posé. Cette activité de représentation débute avec les premières informations concernant le problème (dont certaines sont antérieures à l'énoncé lui-même : le contexte scolaire ou le genre d'ouvrage dans lequel il est proposé par exemple) et se poursuit jusqu'au moment où on cesse de " penser " au problème, c'est-à-dire celui où les informations concernant le problème disparaissent de notre mémoire de travail. Cette activité de représentation repose sur un ensemble complexe de processus et, en premier lieu, sur ce double mouvement caractéristique de toute activité mentale : des informations vers les connaissances et des connaissances vers les informations (les informations activent certaines connaissances qui orientent simultanément la prise en compte et l'interprétation de ces mêmes informations).
Plusieurs sortes de connaissances peuvent intervenir, à un moment ou un autre, dans la construction de cette représentation du problème (qui se poursuit tant que l'on continue à traiter les informations le concernant). Intuitivement, on pense d'abord à celles qui permettent de modéliser le problème et, tout spécialement, à celles qui permettent de le " traduire " éventuellement sous une forme graphique (dessin, diagramme, tableau, ...). En fait, il est probable que cette sorte de connaissances n'a pas de fonction particulière dans la mise en place de la représentation mentale du problème (en revanche ce rôle devient souvent déterminant pour rendre opérationnelle la représentation). D'après l'hypothèse privilégiée ici, les connaissances qui interviendraient de manière décisive dans l'activité de représentation sont les schémas de problèmes. Ces connaissances correspondent, rappelons-le, à différentes formes d'organisation en mémoire sémantique des problèmes rencontrés antérieurement. Or, on peut pousser plus avant cette hypothèse et supposer, en outre, que c'est au sein même de l'activité de représentation que se formeraient les schémas de problèmes. Ce qui revient à dire que non seulement notre représentation du problème en jeu dépendrait, pour une part substantielle, des schémas de problèmes disponibles et instanciés mais, qu'en retour, la représentation particulière construite pour ce problème contribuerait de manière déterminante à la formation de nos schémas et à leur évolution (cette évolution concerne les schémas directement impliqués dans l'activité présente mais aussi tous les autres en provoquant inévitablement, à plus ou moins long terme, des réorganisations d'ensemble).

L’idée importante dans cette manière de voir est de situer la source et le moteur de la formation des schémas au sein de l’activité de représentation et non sous la dépendance d’une éventuelle activité de catégorisation disjointe de celle-ci. Les deux hypothèses ne sont pas vraiment exclusives sur le plan théorique mais elles conduisent à concevoir différemment ce que pourrait être un apprentissage à la résolution de problèmes. Si c’est dans l’activité de représentation, et donc au cœur même de l’activité de résolution de problème, que se joue l’essentiel de la formation des schémas, les pratiques qui consistent à “ apprendre des schémas ” en misant sur l’explicitation des classes de problèmes, leur différenciation au moyen d’un code symbolique et un entraînement à la catégorisation paraissent peu adaptées. En effet, ces pratiques ne visent pas l’activité de représentation en elle-même mais plutôt une sorte d’activité “ méta ” supposée donner la capacité de se doter rationnellement des bons schémas. Il est probable qu’à un certain niveau de maîtrise d’un champ conceptuel donné, de telles pratiques puissent avoir un effet bénéfique (comme c’est le cas d’ailleurs pour les apprentissages de règles heuristiques à la manière de Polya) mais dans l’immédiat, et en attendant de savoir repérer un tel niveau, nous considérons comme plus urgent et plus prudent de nous centrer sur des pratiques qui visent directement l’activité de représentation.

L’AIDE A LA REPRESENTATION DES PROBLEMES

D’après l’hypothèse précédente, ce sont donc les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s’organisent progressivement en schémas de problèmes. D’où l’idée d’intervenir au moment où s’élabore cette représentation sous la forme d’une aide à la résolution du problème en jeu. Avant de décrire quelques aspects de cette manière de faire, il nous faut apporter certaines précisions concernant l’effet attendu d’une telle aide à la représentation.

Deux objectifs distincts

- Permettre l’invention d’une procédure

L’objectif premier d’une démarche d’aide à la représentation est de permettre une authentique résolution du problème, c’est-à-dire la réussite dans la tâche proposée par invention d’une procédure de résolution. Cette idée “ d’invention ” (on pourrait dire aussi élaboration ou construction) est un peu floue mais résume assez bien les deux critères principaux d’une véritable activité de résolution de problème : d’abord on ne peut pas réaliser le but proposé au moyen d’une application plus ou moins routinière de ses connaissances procédurales, ensuite on trouve soi-même, sans guidage, un moyen de réaliser ce but. On connaît depuis longtemps les bénéfices spectaculaires, en termes d’apprentissage et de compréhension, qui résultent d’une telle démarche d’invention de procédure (sans que l’on ait d’ailleurs de théorie explicative : on ne sait toujours pas en quoi consiste exactement un “ apprentissage par la résolution de problème ”, on constate

seulement sa réalité et ses avantages). Ces bénéfices se situent d'abord sur le plan opératoire : ce sont tous les acquis résultant de l'action, amplifiés par l'existence d'un " détour " à effectuer et donc la nécessité de coordonner, de planifier et de contrôler tout un ensemble d'actions (matérielles et mentales) qui n'avaient jamais été reliées entre elles. Ces bénéfices se situent ensuite au niveau des schémas de problèmes : il est probable que ce sont les problèmes réussis, au sens précédent de résolution par invention de procédure, qui laissent les empreintes les plus profondes et qui contribuent le plus à la mise en place de schémas performants**.**
Cela reste à vérifier, mais il nous semble peu plausible qu'un échec dans la résolution, même si le problème est ensuite corrigé et expliqué, puisse contribuer de manière positive à la formation des schémas (n'aurait-il pas même souvent des effets négatifs ?). Enfin, troisième sorte de bénéfices, les plus importants, ceux qui concernent l'appropriation de savoirs et la conceptualisation ; ils sont liés, bien sûr, à une condition supplémentaire sur le problème : il faut que celui-ci constitue, en tant que tel, un véritable enjeu de savoir pour celui qui cherche à le résoudre (et c'est de loin la condition la plus difficile à réaliser comme le montrent de nombreux travaux en didactique des mathématiques).

- Induire une évolution des schémas

Aider à la représentation du problème a donc pour objectif prioritaire de favoriser autant que possible l'émergence d'une telle démarche d'invention de procédure et la réussite dans la résolution du problème**.** Lorsque l'on gagne sur ce point, on a contribué de manière déterminante à la formation des schémas de problèmes et même, plus largement, à l'ensemble du processus de conceptualisation, pour peu qu'il s'agisse d'un " bon " problème. Toutefois, cette forme d'aide qui consiste à cibler la représentation du problème a aussi un second objectif. Lorsque l'aide apportée n'est pas suffisante et ne permet pas la résolution du problème, elle pourrait cependant avoir un impact sur la formation des schémas. La pratique qui consiste à expliquer le problème à un élève qui n'a pas su le résoudre correspond à cette intuition que s'il parvient au moins à le " comprendre ", cela devrait lui servir par la suite. Mais, dans ce cas, on donne souvent une telle explication après qu'il y ait eu échec et l'on a tendance, spontanément, à mettre en avant les aspects procéduraux de la résolution : on explique comment il fallait " faire " pour trouver la solution plutôt que comment il fallait " penser " le problème. Or la représentation que l'élève a du problème ne lui permet généralement pas d'intégrer ces éléments d'explication (ceci est particulièrement vrai pour les élèves qui échouent souvent). Aider l'élève à progresser dans sa représentation du problème, au cours de la démarche de résolution, n'a pas ces inconvénients et contribue sans doute plus efficacement à laisser une trace "utile", c'est-à-dire à enrichir ses schémas de problèmes, même si c'est de manière relativement limitée (par rapport au cas privilégié d'un problème réussi). Une idée intéressante de ce point de vue est celle de micro genèse de la représentation : on peut identifier, pour un problème donné (ou une classe de problèmes proches), les étapes successives qui caractérisent la manière dont la représentation va progresser pour ce problème particulier (Cauzinille-Marmèche & Julo, 1998). Il devrait donc être possible d'influer sur cette micro genèse par des aides en visant même, au-delà de l'objectif prioritaire de permettre à l'élève d'inventer une procédure de résolution, d'autres objectifs : par exemple la mise en œuvre de certains outils de modélisation intéressants sur le plan de l'apprentissage des mathématiques (Julo, 2000).

Quelques éléments d'ingénierie

La conception et la mise en œuvre des aides à la représentation ne sont pas des tâches aisées. Il n'existe pas, pour l'instant, de “ méthode ” pouvant servir de fondement à cette pratique. Il n'existe pas, non plus, suffisamment de résultats empiriques pour voir se dessiner des faits significatifs concernant les types d'aides les plus performants du point de vue des objectifs précédents. Nous nous contenterons donc de donner quelques éléments d'analyse et quelques exemples permettant d'illustrer ce que pourrait être une ingénierie des aides à la représentation du problème.

■ Des critères

On peut d'abord essayer de caractériser ces aides. En théorie, elles doivent répondre aux trois critères suivants :

- l'aide ne contient pas d'indices sur la solution,
- l'aide n'oriente pas vers une procédure de résolution,
- l'aide ne suggère pas une modélisation du problème.

Ces critères sont sévères et excluent la plupart des modes d'intervention auxquels on pense spontanément lorsqu'on veut aider un élève qui ne parvient pas à résoudre un problème. Si on lui dit de penser à telle notion qui pourrait lui servir, si on lui suggère une première étape de la résolution, si même on lui conseille de faire un dessin, on fait plus qu'intervenir sur la seule représentation du problème. Dans la pratique, on est donc conduit, assez souvent, à transgresser ces critères, au moins pour deux raisons : d'abord de véritables aides à la représentation ne sont pas aisées à concevoir, nous l'avons dit, mais, de plus, les élèves ne sont pas prêts à les recevoir comme telles, le contrat propre à une intervention annoncée comme “ aide ” contenant l'idée d'une efficacité relativement immédiate sur le plan opératoire. L'idée est donc surtout d'avoir un cadre de référence pour s'assurer que l'on n'a pas “ trop aidé ” sur le plan procédural, c'est-à-dire “ tué ” le problème (en fait, une observation directe, en situation, de l'effet des aides permet très vite de constater si on est allé trop loin ou pas assez).

■ Des modalités

Pour concevoir des aides à la représentation, il peut être utile de s'appuyer sur une classification qui opérationnalise les critères précédents en définissant des niveaux de risque liés à certaines modalités (Julo, 2001). Nous illustrerons par un exemple le genre de décision qu'une telle classification peut aider à prendre.
Prenons le problème intitulé *LES CREPES* (annexe 1). Des résultats expérimentaux montrent que beaucoup d'élèves de 6ème et de 5ème ne parviennent pas à le résoudre mais qu'une aide relativement efficace pour ces élèves est apportée par la modalité de multiprésentation. Cette modalité consiste à présenter l'énoncé de ce problème conjointement avec deux autres énoncés strictement isomorphes (même structure, mêmes valeurs numériques et mêmes solutions - cf annexe 2 *L'EAU SUCREE* et *LA FUSEE*). Sans préciser aux élèves cette particularité des énoncés, on leur demande alors soit de choisir le

problème qu'ils souhaitent résoudre, soit de résoudre les trois (on peut aussi présenter successivement les trois énoncés comme cela a été fait dans d'autres expériences). Cette modalité de multiprésentation a un intérêt du point de vue des travaux sur la résolution de problèmes par analogie menés en psychologie cognitive, mais elle est aussi particulièrement intéressante du point de vue de la question de l'aide à la représentation car elle satisfait parfaitement aux trois critères énoncés précédemment. Un tel recours à des problèmes analogues (non résolus préalablement et non accompagnés d'une procédure de résolution, contrairement au mode expérimental utilisé habituellement en psychologie) offre de nombreuses possibilités d'ingénierie et constitue l'une des formes d'aide à la représentation qu'il faudrait apprendre à mettre en œuvre.
Beaucoup d'élèves ne résolvent pas le problème proposé en dépit de cette première aide (pour des précisions sur les résultats expérimentaux, voir : Julo, 1995 ; Julo & Cauzinille-Marmèche, 1996) et l'on peut souhaiter aller plus loin. On peut, par exemple, leur demander de comparer les trois énoncés qu'ils ont à leur disposition en mettant par écrit les ressemblances et les différences qu'ils voient entre ces problèmes. Cette consigne relève d'une autre catégorie d'aides que l'on peut caractériser en parlant de *tâches surajoutées* (par rapport à la tâche principale qui est la résolution du problème). La tâche surajoutée est directement liée, dans le cas présent, à une autre modalité (la multiprésentation) mais elle peut aussi constituer une aide à part entière. Une grande quantité de telles tâches peut être imaginé mais si on ne retient que celles qui satisfont strictement aux trois critères précédents, on constate que leur nombre diminue rapidement, tant est forte notre habitude d'orienter vers une procédure ou, tout au moins, vers une modélisation particulière.
Dans certains cas, cependant, on pourra décider d'aller plus loin dans l'aide, en renonçant justement à ce troisième critère, celui qui concerne la modélisation. Pour le problème précédent des crêpes, par exemple, nous avons expérimenté dans une recherche l'aide qui consiste à suggérer de " faire un tableau ". Il s'agit bien toujours d'une tâche surajoutée, mais l'évocation de cet outil de modélisation que constitue le tableau dans le cas présent conduit à la différencier de la tâche précédente de comparaison d'énoncés isomorphes. On voit bien qu'avec ce nouveau type d'aide, le risque de nuire au développement d'une véritable activité de résolution de problème augmente très sensiblement. Et il augmentera encore si, au lieu de seulement suggérer la réalisation d'un tableau, on apporte la modélisation toute prête, sous la forme d'un tableau de proportionnalité déjà rempli. On a encore, dans ce cas, une autre forme d'aide qui demande à être différenciée des précédentes.

Cet exemple montre donc la contrainte forte que constituent les critères retenus pour caractériser une aide à la représentation du problème et, au-delà, l'objectif essentiel de préserver autant que possible ce phénomène extraordinairement riche sur le plan cognitif qu'est la réussite par invention d'une procédure de résolution. Pourtant il faut aussi éviter l'échec qui n'apporte rien de bon et il faut essayer de faire progresser la représentation, au moins un peu. Il arrivera donc, qu'après avoir apporté des aides *soft*, on prenne un peu plus de risques en aidant à modéliser le problème, par exemple, mais on s'efforcera alors de suggérer plusieurs mathématisations possibles, continuant ainsi à stimuler l'activité de représentation et à laisser une part d'initiative (sinon d'invention) aussi grande que possible dans le choix d'une procédure de résolution. Nous soulignerons un dernier fait concernant l'ingénierie des aides à la représentation : le cumul, pour un problème donné, de nombreuses aides, très différentes dans leur nature et dans leur logique, ne nuit pas à l'activité de représentation et paraît même, le plus souvent, lui être très profitable. C'est donc, vraisemblablement, une toute autre manière de concevoir les pratiques de tutorat et d’étayage qui est à rechercher (en utilisant notamment les possibilités qu’offrent les environnements informatisés en matière d’accès rapide à une grande quantité d’aides très diverses).

CONCLUSION

Nous pouvons résumer la position défendue ici de la manière suivante. Nous faisons l'hypothèse de processus spécifiques à la base de l'activité de résolution de problèmes. Nous faisons aussi l'hypothèse de connaissances spécifiques, certaines de nature opératoire, d'autres impliquées dans la mise en place de la représentation du problème : les schémas de problèmes. Ces derniers auraient un rôle essentiel dans la manière d'appréhender le problème et seraient au cœur du processus qui conduit certains à échouer systématiquement lorsqu'ils sont face à un problème. La question se pose alors de savoir comment on pourrait améliorer la " qualité " de ces schémas, en particulier pour les élèves déjà entraînés dans le cycle infernal de l'échec. Une approche volontariste consiste à miser sur des apprentissages spécifiques, basés en particulier sur un entraînement à la catégorisation et sur l'explicitation des différences structurales entre des problèmes qui se ressemblent (par exemple au moyen de diagrammes comme dans le cas des problèmes additifs). Nous avons présenté les arguments qui nous conduisent à douter de l'efficacité d'une telle approche et nous en avons présenté une autre, fondée sur l'idée d'aide à la représentation du problème.

En fait, les deux approches ne sont pas vraiment exclusives. Pour certains élèves, à un moment donné, il vaut certainement mieux tenter un entraînement systématique, avec tous les risques inhérents, plutôt que de baisser les bras. De plus, lorsqu'on commence à bien connaître un champ conceptuel et les différentes classes de problèmes qui le composent, il est impératif, effectivement, d'en tenir compte dans l'enseignement. Toutefois, outre le fait que ce cas est encore relativement rare, il existe d'autres manières de stimuler l'activité de catégorisation que celle reposant sur l'explicitation de la structure des problèmes. Le simple fait de veiller à ce que toutes les classes soient représentées dans l'ensemble des problèmes que rencontre l'élève est déjà une première étape. L'environnement peut aussi être organisé de telle manière que l'élève soit amené à comparer des problèmes appartenant soit à la même classe soit à des classes différentes ; c'est ce que permet par exemple une base de problèmes de proportionnalité mise au point à l'IREM de Rennes : l'élève a le choix entre plusieurs problèmes qui constituent un sous-ensemble de la base défini au moyen de certaines règles tutorielles (voir le CD-ROM *La proportionnalité à travers des problèmes* diffusés par le CNED).

Pour répondre à la question posée en tête de cet article, nous serions donc tenté de répondre par la négative si l'on entend par apprentissages spécifiques des séquences didactiques dédiées à des méthodes de résolution de problèmes (que ces méthodes soient générales comme les heuristiques de Polya ou plus spécifiques comme les diagrammes utilisés pour les problèmes additifs). En revanche, l'idée d'environnements spécifiques, conçus à la fois comme ensembles de problèmes auxquels l'élève sera confronté sur une période donnée et comme ensembles d'aides permettant, par le biais d'une meilleure représentation, la résolution d'un problème donné, nous semble assez prometteuse.

BIBLIOGRAPHIE

Arsac G., Germain G. et Mante M. (1988), Problème ouvert et situation-problème, Irem de Lyon.

Brissiaud R. (1984), La lecture des énoncés de problèmes, in : *Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques*, Paris, INRP.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 33-115.

Brun J. (1999), La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives, *Math-Ecole*, 141, 2-15.

Cauzinille-Marmèche E. et Didierjean A. (1999), Résolution de problèmes par analogie et généralisation des connaissances, *in :* Netchine-Grynberg G. (Ed), *Développement et fonctionnement cognitif - Vers une intégration*, Paris : Puf.

Cauzinille-Marmèche E. & Julo J. (1998), Studies of micro-genetic learning brought about by the comparison and solving of isomorphic arithmetic problems, *Learning and Instruction*, *8, 3,* 253-269.

Fayol M. et Monteil J.M. (1994), Stratégies d'apprentissage-apprentissage de stratégies, *Revue Française de Pédagogie*, 106, 91-110.

Fischer J.P. (1993), La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement proactif, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 177-210.

Getz I. (1996), *L'expertise cognitive aux échecs*, Paris, Puf.

Gineste M.D. (1997), *Analogie et cognition - Etude expérimentale et simulation informatique*, Paris, Puf.

Higgins K.M. (1997), The effect of year-long instruction in mathematical problem solving on middle-school students' attitudes, beliefs, and abilities, *The Journal of Experimental Education*, *66*, 1, 5-28. Houdement C. (1998), Le choix des problèmes pour la " résolution de problèmes ", *Grand N*, 63, 59-76.

Julo, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (2000), Aide à la représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Actes du Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques 1999-2000*, Rennes : Université de Rennes 1.

Julo, J. (2001), Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? *Actes du XXVIIe Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, Grenoble : Université Joseph Fourier.

Julo, J. & Cauzinille-Marmèche, E. (1996), L'effet de multiprésentation : mise en évidence dans la résolution d'un problème de proportionnalité, *Revue de Psychologie de l'Education*, *1*, 49-77.

Kilpatrick J. (1969), Problem solving in mathematics, *Review of Educational Research*, *39*, 4, 523-534.

Levain J.P. (2000), Apprentissage de schémas et résolution de problèmes, *L'Orientation Scolaire et Professionnelle*, *29*, 3, 411-430.

Lewis A.B. (1989), Training students to represent arithmetic word problems, *Journal of Educational Psychology*, *81*, 4, 521-531.

Lamour J. et Coulet J.C. (1998), Niveau de compétence et compréhension des problèmes additifs chez des élèves de CM2, *Revue de Psychologie de l'Education*, 1, 205-237.

Pluvinage F. (1992), Didactique de la résolution de problèmes, *Petit x*, 32, 5-24.

Richard J.F. (1984) ed, Résoudre des problèmes au laboratoire, à l'école, au travail, *Psychologie Française, 29*, 3/4, 226-283.
Robert A. et Robinet J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*, 2, 145-176.
Sarrazy B. (1997), Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*, 2, 135-166.
Schoenfeld A.H. (1985), *Mathematical problem solving*, New York : Academic Press.
Schoenfeld A.H. et Herrmann D.J. (1982), Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers, *Journal of Experimental Psychlology : Learning, Memory, and Cognition, 8*, 5, 484-494.
Turquin P. (1970), Apprentissage et résolution de problème, *L'Année Psychologique*, 2, 543-577.
Vergnaud G. et Durand C. (1976), Structures additives et complexité psycho-génétique, *Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.
Vergnaud G. et al (1997), *Le Moniteur de Mathématiques* - *Résolution de problèmes* - *Fichier pédagogique*, Paris, Nathan.
Willis G.B. et Fuson K.C. (1988), Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems, *Journal of Educational Psychology*, 80, 192-201.

Annexe 1

LES CREPES

Pour la Chandeleur, quelques élèves d'une classe décident de préparer des crêpes. Ils trouvent la recette suivante dans un livre de cuisine :

"Pour quatre personnes, préparez une pâte avec :

6 oeufs,
10 cuillerées à soupe de farine,
8 verres de lait,
20 g de beurre,
16 g de sucre ordinaire,
6 cuillerées à café de sucre vanillé"

Mais comme ils sont nombreux, ils décident d'augmenter les quantités qui sont indiquées dans la recette. Ils préparent une pâte avec :

15 oeufs,
25 cuillerées à soupe de farine,
20 verres de lait,
50 g de beurre,
35 g de sucre ordinaire,
15 cuillerées à café de sucre vanillé.

Les crêpes risquent donc de ne pas être très bonnes car les élèves ont fait une petite erreur ; ils n'ont pas respecté exactement la recette.

POUR QUEL PRODUIT LES ELEVES SE SONT-IL TROMPES

QUELLE QUANTITE DE CE PRODUIT AURAIENT-ILS DÛ METTRE POUR RESPECTER LA RECETTE DU LIVRE DE CUISINE ?

Annexe 2

L'EAU SUCREE

Pour faire une expérience de chimie, le professeur demande à des élèves de préparer de l'eau sucrée dans plusieurs récipients qui contiennent de l'eau.

JACQUES a un récipient qui contient	6 dl d'eau
PIERRE a un récipient qui contient	10 dl d'eau
DIDIER a un récipient qui contient	8 dl d'eau
ISABELLE a un récipient qui contient	20 dl d'eau
BENOIT a un récipient qui contient	16 dl d'eau
LAURENCE a un récipient qui contient	6 dl d'eau

Le professeur donne alors le sucre aux élèves et leur dit de s'arranger entre eux pour que l'eau <u>soit aussi sucrée</u> dans tous les récipients.

JACQUES met dans son récipient	15 g de sucre
PIERRE met dans son récipient	25 g de sucre
DIDIER met dans son récipient	20 g de sucre
ISABELLE met dans son récipient	50 g de sucre
BENOIT met dans son récipient	35 g de sucre
LAURENCE met dans son récipient	15 g de sucre

Mais l'expérience risque de ne pas marcher car un des élèves a fait une petite erreur : dans son récipient, l'eau n'est pas aussi sucrée que dans celui des autres élèves.

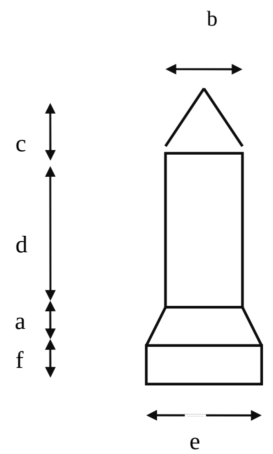
QUEL ELEVE S'EST TROMPE ?

QUELLE QUANTITE DE SUCRE AURAIT-IL DÛ METTRE ?

Annexe 2

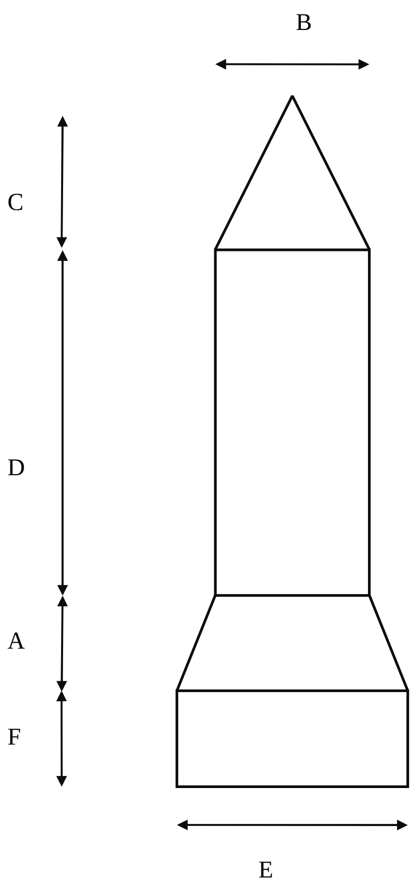
LA FUSEE

Le professeur de dessin a demandé aux élèves de reproduire en plus grand le dessin suivant :



a : 6 mm
b : 10 mm
c : 8 mm
d : 20 mm
e : 16 mm
f : 6 mm

Les élèves devaient donc dessiner exactement la même fusée mais en plus grand.
Aussi, Patrick risque de ne pas avoir une très bonne note car il a fait une erreur : la fusée qu'il a dessinée n'est pas exactement la même que le modèle en plus grand. Voici son dessin :



A : 15 mm
B : 25 mm
C : 20 mm
D : 50 mm
E : 35 mm
F : 15 mm

POUR QUELLE LONGUEUR PATRICK S'EST-IL TROMPE ?
(tu indiques la lettre qui la désigne sur le dessin)

QUELLE AURAIT DÛ ETRE CETTE LONGUEUR ?