ACTIVITE ...

JEUX ET RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES

de l'équipe
maths à modeler

INDICATIONS DE SOLUTION POUR LES DEUX PROBLÈMES DE BALADE DE LA FICHE N° 2 (PETIT X N°63)

Une balade sur les ponts de Kœnigsberg

On trouve ce problème dans de nombreux manuels scolaires, dans des rubriques « casse-tête » ou « pour s'amuser » etc.

Des essais avec crayon permettent de faire la conjecture que « il n'y a pas de solution ». Pour prouver cette conjecture, le choix d'une représentation adaptée du problème ,

Un premier travail - de modélisation - consiste à remplacer « berges, île, rivières, confluents, ponts, ... » par un ensemble de régions, ici quatre, reliées par des ponts. Le modèle adapté à cette nouvelle situation est le graphe obtenu en faisant correspondre un sommet à chaque «région» (domaine que l'on peut parcourir sans franchir de rivière) et en faisant correspondre à tout pont reliant deux régions, une arête reliant les deux sommets correspondants.

Bien que ce modèle semble assez naturel puisqu'en particulier des élèves proposent des représentations assez proches, il n'est pas sans présenter quelques difficultés : ainsi, la réduction de « régions » de natures différentes (une île, ce n'est pas a priori la même chose qu'une berge) à un seul type de sommets , mais aussi la bijection entre une promenade sur le terrain et un parcours sur le graphe, ne vont pas forcément de soi.

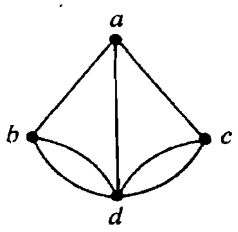
Une « promenade passant par tous les ponts une fois et une seule » correspond, sur le graphe, à un chemin contenant une fois et une seule chacune des arêtes.

Le travail sur le modèle va permettre de découvrir la raison qui garantit l'existence ou non d'un parcours passant une fois et une seule par tous les ponts. En effet, si un sommet admet un nombre pair d'arêtes, à chaque fois qu'on arrive sur ce sommet, on est sûr de pouvoir en repartir. Alors qu'un sommet de degré impair est un sommet duquel, au bout d'un moment, on ne peut plus repartir, sauf si c'était le sommet de départ.

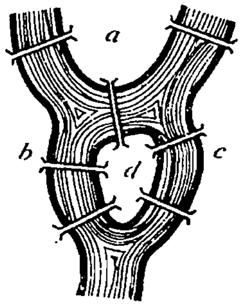
La réponse à la question de départ dépend donc de la parité du nombre d'arêtes passant par chaque sommet. Si une telle balade existe, les sommets du graphe de degré impair sont donc nécessairement soit le départ de la balade, soit l'arrivée.

On ne peut donc en avoir plus de 2. (Nous vous proposons une petite question : peut-on n'en avoir qu'un ?)

Ici, le graphe admet trois sommets de degré impair, une telle balade n'existe pas.



G



On peut alors se poser la question : où pourrait-on rajouter un pont pour qu'une telle balade soit possible ? La réponse est donnée en rajoutant une arête entre deux sommets de degré impair : d'après ce que nous venons de dire, il est facile de se convaincre que cette condition est nécessaire. On peut prouver qu'elle est également suffisante, nous ne le ferons pas ici.

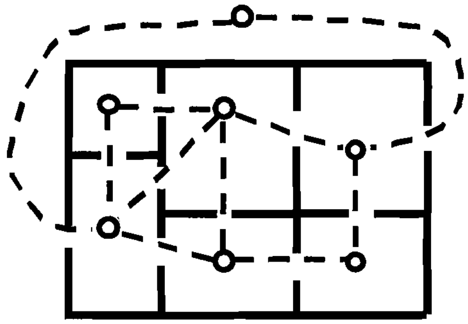
Dans notre problème, on peut donc choisir de rajouter un pont soit de l'île vers n'importe quelle berge a, b ou c, soit entre les deux berges a et b, soit entre les deux berges a et c. On peut aussi « fermer » un pont sur l'île, on pourra alors trouver une balade passant une fois et une seule par tous les ponts ouverts.

Et pour qu'il soit possible de faire un circuit (c'est-à-dire partir de chez soi et revenir chez soi) en passant une fois et une seule par chaque pont, il faut et il suffit que tous les sommets du graphe soient de degré pair. Nous vous laissons étudier les possibilités pour cela, et aussi la preuve de cette condition nécessaire et suffisante.

Une balade à l'intérieur d'une grande maison

Rappel de l'énoncé : *« Le dessin ci-dessous représente six pièces du rez-de-chaussée d'une maison. Là où les traits sont effacés, ce sont les portes de chaque pièce. Il y a aussi deux portes qui permettent d'aller dans le jardin.*

Pouvez-vous vous promener dans la maison en passant une fois et une seule par chaque porte, y compris les deux portes qui donnent sur le jardin ? »



Ce problème est très semblable au précédent, sauf qu'ici, il y a une solution que l'on ne trouve pas nécessairement par des essais. Même si on n'a pas trouvé de solution (parce l'exhaustivité des cas est plus difficile ici), une modélisation par un graphe permet d'en faire la preuve, elle utilise les mêmes propriétés sur la parité des sommets que dans le problème de ponts de Koenigsberg.

Dans ce graphe, un sommet correspond à une pièce de la maison ou au jardin (il y a donc 7 sommets) et une arête entre deux sommets représente un porte entre deux pièces (il y a donc en tout 10 arêtes). Tous les sommets de ce graphe sont de degré pairs sauf deux d'entre eux. Il existe donc une balade passant par toutes les portes une fois et une seule à condition de commencer dans une des deux pièces ayant un nombre impair de portes et de s'arrêter dans l'autre.

Si, maintenant, on suppose que les deux portes qui donnent sur le jardin sont fermées, le nouveau graphe contient un sommet « isolé », celui qui représente le jardin. Ce graphe a lui aussi deux sommets de degré impair, ce ne sont pas les mêmes que dans la version précédente. Il existe donc encore une balade mais elle part et s'arrête dans d'autres pièces.

Il faut toutefois remarquer que la preuve de l'impossibilité d'un parcours dans une « maison » peut être faite sans passer au modèle graphe. Pour certains elle est même plus aisée en raisonnant sur la maison (*on entre et on sort d'une pièce*). Mais si l'on peut associer un graphe à une maison, l'inverse n'est pas toujours possible (dans le cas d'un graphe non planaire, c'est-à-dire un graphe que l'on ne peut pas dessiner sur un plan sans que les arêtes se croisent)