VALIDATION DANS L'ENVIRONNEMENT PAPIER CRAYON

Mohamed DIB
IFM, Ecole Sophie Condorcet, Valence

Introduction

Comment faire des mathématiques à l'école ? Dans son ouvrage[1] Roland Charnay éclaire le débat et centre son propos sur les fondements, les enjeux et les méthodes liés à cette discipline et à son enseignement. C'est parce que dans leur fonctionnement historique, comme dans leur fonctionnement actuel, « les objets et les méthodes mathématiques ont été élaborés pour résoudre des problèmes pratiques ou théoriques[2] » que cet auteur suggère de nouvelles méthodes pédagogiques qui placent la résolution de problèmes au centre de la construction des connaissances de l'élève.
A ce propos les instructions officielles sont elles aussi claires et indiquent que donner du sens à l'enseignement des mathématiques, c'est inscrire cette activité dans une dynamique où l'enfant est producteur de son savoir. « La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'appropriation par l'élève des connaissances mathématiques.[3] »
C'est dans cette perspective que s'inscrit ce texte. Une perspective qui institue le savoir mathématique et sa légitimité dans le champ des problèmes qu'il permet de résoudre, qui pose comme postulat que c'est en agissant qu'un élève construit et s'approprie les concepts. En effet, on peut dire qu'un élève ne possède une connaissance mathématique que lorsqu'il est « capable de la mobiliser pour résoudre des problèmes nouveaux, inédits, en dehors du contexte scolaire où elle a été enseignée.[4] »
Faire des mathématiques, c'est donc résoudre des problèmes. Résoudre un problème, c'est s'engager dans des procédures de résolution mais c'est aussi avoir un moyen de contrôler la pertinence des procédures de résolution engagées. Une des fonctions des mathématiques est de permettre l'anticipation des résultats d'une action. « Le mot anticipation recouvre un double mouvement : la prédiction et la garantie de validité de la prédiction.[5]. »

---

[1] Roland Charnay : Pourquoi des mathématiques à l'école ? ESF éditeur, 1996.

[2] Roland Charnay : Opus cité.

[3] Programmes de l'école primaire : CNDP, 1995, p.48.

[4] Roland Charnay : Opus cité.

[5] Claire Margolinas : De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, La pensée sauvage, 1993

Il est donc nécessaire qu'à un moment un débat sur le vrai et le faux se mette en place. L'objet de ce débat est de permettre à l'élève de démontrer la validité de ce qu'il vient de trouver, de s'assurer que le résultat est cohérent par rapport au problème posé. L'organisation d'un débat suppose un préalable : il est impératif que l'enrôlement des élèves dans la tâche proposée soit effectif. C'est-à-dire que le problème ait été dévolu, que l'on soit passé d'un problème du maître à un problème pour l'élève. « La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne (consigne, règles, but, état final...), mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non de la culpabilité, du résultat qu'il doit rechercher. »[6].
Quand est-ce qu'un élève estime qu'il a rempli la part du contrat didactique qui le lie avec le maître ?
On peut affirmer, sans trop se tromper, que dès lors qu'il a une réponse, l'élève s'arrête de chercher. Sa réponse, parce qu'elle existe, devient la réponse au problème qui lui a été posé. Comment dépasser ce stade où l'élève instaure sa réponse comme la vérité. Comment faire pour que l'élève s'engage dans un processus de validation et décide lui-même de la validité de son travail ?
Une des pistes suivie par les chercheurs est l'organisation par le maître d'une phase de conclusion au cours de laquelle on va permettre une confrontation des stratégies et un débat sur les méthodes utilisées pour résoudre le problème. Pour Balacheff, « la mise en débat des décisions, l'injonction de garantir leur validité ou de la dénoncer, permet de transformer la situation de décision en une situation de validation.[7] »
Faire en sorte que la phase de conclusion soit une phase de validation suppose trois conditions :
- la première est l'affirmation que l'appropriation collective des connaissances peut favoriser les acquis individuels par le conflit socio-cognitif qu'elle impose ;
- la seconde est que la situation soit une situation a-didactique[8] dans laquelle l'intention d'enseignement n'est pas explicite au regard de l'élève ;
- la troisième est que le problème comporte un enjeu fort pour que l'élève puisse s'approprier la situation.
Une condition majeure pour l'émergence de preuve est que les élèves se sentent responsables du résultat dont ils ont la charge et s'engagent spontanément dans des processus de validation.
Balacheff indique que la preuve a deux aspects majeurs :
-« la nécessité de prouver est liée à la situation dans laquelle on se trouve ;
- la preuve est un acte social, elle s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) que l'on veut convaincre.[9] »
La phase de conclusion, si l'on veut qu'elle ne soit pas un débat stérile, doit permettre à l'élève de mesurer l'écart au but, d'apprécier le chemin parcouru entre le problème qui lui a été posé et le résultat qu'il a produit. Au préalable, le maître doit s'assurer que l'élève dispose de critères pour valider ou invalider ce qu'il a produit. Ce dispositif ne doit pas être extérieur

---

[6] Guy. Brousseau : Actes de l'université d'été d'Olivet, 1998, p. 89
[7] Balacheff , Processus de preuves et validation
[8] « Ce fonctionnement est appelé « a-didactique », puisqu'il envisage le fonctionnement normal des connaissances en dehors des conditions didactiques « celles où quelqu'un a décidé pour l'élève quel savoir il allait apprendre. » Guy Brousseau, R.D.M, p. 324
[9] Balachef R.D.M. Preuve et démonstration

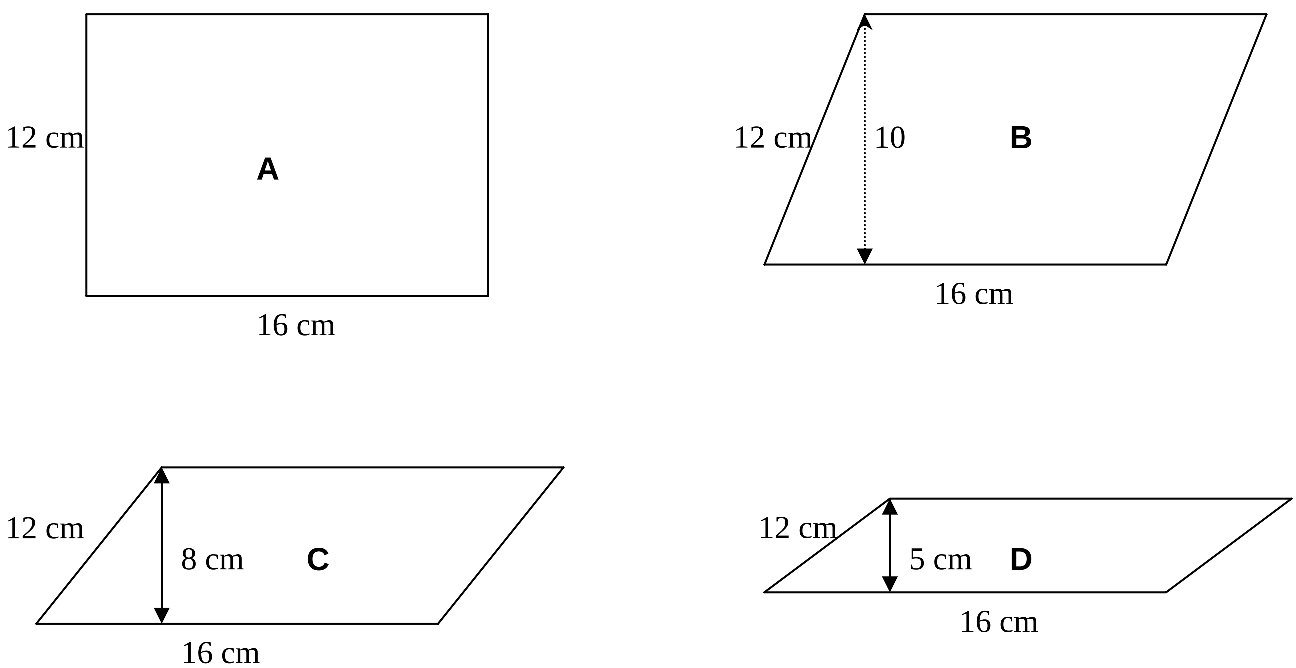
au problème posé, il doit en découler de sorte que le débat s'appuie sur des critères de validité clairs pour tous. C'est à cette condition que le maître sera déchargé du contrôle du vrai dans la classe.
Lors de la phase de conclusion, le débat collectif doit être ce moment au cours duquel doivent s'affronter le vrai et le faux dans des termes explicites et explicités pour tous. C'est la question du rapport au savoir qui se joue à ce moment-là de la résolution. Il n'est pas possible de faire de la résolution de problème si le maître doit en dernier lieu dire ce qui est juste ou faux. Dans les situations a-didactiques, la question de la validation doit être au cœur du processus d'apprentissage.
Les recherches actuelles tendent à montrer que si, dans le champ numérique, il existe des dispositifs didactiques, en dehors du maître, qui permettent à l'élève au cours de la résolution d'un problème de se poser la question du vrai et du faux, les choses semblent beaucoup plus complexes dans le champ de la mesure et plus particulièrement dans le champ géométrique.
L'objet de ce texte sera de montrer qu'il existe une spécificité des processus de validation en géométrie.
Nous allons donc tenter de mettre à jour dans quelques analyses de séances de géométrie les dispositifs didactiques susceptibles de permettre une validation par l'élève. Nous essaierons d'en dégager les spécificités quant à la question qui nous intéresse : comment et dans quelles mesures cette validation peut-elle s'effectuer ?
Nous présenterons, d'abord, une situation où le milieu matériel met à la disposition des élèves des outils de validation qui leur permettent de s'assurer sans ambiguïté de la validité des procédures proposées.
Dans l'exposé d'une seconde situation, nous verrons que les choix didactiques retenus conduisent les élèves, en l'absence de rétro-action du milieu, à exposer des preuves qui se réfèrent à des connaissances théoriques.
Enfin, nous analyserons une dernière séquence d'enseignement. Elle nous permettra de montrer les limites des phases de conclusions dans le milieu papier-crayon.

Problème spatial, connaissances spatiales[10] et validation perceptives

Dans les classes où la résolution de problèmes comme forme d'apprentissage des mathématiques est privilégiée, les phases collectives de conclusion questionnent souvent le maître. Bien souvent, lors de cette phase de communication au cours de laquelle les enfants sont censés débattre des propositions et les valider, rien ne se passe ou alors on ne débat pas réellement de ce qui est en jeu du point de vue des connaissances à construire. Ces moments sont fastidieux pour le maître et l'intérêt qu'ont pu porter les enfants lors de la résolution s'étiole peu à peu au cours de cette mise en commun.
Il est donc indispensable du point de vue du maître d'anticiper les phases de conclusion afin qu'elles soient véritablement des phases de validation et que cette validation porte sur les objets de savoir. Comment les élèves vont-ils pouvoir s'assurer de la pertinence de leurs propositions quant au problème posé ? L'élève a-t-il les moyens de décider lui-même de la

[10] Connaissances fondées sur des expériences perceptives.

validité de son travail ? Le maître au préalable doit se poser ces questions s'il veut que la possibilité de s'assurer du vrai soit rendue possible par la situation.
Un des moyens qui va permettre l'expression du vrai est que le maître organise le milieu[11] de telle manière que le recours au matériel soit un moyen pour accéder à la validité d'une proposition.
Dans un contexte de mesure[12], des élèves de CM2 doivent comparer les aires de quatre quadrilatères, obtenus à partir de la déformation d'un rectangle pour lesquels la simple superposition ne permet pas de trancher (cf. figure 1).
Dans un premier temps l'enseignant montre au tableau grâce à un « rectangle articulé » (barres de mécano) comment il obtient des parallélogrammes différents. Après chaque variation, le dessin du parallélogramme correspondant est affiché au tableau. Il est à noter que le « rectangle articulé » et les parallélogrammes affichés ont des dimensions de côtés identiques. Les dessins sont des représentations exactes de la déformation. Les dimensions des figures proposées sont les suivantes :
Feuille 1 : rectangle A de 16 cm par 12 cm
Feuille 2 : un parallélogramme, les côtés ont pour longueur : 16 cm par 12 cm, et une hauteur de 10 cm.
Feuille 3 : un parallélogramme, mêmes côtés que ci-dessus et une hauteur de 8 cm.
Feuille 4 : un parallélogramme, mêmes côtés que ci-dessus et une hauteur de 5 cm.



[11] Ce milieu peut-être matériel et/ou théorique. « Il doit pouvoir prendre la signification d'un milieu mathématiques. » R.D.M. , Brousseau, op. cit.
[12] ERMEL, Hatier, 1999, p. 398

Figure 1- Des parallélogrammes déformables

Les élèves travaillent par groupes de deux. On leur demande, d'abord, de procéder par anticipation. La consigne est la suivante : « *En observant les figures que vous avez au tableau, entre le rectangle du départ et les trois quadrilatères, quelle est la figure qui a la plus grande aire, quelle est la figure qui a la plus petite aire.* »
Après quelques minutes, les résultats des groupes sont notés au tableau par le maître qui ne fait aucun commentaire.
Pour la figure ayant la plus grande aire, onze groupes sur douze indiquent que le parallélogramme A a la plus grande aire.
Pour la figure ayant la plus petite aire ;
- neuf indiquent que le parallélogramme D a la plus petite aire.
- deux sont indécis : les parallélogrammes C et D sont, pour eux, les plus petits mais ils hésitent pour désigner lequel est le plus petit des deux. «*il faudrait qu'on les ait pour être vraiment sûrs* . » ;
- un groupe indique que tous les parallélogrammes ont une aire égale ; pour ces élèves « *ils sont tous pareils* ».
Un débat s'instaure dans la classe et les élèves s'opposent à celui qui pense que les aires sont égales en disant « *Tu le vois bien, elles ne sont pas pareilles*. ».
Lors de cette première phase, les outils de résolution et de validation sont purement perceptifs. Les élèves font appel à des connaissances spatiales. Le maître demande aux élèves d'anticiper un résultat pour pouvoir, éventuellement, le corroborer dans une deuxième phase avec des connaissances plus théoriques. D'ailleurs les élèves ne sont pas dupes et demandent au maître de disposer des parallélogrammes « *comme ça on sera sûrs.* ».
Au cours de la deuxième phase les élèves, qui travaillent par deux, doivent affirmer, c'est-à-dire trouver un moyen de s'assurer que ce qu'ils avançaient sans disposer des rectangles transformés est vrai. Des feuilles, sur lesquelles sont dessinés les quatre rectangles transformés, sont distribuées aux élèves. Les outils de validation qui sont à leur disposition sont : la règle graduée, le calque, les ciseaux, le compas, tout le matériel de géométrie ordinaire.
Au moment de la résolution, les élèves s'engagent dans des procédures de comparaison et s'assurent en continu de la validité du travail effectué. L'anticipation visuelle permet ce contrôle. Les procédures de résolution utilisées sont les suivantes :

Procédure 1 : Des groupes découpent la figure dans le papier original ; ils superposent les différents morceaux, puis ils découpent ce qui dépasse et enfin ils procèdent à un recollement. Ils prennent ainsi conscience que ce rectangle est inclus dans le rectangle de départ.

Procédure 2 : D'autres dessinent sur le papier calque, « rayent » le triangle, afin de mettre en évidence ce qui dépasse et découpent, puis scotchent pour avoir un rectangle. Ils s'assurent ainsi que le rectangle obtenu est inclus dans le rectangle de départ.

<u>Procédure 3</u> : Un groupe va par décomposition-recomposition, en utilisant des feutres de couleur, dessiner des rectangles à partir des parallélogrammes. Une fois ces rectangles obtenus il va mettre en œuvre la formule du calcul de l'aire du rectangle.
<u>Procédure 4</u> : Un groupe, va mesurer les côtés des quadrilatères et faire le produit, utilisant une formule du calcul de l'aire, valable seulement pour le rectangle.

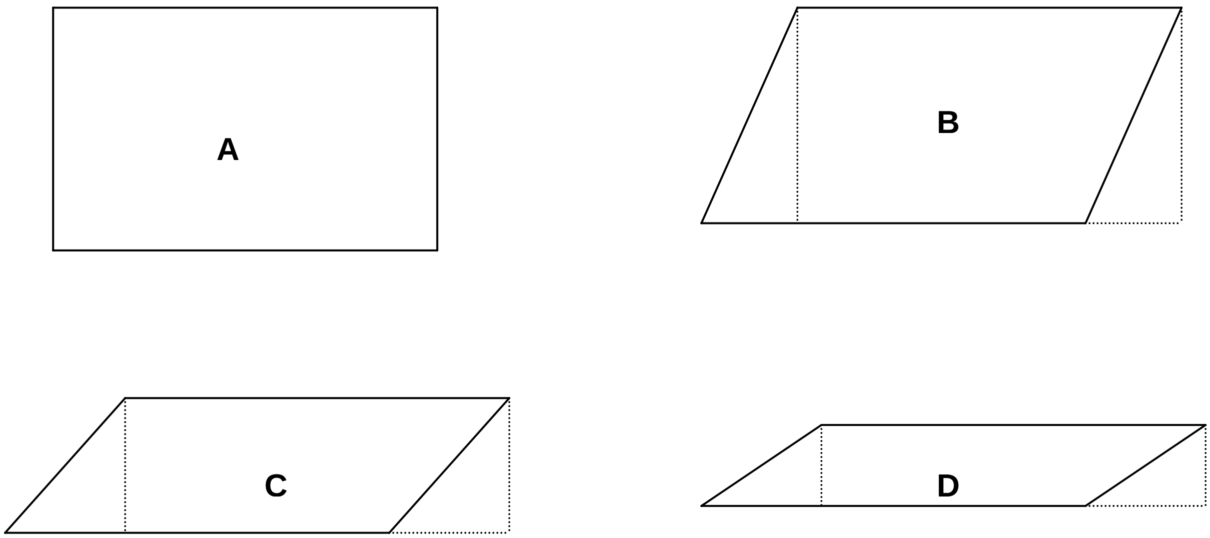


Figure 2- Rectangles obtenus avec les procédures 1, 2 et 3.

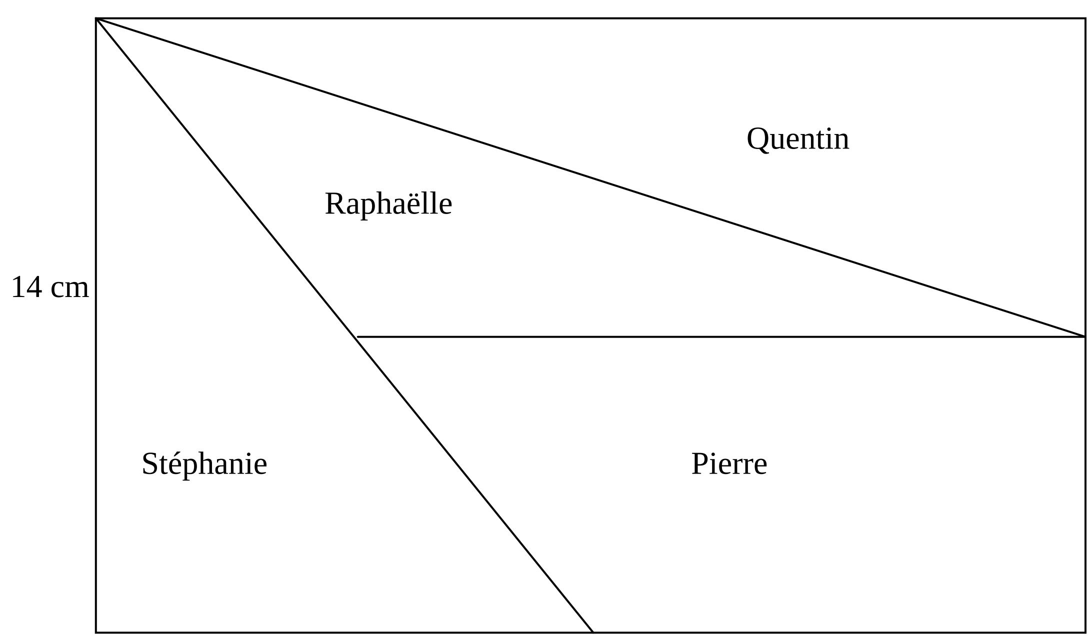
Analyse

Les élèves, lors de la mise en commun, rendent publics les moyens utilisés pour s'assurer de la pertinence du classement effectué. Les enfants refont en mettant en mots ce qu'ils ont fait. Le mode de raisonnement est l'explication mais le discours se fait en référence à une « monstration » qui se déroule au tableau. Le recours au matériel permet de rendre intelligible aux autres ce qui a été fait. « *On a décalqué les figures, puis on les a découpées et on a regardé si elles entraient les unes dans les autres*. ». Les procédures erronées « *On a mesuré les côtés, on a multiplié et on a trouvé qu'ils étaient tous pareils.* » sont invalidées par le découpage et la recomposition en un rectangle inclus dans le rectangle A.
Dans cette situation, la validation se fait par le recours au matériel sans que le maître n'ait à donner aux élèves un jugement sur les procédures utilisées : les élèves décident eux-mêmes de la validité de leur travail. La validation ne vient, dans ce cas que d'une interaction avec le milieu matériel.
Cette situation met en jeu des connaissances spatiales.

Or, la connaissance géométrique : « découper et recomposer une figure en une autre ne change pas l'aire » n'est à aucun moment explicitée.
Le recours au milieu matériel pour valider conduit donc les élèves à ne retenir et à ne mettre en exergue que ce qui n'est pas mathématiquement pertinent. On voit bien là certaines limites posées par la rétroaction avec le milieu matériel dans les processus de validation. Puisqu'on pose un problème spatial, les enfants mettent en œuvre des savoirs spatiaux. La mobilisation de savoirs géométriques lors de la phase collective n'est pas rendue nécessaire par le problème posé.

Problème spatial, connaissances spatiales et validation théorique

Le maître peut, dans un même contexte, organiser le milieu de telle manière que l'on passe d'une preuve par l'explication avec un recours au matériel à une preuve qui engage des arguments théoriques. Les choix didactiques faits peuvent conduire les élèves vers la preuve en tant qu'*« explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné.* [13]».
Le maître propose donc une situation où un partage est donné. Il s'agit pour les élèves, de prouver s'il est composé de parties égales ou non [14]. La consigne est la suivante : « *Madame Originale a fait un gâteau rectangulaire pour ses quatre enfants : Pierre, Quentin, Raphaëlle et Stéphanie. Elle a fait des parts. Est-ce que chacun mangera la même quantité de gâteau ?* »



[13] Joël Briand, Marie Claude Chevalier : Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques, Hatier, Paris 1995
[14] ERMEL, Hatier, 1999, p. 408

24 cm

Figure 3 – Le gâteau de madame Originale

Les valeurs des variables didactiques sont choisies pour rendre nécessaire le recours à des arguments théoriques. Le partage est composé de parts qui ne sont ni superposables, ni comparables par décomposition recomposition.
Deux ont même mesure et peuvent être rapportées au quart du rectangle de départ (Stéphanie et Quentin) ;
les deux autres n'ont pas la même mesure, et, pour les comparer, il est possible de recourir à la comparaison de chacune avec un quart du rectangle.
Les élèves, qui travaillent par deux, disposent du matériel usuel de géométrie duquel on a retiré le calque, la règle graduée et les ciseaux. Pour finir, la feuille est scotchée sur le bureau et la grande feuille dont les élèves disposent pour répondre est, elle aussi, scotchée sur un autre bureau. Ces choix didactiques vont empêcher la comparaison des parts par superposition, découpage ou pliage. Le recours aux procédures de décomposition-recomposition observées lors de la première partie de notre exposé étant matériellement impossible, les élèves vont avoir recours à des arguments théoriques.
Lors de la mise en commun, les élèves vont ainsi faire référence à des mesures fractionnaires de chaque partie résultant de savoirs acquis dans d'autres contextes sur les moitiés, les quarts et les huitièmes.
Chaque binôme va à tour de rôle au tableau, énonce sa conclusion et en présente la justification. Les élèves ont tracé à main levée le rectangle sur la grande feuille et s'appuie sur cette représentation pour clarifier leur propos. Le dessin sur la grande feuille sert à rendre intelligible les transformations réalisées. On a, là encore, des décompositions-recompositions de figures mais, cette fois, ces actions ne peuvent plus être matérialisées parce que le rectangle original n'est pas disponible.

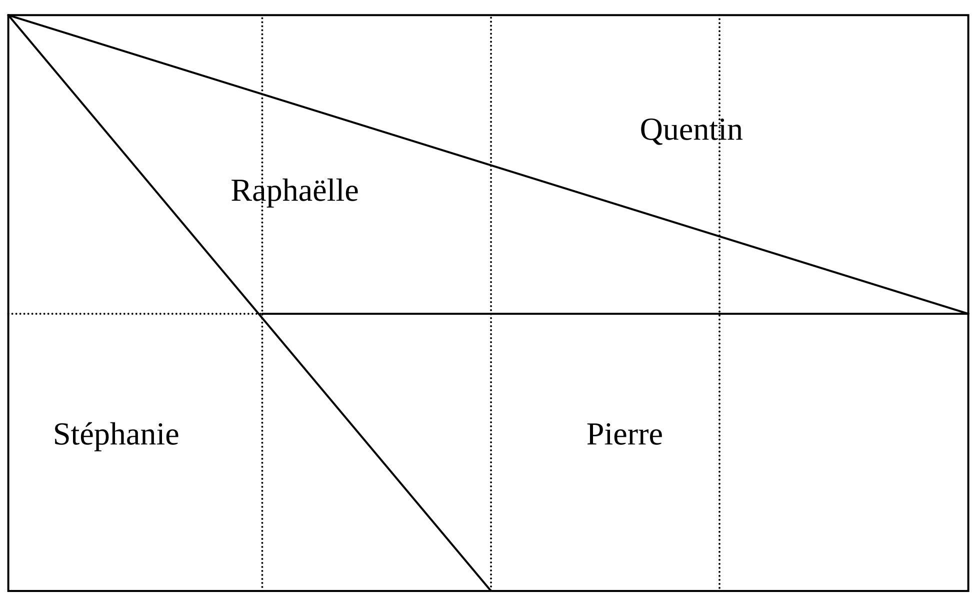


Figure 4 – Procédure de découpage du gâteau de madame Originale

Analyse

On assiste dès lors à une évocation de la situation originale. Les savoirs mobilisés, même s'ils ne sont pas « appelés » par la situation, sont reconnus et utilisés par les élèves. On a un discours conceptuel qui se détache de la réalité de la situation. « *On a tout repartagé et on voit que Raphaëlle a moins d'un quart.* » Ou alors « *On a partagé le gâteau en deux, ça fait un demi et un demi, ensuite on a partagé encore et ça faisait des quarts, on a encore partagé et ça fait des huitièmes. Huit huitièmes, ça fait un gâteau. Ensuite, on a vu que Stéphanie a deux huitièmes comme Quentin mais que Pierre en avait plus que deux huitièmes. Le partage n'est pas égal* ». Ou encore, puisqu'il s'agit de voir si les partages sont égaux « *On partage en deux avec le compas et encore en deux et on voit que Pierre en a plus et qu'il faudrait qu'il en donne à Raphaëlle : les parts ne sont pas égales.* »
Les choix de variables effectués, le dispositif didactique mis en place a pu permettre l'émergence d'un débat sur la validité des réponses données et sur la nature des savoirs mobilisés et explicités lors de la phase collective. Le milieu matériel s'efface et devient accessoire tandis que les élèves accèdent à des informations sur leur production grâce à des connaissances théoriques.
Le type de preuve engagée n'est pas de même nature du fait des choix didactiques effectués. L'organisation du milieu matériel par le maître a donc une influence sur l'apparition de systèmes de preuves ainsi que sur leurs natures. Nous sommes passés d'une validation reposant pour l'essentiel sur des éléments spatiaux à une validation portant sur des savoirs théoriques. Les savoirs spatiaux, du fait des croquis effectués par les élèves (ils n'ont pas la possibilité d'utiliser les « gâteaux » originaux), sont là pour sous-tendre le raisonnement. Le dispositif mis en place a bien permis que les savoirs discutés lors de la phase de conclusion soient bien ceux qui ont servi aux élèves pour résoudre le problème posé.

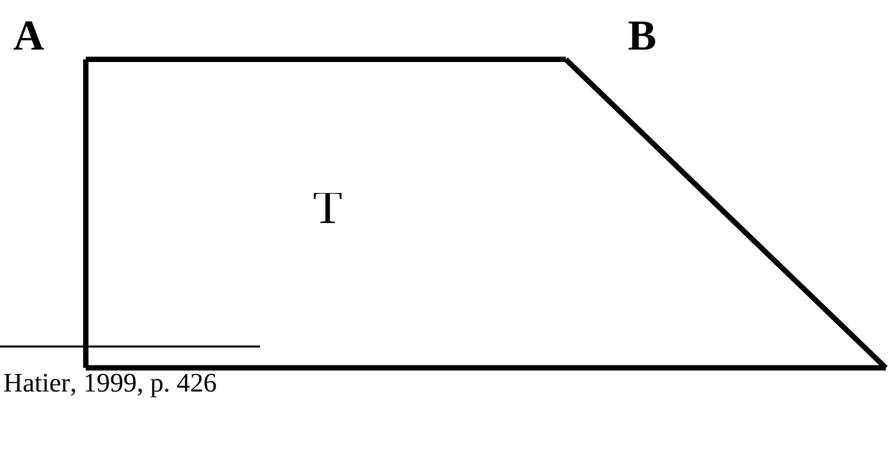
Problème spatial, connaissances spatiales et théorèmes en acte [15].

Nous venons de voir que le milieu matériel, suivant la façon dont il est organisé, va mobiliser et faire expliciter des connaissances qui ne sont pas de même nature : plus spatiales que

[15] Théorème en acte (ou théorème élève) est un théorème jugé vrai par l'élève et utilisé dans une action. Il permet des prises de décision. Il est plus ou moins implicite. Il a son propre champ de validité mais il produit des résultats faux hors de ce champ de validité.

géométriques dans la situation de comparaison de quadrilatères, plus théoriques que spatiales dans le cas du partage de gâteaux.
Cependant, dans les deux cas, le contrôle perceptif reste quand même à la base de la validation. Pour s'engager dans la résolution des problèmes posés les élèves font appel à leurs connaissances spatiales. Ces connaissances spatiales s'accompagnent bien souvent de théorèmes en acte construits par les élèves de manière empirique au cours d'expériences vécues dans la vie de tous les jours ou à l'école. Ces théorèmes en acte peuvent se vérifier et être déclarés valides mais ils peuvent aussi être non complets, douteux, difficiles à démontrer ou faux.
Pour le sujet qui nous intéresse, ces théorèmes en acte ont pour caractéristique d'être, pour la plupart, construits à partir d'expériences perceptives et spatiales. L'enjeu de l'enseignement est de les identifier, d'en voir, le cas échéant, les limites et de les invalider s'ils sont erronés. Le rôle du maître est donc de proposer aux élèves des problèmes qui leur permettent d'acquérir des connaissances qui doivent être de plus en plus théoriques pour qu'une décontextualisation soit possible. Pour Margolinas, il « *n'est pas possible que la conclusion vienne toujours d'un milieu extérieur à l'élève. Si c'était le cas aucune décontextualisation ne serait possible*. »
On est là face à un obstacle qui est propre à la géométrie : on pose aux élèves des problèmes spatiaux, qui sont résolus avec des connaissances spatiales alors que l'on sait que les objets de la géométrie sont des objets théoriques et idéaux. On utilise pour cela, dans un premier temps, les connaissances spatiales des enfants dans l'espoir de les conduire à traiter des objets géométriques théoriques. Cette prise en compte indispensable et première de savoirs spatiaux conduit les élèves à ne s'intéresser et à ne valider que des objets finis (dessins ou objets), sans s'intéresser aux conditions qui ont présidé à leur réalisation. Il peut même arriver, que les élèves mettent en œuvre, dans la résolution d'un problème, un théorème en acte vrai mais qu'on ne peut pas valider ou invalider compte tenu des connaissances théoriques dont peuvent disposer les élèves. L'exemple qui suit en est une illustration.
Dans la classe le maître veut que les élèves prennent conscience que l'on peut décomposer une surface complexe, pour calculer son aire, en plusieurs surfaces simples[16].
Les élèves sont répartis par groupes de deux.
Ils ont à leur disposition :

- une feuille sur laquelle est représentée le polygone T en vraie grandeur. Aucune dimension n'est fournie. Les lettres qui figurent ne servent qu'à aider à la description des procédures des groupes ; dans les productions les élèves n'ont pas utilisé de lettres pour désigner les sommets des polygones.



[16] ERMEL, Hatier, 1999, p. 426

D **C**

Figure 5 – Polygone complexe

- une feuille de papier calque sur laquelle est représenté un quadrillage formé de carreaux de 1cm sur 1cm (18 cm x 24 cm)

les outils habituels de géométrie

La consigne est la suivante : « *Vous devez déterminer l'aire de la surface qui vous est proposée en utilisant comme unité d'aire le cm²* ».

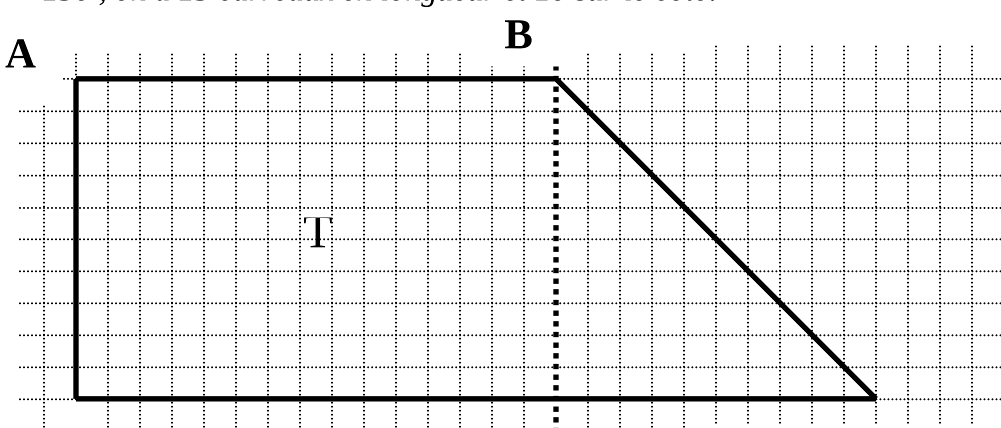
Le maître, afin de préparer la phase de conclusion, fait une liste des procédures a priori :

- pavage effectif de la surface, en dessinant les carreaux. Cette procédure doit être abandonnée.
- utilisation du quadrillage fourni sur calque. Pour la partie rectangulaire, soit les élèves comptent les carreaux (peu probable), soit ils comptent le nombre de carreaux sur les bords et utilisent la multiplication. Pour la partie triangulaire : les élèves vont devoir recomposer les demi-carreaux, mais comme leur nombre est pair ils obtiendront un nombre entier de cm^2.
- partage de la surface en deux parties : une forme rectangulaire (utilisation possible de la formule du calcul de l'aire déjà rencontrée) et une forme triangulaire. Pour cette partie, ils peuvent : soit penser à un demi-carré (10 x 10) et donc diviser par 2 ; soit utiliser le quadrillage et compter. Ils peuvent ainsi affirmer qu'il y a autant de carreaux à l'intérieur du triangle qu'à l'extérieur (ce qui justifie la division).
- mesure des trois côtés du triangle et utilisation de ces résultats dans des calculs erronés ;
- utilisation de la formule du calcul de l'aire du rectangle pour déterminer l'aire de la partie triangulaire.

Les élèves se lancent dans la recherche de l'aire et au bout d'une quinzaine de minutes, collectivement, le maître demande à chaque groupe le résultat trouvé, l'inscrit au tableau sans aucun commentaire. Neuf groupes ont trouvé 200 cm^2, un groupe a trouvé 185 cm^2, un groupe 199 cm^2 et un groupe n'a pas produit de résultat faute de temps.

Un groupe, sûr de sa réponse (il a trouvé 200 cm^2) vient alors au tableau indiquer ce qu'il a fait. Ce groupe (G1) a posé le calque sur le rectangle en faisant coïncider les segments [AB] et [AD] et a « complété » le triangle rectangle pour en faire un carré.

Il indique que le rectangle ABHD a pour aire 150 cm^2, résultat qu'il étaye par l'écriture « *15 x 10 = 150 , on a 15 carreaux en longueur et 10 sur le côté.* »

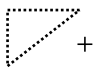
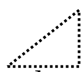


D

H C

Figure 6

Le groupe a ensuite dénombré les carreaux pour le triangle BCH en montrant et en écrivant :
9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 +2 +1 = 45
puis il précise : « *Il y a encore 10 moitiés de carreaux*. » et écrit « *10 : 2 = 5* » parce que

«  +  = 1 » (Cette égalité est écrite au tableau par un élève du groupe.)
Le groupe conclut que l’aire du carré est égale à « 15 x 10 = 150 + 45 + 5 = 200 »
Ce groupe, afin de prouver la validité de son résultat, s’appuie à la fois sur des connaissances spatiales en posant le calque sur le polygone T et sur des connaissances géométriques puisque l’aire du triangle se détermine par la superposition du quadrillage en calque sur le triangle pour faire apparaître un nombre entier de carreaux, et un nombre de moitiés de carreaux. D’autre part les élèves se gardent bien de vérifier si toutes les moitiés sont égales et que la somme de toutes les moitiés dans le triangle rectangle est toujours égale à une unité.
Pour le rectangle le groupe se contente d’une écriture mathématique (15 x 10) qui est une connaissance purement théorique : la formule de l’aire du rectangle.
Cette « démonstration » repose donc sur des éléments de contrôle perceptifs et théoriques.
Le maître ne conclut pas sur la validité de la production. Les autres groupes ne manifestent aucun désaccord.
Un autre groupe vient au tableau en indiquant qu’il « *est d’accord avec le résultat mais* [qu’il] *a fait différemment.* » Ce groupe (G2) vient donc au tableau exposer sa procédure.

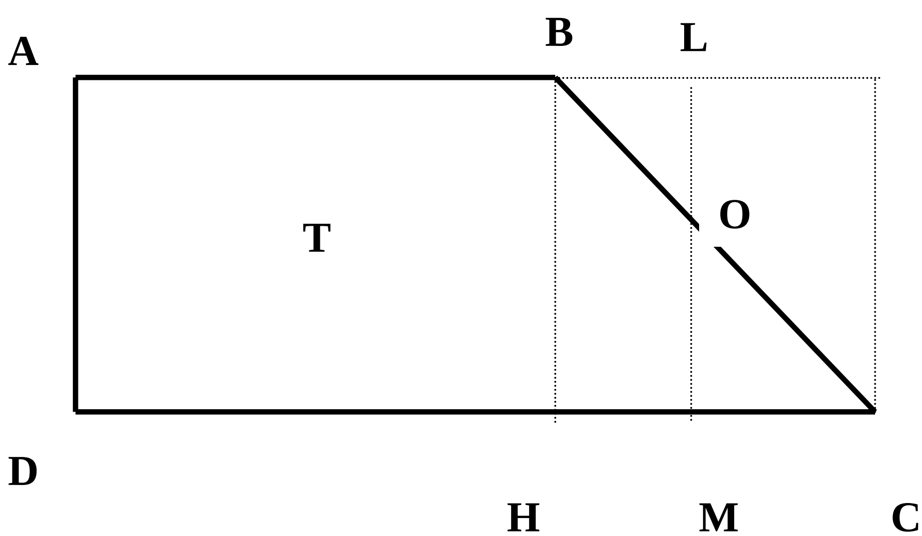
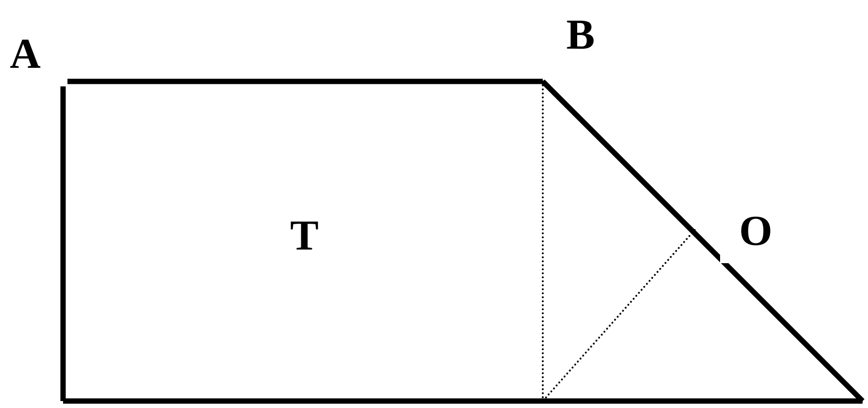


Figure 7

Ce groupe a dessiné [BH] puis le milieu M de [HC] et le segment [ML] sur le polygone initial. Ils ont ensuite découpé le triangle [CMO] et disent :
« *On a pris ce triangle et on l'a mis là* (ils montrent [BLO]). *On a mesuré et on a 10 cm sur le côté et là* (ils montrent le segment [DM]) *on a 20 cm. On fait 20 multiplié par 10 et on trouve 200.* »
La procédure utilisée là encore est une procédure qui allie à la fois des connaissances spatiales et des connaissances théoriques. Ce groupe procède par déconstruction-reconstruction de figures géométriques dans le but d'obtenir une figure géométrique qui rende compte de leurs connaissances sur la mesure d'aire. Les élèves obtiennent ainsi un rectangle dont les dimensions sont entières. Seule la perception permet de contrôler la conformité de la figure obtenue après transformation. Le calcul d'aire du rectangle ayant déjà été rencontré par les élèves, ils n'ont aucun mal à faire admettre aux autres leur procédure. Les tracés sont approximatifs mais cela ne gêne en aucune manière leur exposé puisqu'ils font en réalité appel à des savoirs théoriques. La déformation obtenue, même si elle s'accompagne d'un tracé et d'un découpage, est purement théorique. Elle s'appuie sur la conservation de l'aire dans une décomposition-recomposition. D'ailleurs la mesure -20 cm- ne rend pas compte de la réalité du découpage. Là encore la détermination de l'aire du rectangle se fait par le recours à la formule.
Le groupe (G3) qui a trouve 185 cm^2 ne souhaite pas intervenir parce que, indique-t-il « *on a fait une erreur de calcul et on est d'accord avec 200 cm^2* ».
On pourrait, jusque là, croire que tout va bien. Les groupes s'engagent bien dans des processus de validation. Cette validation se fait de manière collective avec un recours au matériel et les procédures erronées compte-tenu de la clarté des exposés pourraient être écartées. On a pu noter que connaissances spatiales et connaissances théoriques sont mises à contribution dans chacun des exposés sans que cela ne fasse obstacle. Le perceptif joue cependant un rôle majeur : on donne à voir. Cette perception occulte cependant les connaissances théoriques en jeu auxquelles les élèves, qui ne les reconnaissent pas, ne font pas référence de manière explicite.
Le groupe qui a trouvé 199 cm^2 vient alors au tableau en disant qu'ils « *n'ont pas trouvé pareil et qu'ils sont sûrs de leur réponse*. »
Ce groupe indique que, *« pour le rectangle ABHD, on a fait pareil et on trouve nous aussi 150 cm^2* ». Ce groupe (G4) a dessiné [BH] puis le segment [HO] perpendiculaire à [BC]. Pour placer le point O les élèves ont « *mesuré* (ils montrent le segment [BC]) *et ça faisait 14 cm et on a fait la moitié, ça fait 7 cm*. ».



D H C

Figure 9

Il explique ensuite qu’il a « *déplacé* » le triangle BHO pour le mettre sous le triangle CHO de manière à obtenir un carré. Le tracé a été fait à la règle.

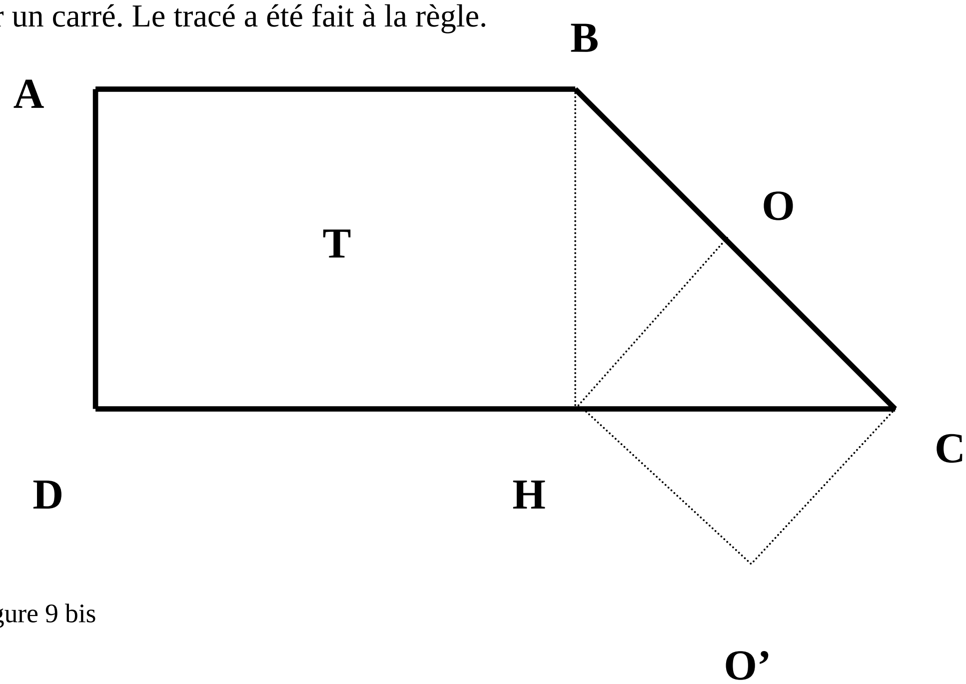


Figure 9 bis

Le groupe continue en disant « là (il montre OCO’H), c’est un carré. Ce triangle (il montre BHC) a la même aire que ce carré (il montre OCO’H). On a vérifié que les deux triangles (BHO et HCO’) étaient pareils et c’est vrai . On a mesuré un côté et on trouve 7 cm, comme c’est un carré, pour trouver l’aire on fait 7 fois 7 et ça fait 49 cm^2. Le carré a donc pour aire 49 cm^2 et la figure a 150 + 49 = 199 cm^2. »
Certains élèves demandent à vérifier ce qui vient d’être dit. Les mesures sont refaites, des doutes sont émis et personne ne peut véritablement trancher. La discussion s’enlise alors sur la précision des tracés et des mesures effectuées, le maître décide d’interrompre le débat. Il n’apporte cependant pas d’informations supplémentaires qui pourraient aider les élèves ; on ne pourra pas vraiment conclure à la fin de cette séance. Les élèves du groupe G4 retournent à leur place. Un élève leur demande alors s’ils sont d’accord avec l’ensemble de la classe pour 200 cm^2, la réponse du groupe G4 est la suivante : *« on est d’accord avec vous mais on ne comprend pas où on s’est trompé. »*

Analyse

Bien entendu nous savons que, même si la procédure utilisée est valide, le groupe G4 n’a pas trouvé la bonne réponse mais comment lui faire comprendre les raisons de son erreur ? Ce qui est en jeu est le fait que l’articulation entre les connaissances spatiales et les connaissances

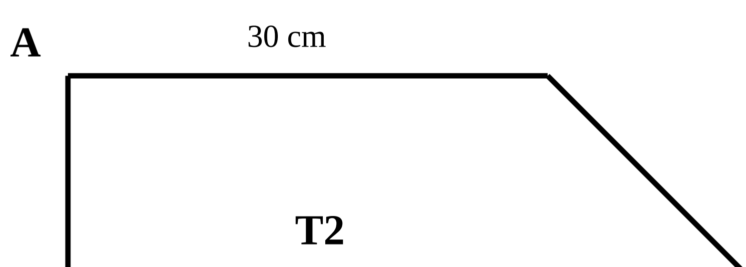
géométriques pose problème. La procédure que ce groupe met en œuvre fait référence à un contrôle perceptif qui atteste de la validité de la transformation réalisée. Cette décomposition-recomposition est pertinente puisqu'elle conduit à la recomposition en un carré, et pourtant…
Seule une analyse mathématique qui n'est pas à la portée d'élèves de fin de cycle 3 peut faire apparaître cette erreur. D'après le théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle, BHC étant un triangle rectangle isocèle,

- OH=OC=OB et les angles sont droits,
- $BC = HC \times \sqrt{2} = 10 \times \sqrt{2}$
- $OH = OC = 5\sqrt{2}$.

L'aire de HOCO' est donc de : $(5\sqrt{2})^2 = 50$.
L'erreur du groupe G4 vient du fait qu'il n'arrive pas à évaluer la mesure de HB et HC car $7{,}07 < 5\sqrt{2} < 7{,}08$. Cette mesure est très proche de celle trouvée par ce groupe qui est pour eux de 7 cm. Ce groupe est dans l'incapacité d'évaluer cette mesure avec précision et l'arrondi à l'unité occasionne une erreur de 1 cm^2.
Le débat collectif n'a pas permis de trancher parce, nous venons de le voir, les connaissances théoriques utilisées pour invalider cette procédure ne sont pas connues par les élèves. On voit bien là les limites du contrôle perceptif et de l'usage de théorèmes en acte non théorisés en géométrie. Dans le cas présent, la perception seule ne permet pas de montrer que la mesure du côté du quadrilatère n'est pas 7 cm. Les rétro-actions du milieu ne sont pas ici efficaces pour valider ce théorème en acte. Ce que renvoie le perceptif c'est que « *c'est pareil.* » mais pour résoudre ce problème il faudrait traiter les objets spatiaux dont il est question en objets géométriques théoriques. Comme nous sommes dans une situation a-didactique, le maître s'interdit d'intervenir sur les savoirs en jeu (d'ailleurs le peut-il dans le cas présent ?). Il ne conclut pas et laisse les choses en l'état.

Ce qui fait obstacle

Quelques jours plus tard, après réflexion, le maître décide de modifier la valeur des variables didactiques de la situation : le polygone proposé est deux fois plus grand. L'hypothèse qui est ici faite est qu'en ayant un polygone plus grand la rétro-action avec le milieu matériel sera plus forte et pourra invalider la procédure utilisée par le groupe G4.
Les conditions de déroulement de cette séance sont les mêmes que lors de la première séance décrite plus haut.
Avant de commencer cette séance, le maître fait un bref rappel de ce qui s'était passé lors de la première séance.
Un élève du groupe G4 vient alors au tableau expliquer la procédure utilisée par son groupe. Il est à noter que les élèves s'interrogent toujours quant à la pertinence de la résolution utilisée, ils ne comprennent toujours pas pourquoi elle a échoué.
Le maître propose alors de partager la classe en deux. Les élèves qui vont chercher l'aire du polygone T2 en s'appropriant la procédure du groupe G4 et ceux qui vont déterminer l'aire autrement de manière à ce que l'on puisse comparer.



B

20 cm

C

D

Figure 10

A la suite d'un quart d'heure de recherche, collectivement, le maître demande à chaque groupe le résultat trouvé et l'écrit au tableau. Les 5 groupes qui ont utilisé la méthode du groupe G4, trouvent 796 cm^2 et les six autres 800 cm^2 .
Un groupe (G1) vient exposer sa solution, il a trouvé 800 cm^2 et indique qu'il ne peut pas avoir fait d'erreur. Ce groupe, sur le polygone dessiné sur la feuille, a tracé la perpendiculaire [BH] à [DC] passant par le point B. Il a ainsi décomposé le polygone en deux figures géométriques bien distinctes : un rectangle et un triangle rectangle. En présentant leur travail les élèves disent : « *Pour ce rectangle* (ils montrent ABHD), *on fait 20 x 30 égale 600* cm^2 .(ils écrivent le résultat dans le rectangle désigné). *Ensuite, on a mesuré là* (ils montrent [HB] et [HC]) *et on a trouvé 20 cm. On fait 20 x 20 égale 400. Mais comme on a fait comme si on avait un carré entier* (ils montrent avec le tracé représentant le carré) *et que là on a que la moitié on a divisé par deux* (ils écrivent 400 : 2 = 200). *Donc 600 + 200 égale 800, l'aire est de 800* cm^2.»

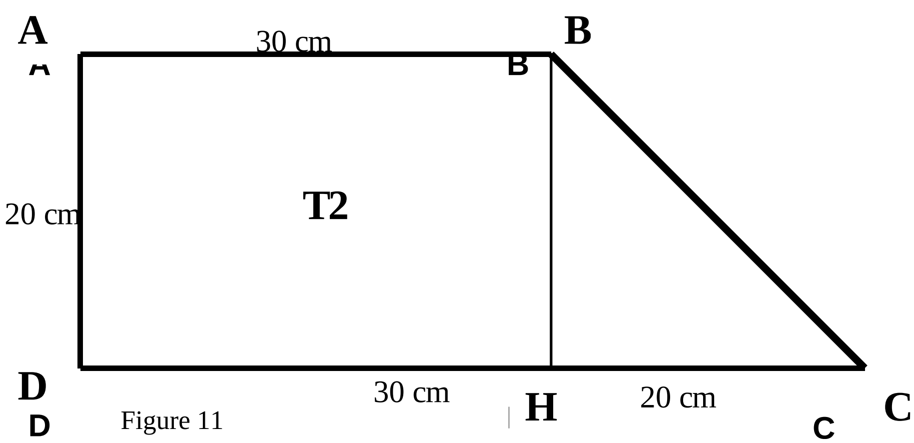


Figure 11

Ce groupe mobilise une connaissance acquise entre les deux séances qui est la formule du calcul de l'aire du triangle. On a deux connaissances théoriques mises en œuvre et explicitées : la formule du calcul de l'aire du rectangle et celle du triangle.
Là encore le maître n'intervient pas, les élèves ne manifestent pas de désaccord. Deux groupes, qui ont eux aussi trouvé 800 cm^2 par des procédures de décomposition-recomposition viennent au tableau pour donner plus de force à l'énoncé qui vient d'être fait. Les procédures mises en œuvre étant les mêmes que pour le polygone T1 nous n'en ferons pas une description détaillée.

Nous avons donc là des processus de preuves mis en œuvre qui sont de l'ordre du concept ; les savoirs mobilisés sont des savoirs mathématiques. Et pourtant, là encore… le doute va émerger quant à la validité du résultat avancé.

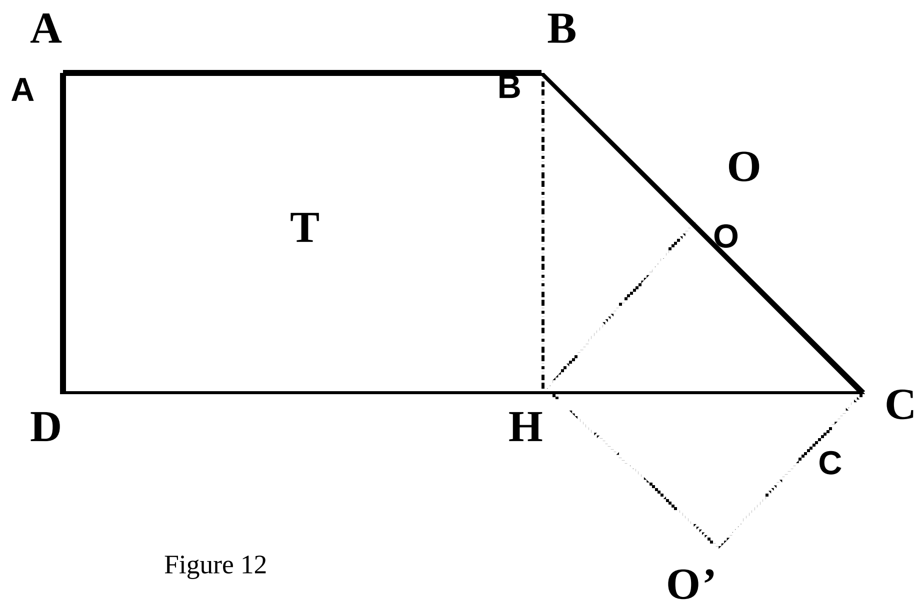


Figure 12

Les groupes qui ont trouvé que l'aire était de 796 cm^2 vont intervenir en disant qu'ils « *sont d'accord* », mais qu'eux aussi sont « *sûrs que ce qu'*[ils ont] *fait est juste* ». Un groupe (G2) vient alors au tableau et indique qu'il a fait comme le « *groupe de Rémi la première fois* » mais, que « *pour être plus sûrs* [ils ont] *décalqué le triangle* (les élèves montrent BHO) *et ont regardé s'il était pareil que celui-là* (les élèves montrent HO'C) *et il est pareil*. »

Ils ont ensuite mesuré « *les côtés du carré et on a trouvé 14 cm. 14 x 14 = 196. On est d'accord avec vous pour le rectangle.* » Ils écrivent au tableau « 600 + 196 = 796 cm^2 ».
Des élèves demandent alors à venir vérifier, les remarques portent sur les mesures et les tracés « *J'ai vérifié votre carré mais il est pas pareil partout* ». Un autre élève dit « *En mesurant, je ne trouve pas 14 cm, il y a des millimètres.* ». Un élève qui veut vérifier que l'aire du triangle BHO est bien la même que HO'C déclare « *Si on met le calque, on voit que ça dépasse un peu.* ».
Les quatre autres groupes qui ont trouvé 796 cm^2 abondent pour le groupe qui est au tableau. Le débat s'enlise puisque chacun des groupes vient vérifier les tracés et les mesures effectuées pour conclure : « *Même vous, vous avez arrondi et on ne va pas faire un malheur pour quelques millimètres*. »
Les élèves, motivés par ce problème, proposent alors d'échanger les productions et de vérifier. Après une courte recherche, la mise en commun des résultats fait apparaître des résultats strictement à l'inverse de la première phase.
La mise en débat ne permettra pas de conclure si ce n'est un élève (procédure identique au groupe G1) qui dira « *nous, on est quand même plus sûrs parce que la figure, on ne la déforme pas* ». La situation se finira par « *c'est bizarre, tout à l'heure avec notre méthode, j'étais sûr, et maintenant, avec l'autre méthode, je suis sûr aussi.* »

Analyse

L'hypothèse faite que l'agrandissement du polygone serait suffisant pour mettre à jour les difficultés mises en œuvre par la décomposition-recomposition du triangle rectangle en un carré s'est heurtée au fait que les élèves ont arrondi pour avoir des mesures entières.
Les élèves, pour mettre en œuvre la procédure du « groupe de Rémi » doivent prendre des mesures et produire un dessin. Ils mettent en jeu la perception, donc des connaissances spatiales et une activité motrice, le traçage du milieu du segment [BC], des segments [OH], [HO'], [O'C]. Le milieu matériel leur renvoie des informations qui les confortent et qui valident la procédure utilisée. Cette procédure est elle-même validée par l'utilisation du calque qui permet de s'assurer que la décomposition-recomposition est correcte : l'aire n'a pas été changée par cette transformation. Or « *les contrôles sur les relations en papier-crayon sont soumis […] à de nombreuses incertitudes […] liées à cet environnement* ».[17]. Seul, le calcul de l'aire mettant en œuvre le théorème de Pythagore (aire de HOCO' = $(5\sqrt{2})^2$) peut rendre valide cette procédure.
La procédure du groupe G1, qui mobilise des connaissances plus théoriques ne permet pas de véritablement trancher. Car, pour ce groupe aussi, connaissances spatiales (tracé de la perpendiculaire [HC] passant par le point B ; tracé du rectangle BHCK) et connaissances théoriques (formules du calcul de l'aire du triangle rectangle et du rectangle) cohabitent et ne sont pas clairement distinguées. Pour remettre en question cette procédure, les élèves ne disposent que de critères spatiaux. Et, bien sûr, lors de la phase collective, ils contrôlent eux aussi l'exactitude des tracés et des mesures effectués. Il est d'ailleurs intéressant de noter que les élèves qui ont mis en œuvre la procédure de calcul de l'aire en utilisant la formule, ne s'appuient pas, lors des mesures des segments, que sur des savoirs spatiaux.

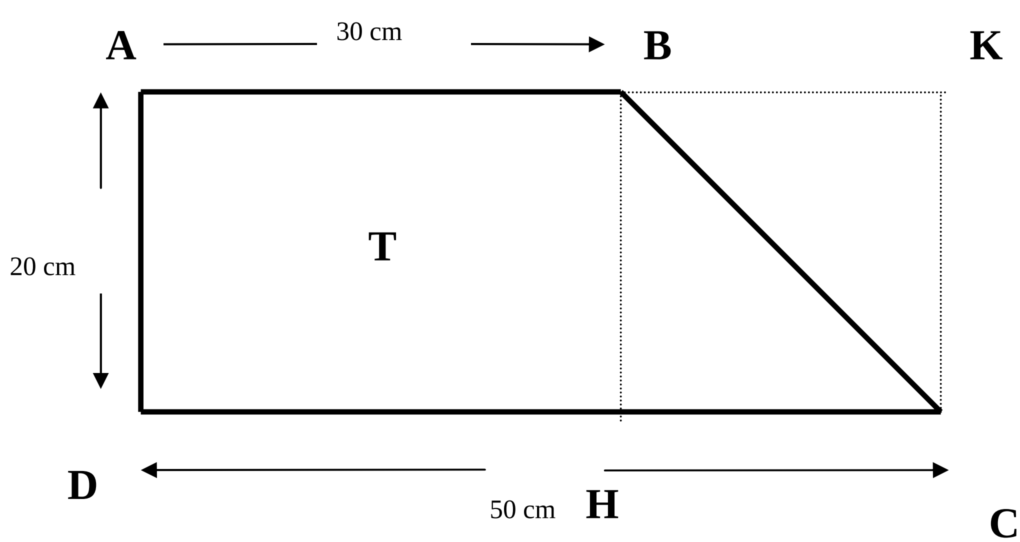


Figure 13

[17] Henri-Claude Argaud : Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géométrie, 1998

A un élève qui vient mesurer l'exactitude des tracés effectué et de la mesure du segment [DH], un autre lui répond « *On sait bien, mais nous on a pas mesuré ça, on a mesuré ici* (il montre [AD]) *et c'est le maître qui l'a tracé* .» De même pour la mesure [HC] un élève répond à un autre qui conteste le tracé du carré BHKC, un autre lui dit « *Si ça* (il montre [AB] mesure 30 cm, *et ça* (il montre [DC]) *mesure 50 cm et alors là* (il montre [HC]) *tu fais 50 - 30 et tu trouves 20 cm. C'est sûr qu'on n'arrive pas à être exact quand on l'a fait.* ». Disant cela, l'élève s'appuie sur une propriété géométrique : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles et [AB]=[DH]. Ce savoir un théorème en acte vrai, c'est une certitude que lui renvoie les informations spatiales du milieu matériel. Ce théorème en acte est, à ce moment, utilisé comme une connaissance géométrique sans avoir été pour autant considéré comme vrai et éprouvé dans d'autres problèmes.

Les élèves mettent en œuvre un contrôle perceptif lors des tracés et ne s'assurent pas avec des instruments (équerre, règle graduée, compas,…) de la validité des figures obtenues. La construction est spatiale, les connaissances pour la valider sont théoriques. Les connaissances utilisées ne sont pas de même nature, elles n'ont donc pas le même statut et pourtant elles sont utilisées par les élèves sur un plan d'égalité.

Dans les deux cas les théorèmes en acte utilisés par les élèves sont vrais mais, dans le cas de la procédure « de Rémi », le fait de rester dans un contexte spatio-graphique ne permet pas de la valider ou de l'invalider, les connaissances des élèves ne sont pas suffisantes pour le faire. Dans le second cas (procédure du groupe G1) les informations nécessaires pour valider le problème sont théoriques mais elle sont traitées comme celles relevant d'informations spatiales. Non clairement repérées et identifiées, ces connaissances théoriques n'apparaissent pas suffisantes pour être acceptées par tous au moment de la conclusion.

A nouveau, parce que le maître ne veut pas sortir du contrat de classe qu'il a établi, il ne conclut pas lui non plus et on restera sur cette phrase prononcée par un élève « *pourtant on aurait dû trouver tous pareils.* »

Il pourrait être envisagé de mettre en place des situations qui puissent permettre aux élèves de traiter de manière différente les informations dont on peut être sûr et celles qui sont probables de manière à ce que cette confusion des genres ne nuise pas à la validation de problèmes.

Conclusion

La mise en place des situations a-didatiques dans l'environnement papier-crayon est une tâche ardue dans la mesure où les processus de validation sont et seront toujours sujets à discussion. Les objets géométriques sont des objets idéaux. La quête d'un tracé, dans l'environnement papier-crayon, qui rende compte de ces objets est illusoire, vaine et sans fondement. Concevoir des situations où la validation se fasse par rétro-action du milieu matériel n'est pas une chose simple : le milieu ne renvoie pas toujours des informations pertinentes et suffisantes pour que les élèves puissent conclure seuls.

Le maître doit donc accepter, lorsqu'il met en place des situations où le milieu matériel favorise l'émergence de systèmes de preuves, que les élèves ne concluent pas ou alors que

cette conclusion soit inachevée et/ou transitoire. La seule conclusion non contradictoire à un problème de construction est une validation théorique. Encore faut-il que le maître se soit assuré que les élèves disposent de ces connaissances théoriques, les mobilisent lors de la résolution du problème et y fassent référence lors de la phase de validation collective.
Lors des phases collectives de conclusion, l'enjeu pour les élèves est de se convaincre après coup de l'utilité des connaissances mathématiques nécessaires pour résoudre le problème posé. Or, dans l'environnement papier-crayon, au moment de la phase collective, nous n'avons qu'un produit fini, un dessin ou un objet. Cette production sera sujette à discussion du point de vue de sa précision, d'où, nous l'avons constaté, la difficulté à décider de sa validité. Les savoirs théoriques (théorèmes en acte vrais ou savoirs) sont absents de la discussion puisqu'ils n'apparaissent pertinents que lors de la phase privée de la résolution du problème.
Ces savoirs théoriques, sur lesquels portent pourtant les apprentissages, ne sont pas clairement identifiés et repérés. Ils sont soit non reconnus, soit le fruit d'un raisonnement naturel en partie implicite. Ce qui est objet de validation c'est le produit fini, « peu importe les moyens employés. Le procédé disparaît complètement aux yeux des élèves qui se polarisent sur la production ».[18]
Lorsqu'il met en place une situation a-didactique dans l'environnement papier-crayon, le maître doit se poser la question suivante : l'interaction avec le milieu sera-t-elle suffisamment forte et nette pour apporter à l'élève des informations compréhensibles et permettent de conclure sur le résultat produit ? Quels seront, lors de la phase de conclusion, les objets sur lesquels porteront la validation ?
Il existe bien une spécificité de la validation en géométrie dans le milieu papier-crayon car les milieux constitués par cet environnement sont des milieux « mous ».
Cela ne signifie pas pour autant qu'il ne faille pas proposer aux élèves des problèmes spatiaux, au contraire. L'enjeu de la didactique en géométrie, dans le cadre théorique que nous avons fixé, est de construire des situations telles que les élèves puissent résoudre des problèmes théoriques, après avoir résolu des problèmes spatiaux où ils se sont construits des connaissances de moins en moins spatiales et plus en plus théoriques, grâce au jeu sur les variables didactiques (cf. situation de partage du gâteau)

Peut-on mettre en place, dans l'environnement papier crayon, des situations a-didactiques pour lesquelles les connaissances théoriques apparaissent comme des outils pour résoudre un problème ?
Pour Henri-Claude Argaud (opus cité), les situations a-didactiques de résolution de problèmes dans l'environnement papier-crayon parce qu'elles se résolvent essentiellement par la perception, (instrumentée ou non) ne favorisent pas « *l'émergence d'éléments de validation acceptables et reconnus par l'élève* ».
La recherche en didactique n'ayant pas produit beaucoup de travaux dans ce domaine ce terrain d'investigation reste à explorer.

[18] Henri-Claude Argaud : Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géométrie, 1998

Bibliographie

ARGAUD H.C: 1998, Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géométrie, thèse non publiée.

BALACHEFF N. Processus de preuves et validation. (Article non publié)

BALACHEFF N. R.D.M. Preuve et démonstration

BRIAND J., CHEVALIER M.C. : 1995, Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques, Hatier, Paris.

BROUSSEAU G. 1998, Actes de l'université d'été d'Olivet.

CHARNAY R. 1996, Pourquoi des mathématiques à l'école ? Paris, ESF éditeur.

ERMEL .1999, Apprentissages numériques et résolution de problèmes, INRP, Hatier.

MARGOLINAS C. 1993, De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, Grenoble, La pensée sauvage,

PROGRAMMES DE L'ECOLE PRIMAIRE 1995, CNDP, Hachette.