VARIABLES ET FONCTIONS, DU COLLEGE AU LYCEE

Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel

Eugène COMIN
Lycée Arnaud Daniel
et DAEST

Résumé : L'algèbre moderne ignore la dimension sémantique qu'un travail sur les grandeurs apporte aux notions de nombres, de variable et de fonctions. La formalisation qui accompagne l'étude actuelle de ces concepts au lycée fait apparaître la théorie des fonctions, aux yeux des élèves, comme un "monde clos" disposant de ses propres règles. La prise en compte du passage de l'arithmétique à l'algèbre, ainsi que d'une transition entre le calcul sur les grandeurs et la définition des fonctions, serait à même de faire évoluer les instruments mis à la disposition des enseignants pour l'enseignement de la notion de fonction. Ces modifications concerneraient notamment l'articulation des deux cycles de l'enseignement secondaire : collège et lycée.

I. Problématique

La plupart des manuels scolaires de seconde commencent l'étude des fonctions par un chapitre de "Généralités" où sont définies formellement, dans le cadre numérique, les concepts de fonction, d'ensemble de définition, de représentation graphique, de variation, d'extremum, ... Puis les fonctions affines et linéaires, définies, elles aussi, dans le cadre numérique, sont une première occasion de mettre en œuvre ces définitions formelles. De même, les fonctions dites de référence : fonctions carrée, inverse, trigonométriques, traitées dans un des chapitres suivants, apparaissent comme des illustrations des concepts généraux précédemment définis.

Cette approche est conforme au programme de seconde de 1999. En effet, son libellé, décrit en termes de contenu et de capacités attendues, accompagnés de commentaires, commence par : "*Fonctions. Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule. Déterminer dans chacun des cas l'image d'un nombre*", continue par : "*Étude qualitative de fonctions : Fonction croissante, ...*" ; puis arrivent les : "*Premières fonctions de référence. ...*", suivies des : "*Fonctions et formules algébriques : Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x) quand f est donnée par une formule.*"

Dans les commentaires, la phrase : "*On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques*" semble la seule référence aux grandeurs. Par contre on peut lire : "*Les fonctions* *abordées ici sont généralement des "fonctions numériques d'une variable réelle" pour lesquelles l'ensemble de définition est donné*". Cette référence au cadre numérique est renforcée par le commentaire suivant : "*L'utilisation de calculatrice ou d'ordinateur amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une "boîte noire")*". Cette caricature du concept de fonction en tant que relation numérique semble révélatrice d'une conception institutionnelle qui s'oppose à l'idée de faire émerger et mûrir cette notion par abstraction de relations entre grandeurs.

Les difficultés que rencontrent de nombreux élèves de seconde dans l'étude des fonctions actualisent cette alternative et conduisent à formuler l'hypothèse suivante :

Dans le curriculum actuel, le chapitre de seconde : "Généralités sur les fonctions" est une méprise didactique ou un quiproquo inter institutionnel parce que :

1. **Soit on estime qu'il est possible de construire de manière directe et formelle les concepts généraux de fonction et de variable dans le cadre numérique, ce qui est un contresens épistémologique.**
2. **Soit on estime que les connaissances des élèves à l'issue du collège, permettent l'institutionnalisation directe en classe de seconde d'aspects généraux du concept de fonction, et c'est un malentendu didactique entre le collège et le lycée.**

Cette hypothèse n'a de sens que par rapport à un projet curriculaire. Le chapitre suivant tente d'expliquer et de conforter cette hypothèse : une première partie est consacrée à une analyse logique des notions de variable et de fonction pour une genèse organisée de ces concepts ; une deuxième partie confronte les programmes et manuels du collège aux résultats de cette analyse ; la troisième partie rend compte d'une enquête qui révèle quelques difficultés chez des élèves de seconde qui sont autant d'indices d'une rupture épistémique entre le collège et le lycée. Enfin, dans le dernier chapitre est esquissé une organisation scolaire des notions de variable et de fonction qui tient compte des analyses précédentes.

II. Conditions d'émergence des notions de fonction et de variable

II.1. Considérations épistémologiques[1]

L'histoire des mathématiques indique que l'idée de fonction résulte d'une évolution dans le questionnement sur les phénomènes observables qui va du pourquoi vers le comment, de la causalité philosophique à la causalité scientifique. Le fondement de la notion de fonction est l'étude des "lois de variations" de certains phénomènes et la recherche d'une modélisation de ces lois. Les définitions ensemblistes actuelles ignorent la dimension sémantique qu'apporte l'étude des grandeurs. Le concept de fonction a sa source dans l'étude de relations de dépendance entre deux grandeurs telle que toute variation de l'une entraîne ou accompagne une variation de l'autre ; ainsi toute idée de fonction contient une forme de l'idée de variable. Or la description des variations

[1] Une analyse plus approfondie figure en annexe de la thèse COMIN (2000) dans "points d'histoire"

nécessite des comparaisons qui elles-mêmes induisent la construction et l'usage des rapports et des nombres. Ainsi, l'évolution de la notion de fonction ne peut manquer de s'appuyer sur une genèse des différents ensembles de nombres[2].

La construction de ces différentes notions s'appuie depuis l'école primaire jusqu'au lycée, sur de multiples institutionnalisations locales aux apprentissages, qui échappent à l'ordre axiomatique des savoirs mathématiques savants. La formalisation qui accompagne l'étude actuelle des fonctions au lycée, porte avec elle un sens qui, s'il ne réfléchit pas l'étude des grandeurs, fait apparaître les mathématiques, aux yeux des élèves, comme une compilation de théories, un monde clos disposant de ses propres règles. Pour cette raison, l'étude élémentaire des fonctions ne peut-être, à ses débuts, qu'une modélisation de l'arithmétique des grandeurs.

Pour comprendre les conséquences d'un choix curriculaire et les causes des difficultés des élèves, pour élaborer les étapes d'une organisation didactique, nous avons besoin d'aller plus avant dans l'analyse épistémologique et cognitive des notions de variable et de fonction. Une meilleure perception des différents aspects de ces objets nous aidera à rendre compte des programmes et manuels scolaires, à poser des questions sur les connaissances des élèves, à formuler des hypothèses pour l'élaboration d'une organisation mathématique scolaire.

II.1.1. La notion de variable

a) Du côté des savoirs

La notion de variable s'oppose à l'idée de constante et réfère à différents objets de savoir (paramètre, inconnue, indéterminée, variable libre, variable liée, variable muette,...) car elle apparaît dans des organisations mathématiques différentes. Les ensembles de situations engendrent ces différents sens[3]. La variable pourra être l'élément générique d'une population, d'une grandeur, d'un ensemble numérique, d'une structure algébrique,...

On peut distinguer :

- Les variables nominales susceptibles de désigner différents objets ou individus. Par exemple, le professeur désigne les élèves de sa classe par leurs noms.
- Les variables qualitatives susceptibles d'avoir plusieurs modalités ou états. Par exemple, la couleur des yeux des élèves est une variable qualitative.
- Les variables ordinales qui apparaissent dans la définition d'échelles de valeurs. Par exemple, les notes attribuées aux élèves lors d'un contrôle permettent de les classer.
- Les variables quantitatives peuvent avoir différents domaines de valeurs (grandeurs mesurées ou ensembles de nombres) et entrer dans des calculs.

---

[2] Pour une connaissance des nombres chez les élèves de seconde, on pourra consulter Digneau (1989).

[3] Une définition formelle du concept de variable ne rend pas compte de ces différents sens. Par exemple, dans son dictionnaire des mathématiques modernes (Larousse, 1969), Lucien Chambadal définissait une variable comme : l'*élément arbitraire d'un ensemble.*

b) Du côté des connaissances

La notion de variable peut être rencontrée dans différents cadres importants : l'arithmétique des grandeurs, l'algèbre élémentaire, la géométrie élémentaire... Nous allons examiner quelques conditions d'apparition de ces différents objets.

En arithmétique des grandeurs :

Les grandeurs présentent les différents aspects décrits précédemment, en particulier qualitatif (les qualités d'un objet : masse, volume, vitesse, densité, ...) et quantitatif (les grandeurs mesurées : 3 kg, 5 dm^3, ...).

Dans un problème d'arithmétique, certaines constantes doivent être considérées, par l'élève, comme des variables (valeurs possibles ou envisageables : sorte de nombres généralisés) pour apprendre la structure du problème (par exemple les techniques de recherche d'une quatrième proportionnelle ne dépendent pas des valeurs numériques qui interviennent).

Les "formules d'arithmétique"[4] résument des programmes de calcul. Les variables y sont représentées par des mots ou des lettres.

Exemple : $aire\ du\ triangle = \frac{base \times hauteur}{2}$ ou $A = \frac{b \times h}{2}$. Remarquons que dans le cadre géométrique, le triangle est lui-même une variable à laquelle sont attachées deux autres variables : la base et la hauteur.

En algèbre élémentaire :

Un terme est écrit avec des lettres qui représentent des variables numériques. L'écriture répond à une syntaxe. La manipulation d'un terme se fait comme s'il était constant. La "formule algébrique" peut-être considérée comme un terme ou comme un programme de calcul[5]. Ces considérations ouvrent à nos yeux la question suivante :

Question 1 : *Une formule est-elle perçue par les élèves : comme un terme ? ou bien comme le résumé d'un programme de calcul et dans quel cadre ?*

En géométrie élémentaire :

Une variable nominale peut référer à un ensemble de figures géométriques connues (par exemple lorsque ces figures sont utilisées dans l'étude d'une grandeur : aire d'un triangle, d'un rectangle, d'un disque, ...). Une variable qualitative peut décrire des formes géométriques ; elle peut être désignée par une expression connue et conventionnelle ; par exemple "la nature d'un triangle" désigne différentes caractéristiques de triangles : rectangle, isocèle, équilatéral, rectangle isocèle. Un ensemble de figures géométriques peut être ordonné (par exemple, un ensemble de carrés peut être ordonné par l'inclusion ou par une grandeur caractéristique : l'aire du carré ou la longueur du côté).

Le domaine des modalités d'une variable peut-être contenu dans la consigne. Exemples : "déterminer les triangles d'aire fixée et dont la base est donnée" ; "considérer l'ensemble des droites du plan parallèles à une droite donnée".

---

[4] Les notions de "formule arithmétique" et "formule algébrique" sont étudiées en 2-1-3.

[5] Ces idées sont issues du travail de Broin (2002).

c) Mode de désignation

Nous venons de voir comment le mode de désignation des variables (lettre, mot, expression, phrase, ...) est influencé par les conditions d'apparition de ces objets : cadres, organisations scolaire ou savante, pratiques sociales ou institutionnelles, habitus scolaires, ... Ce qui conduit à poser la question suivante :

Question 2 : *Ces modes de désignation sont-ils perçus par les élèves comme des indices discriminant différents aspects de la notion de variable et ont-ils une influence sur le processus de conceptualisation des objets variable, fonction et nombre ?*

II.1.2. La notion de fonction

a) du côté des savoirs

Dans le concept de fonction, nous retenons trois éléments essentiels : **variation, dépendance, correspondance**. Une fonction modélise une dépendance entre variables en décrivant une correspondance terme à terme entre les valeurs prises par ces variables.

Cette dépendance peut revêtir un caractère déterministe ou aléatoire. C'est pourquoi nous opposerons les fonctions déterministes aux fonctions du hasard. Au sein de chacune de ces deux grandes catégories, un autre facteur de discrimination réside dans la manière dont est établie la correspondance. En croisant ces deux critères, nous avons été conduits à ébaucher la classification suivante.

Les fonctions déterministes :

- Nous appellerons fonction performatives[6] celles dont la correspondance est explicitée par une formule. La formule (par exemple $2x+3$) décrit un programme de calcul en même temps que l'ensemble des résultats possibles de ce calcul[7]. Les fonctions performatives décrivent l'action à laquelle elles réfèrent en même temps que ses effets. Chacune de ces fonctions a pour objet de modéliser une classe de situations en décrivant la relation invariante entre objets d'une même situation : par exemple, la fonction linéaire modélise les relations de proportionnalité.
- Les fonctions mesures attribuent une valeur à chaque élément d'une structure, soit directement, soit par un mesurage, soit par l'intermédiaire d'une technique en référence à une théorie. Les probabilités sont des mesures de masse totale 1.

Les fonctions du hasard :

L'aspect stochastique de ces fonctions s'oppose au caractère déterministe des fonctions de la première catégorie. L'étude des phénomènes stochastiques opposa Diderot et d'Alembert. Diderot voyait dans le calcul des probabilités "un calcul dont l'application a tant d'importance et d'étendue" alors que d'Alembert refusait de reconnaître dans le calcul des probabilités une véritable branche des mathématiques[8].

- Un procédé d'observation permet d'associer une modalité à chaque observable. Nous appellerons fonctions des observations une telle correspondance. Les observables

[6] Un énoncé est dit performatif s'il sert à effectuer l'action qu'il signifie.
[7] C'est pourquoi une formule peut être perçue comme le résumé d'un programme ou comme une variable (ensemble des images ou variable-fonction).
[8] Arthur M. Wilson ; Diderot, sa vie, son œuvre ; collection Bouquin Laffont.

peuvent être des individus sur lesquels on étudie un caractère ou des échantillons (séries chronologiques) sur lesquels on calcule une moyenne, un écart type, un chi2, ...L'objet principal des fonctions des observations est de décrire les phénomènes observés (statistiques descriptives).

- L'expérience est un phénomène provoqué et donc renouvelable. Les issues possibles connues sont aussi appelées éventualités. Nous appellerons fonction des expériences la correspondance qui attribue une <u>éventualité</u> à chaque essai. Le but d'une expérimentation est de faire apparaître une loi de probabilité ou une fonction performative. (statistiques inférentielles).

Dans les deux cas précédents, les fonctions décrivent des événements d'un point de vue contingent et peuvent sous certaines conditions induire des conjectures à caractère déterministe.

Cette classification nous éloigne de l'idée de dépendance qui fonde le concept de fonction et génère la question suivante :

Question 3 : *Quelle est la place de ces distinctions dans l'organisation scolaire qui accompagne la conceptualisation de la notion de fonction chez les élèves ?*

b) du côté des connaissances

L'analyse épistémologique nous a conduit à poser que *c'est l'idée de **dépendance** qui **fonde** les concepts de **fonction et de variable**.* Rappelons seulement que chez Leibniz (1646-1716), le mot "fonction" désigne une relation entre grandeurs dont les variations sont liées par une loi. L'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles modélisée par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs. Dieudonné (1972) gomme même la distinction entre correspondance et graphe qu'il taxe de psychologique. Mais une fonction définie par son graphe n'est autre qu'une variable à deux dimensions qui prend ses valeurs dans un domaine prédéterminé ; comment trouver dans ces conditions les raisons de variabilité et de prédétermination dans ce domaine ? A vouloir trop épurer le modèle, on perd les raisons de la modélisation et certaines fonctionnalités du modèle.

Nous faisons l'hypothèse que *les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de variabilité et de continuité.*

c) Mode de désignation

Comme tout concept, la fonction est un ajout au réel qui nécessite des représentations. Chacune d'elles privilégie certains aspects de la situation ou de la fonction en tant qu'objet d'étude.

1) Le tableau numérique est une partie du graphe de la fonction. Il ne montre que quelques correspondances entre éléments (nombres ou grandeurs mesurées).
2) Le programme donne un moyen de déterminer le correspondant de n'importe quel élément.
3) La formule n'est pas seulement le résumé d'un programme. Elle est un terme d'une structure algébrique avec lequel on peut faire des calculs (algébriques).

4) La représentation graphique[9] visualise les dépendances entre variations.

Nous postulons que *le tableau numérique et la formule privilégient le quantitatif et les représentations graphiques le qualitatif. Si on sépare le quantitatif du qualitatif on perd l'idée de dépendance.*[10]

On peut supposer que *les différentes représentations (tableau numérique, programme, formule, courbe) ont des répercutions sur la compréhension, sur les conceptions des élèves.*

On peut déjà constater que la modélisation de relations de dépendances entre grandeurs par une fonction détermine une orientation dans cette dépendance qui n'est pas nécessairement le reflet de la situation ; par exemple, la relation de proportionnalité entre deux grandeurs est parfaitement symétrique alors que la fonction linéaire dissymétrise cette relation.

II.1.3. De la formule arithmétique à la formule algébrique

Pour abstraire la fonction numérique d'une relation entre grandeurs, les élèves sont amenés à transformer la "*formule arithmétique*" qui résume un algorithme de calcul entre grandeurs mesurées en une "*formule algébrique*" qui représente l'élément d'une structure algébrique. Nous allons organiser une explication des conditions de ce passage. Les formules arithmétiques et les formules algébriques apparaissent comme des représentants d'objets différents. Nous allons donner quelques caractéristiques de la relation entre représentant et objet.

Dans les formules arithmétiques :

- Les lettres ou les mots désignent des grandeurs mesurées ou des mesures.
- Les variables sont des grandeurs.
- Le sens est porté par la structure des grandeurs et le programme de calcul sur ces grandeurs qui suppose un seul calcul à chaque situation et une valeur numérique unique.

Ce qui peut être représenté de manière plus schématique, en prenant un exemple, par :

$$\boxed{\text{Formules arithmétiques}} \longrightarrow \boxed{\text{Grandeurs}}$$

$$far \longmapsto g$$

Exemple : $\dfrac{base \times hauteur}{2} \longmapsto$ *Aire d'un triangle*

[9] Pour une étude détaillée de l'usage des représentations graphiques, voir Bloch (2000 et 2002).
[10] Ce postulat s'appuie sur le travail de Sophie René de Coteret (1985).

Dans les formules algébriques :

- Les lettres désignent des nombres réels.
- Les variables sont des ensembles numériques (x et y sont des variables muettes).
- Le sens est porté par la structure de 3 et par le programme de calcul itératif qui engendre une correspondance (donc une fonction). La formule algébrique peut comporter des paramètres quand elle modélise une classe de situations : par exemple, l'expression " $f(x) = ax$ " regroupe toutes les situations de proportionnalité.

Ce qui peut être représenté schématiquement en prenant l'exemple de la fonction de deux variables par :

$$\boxed{\text{Formules algébriques}} \longrightarrow \boxed{\text{Fonctions } \{R^n \to R\}}$$

$$fal \longmapsto f$$

Exemple : $\longmapsto (x,y) \mapsto \frac{1}{2} \times x \times y$

La difficulté de passage de la formule arithmétique à la formule algébrique tient au changement de cadre et de registre mais aussi au fait que l'interprétation de ces deux représentants conduit à deux objets totalement différents : dans le premier cas à une grandeur dans le deuxième cas à une fonction ou type de fonction.

Cette analyse permet d'envisager différents comportements d'élèves :

Si l'élève interprète la formule comme étant un élément d'une structure algébrique (ce qui est peu probable en début de seconde) alors pour cet élève :

- La formule est un terme invariant.
- Les lettres qui entrent dans sa composition sont des constantes.

Si l'élève interprète la formule comme étant le résumé d'un programme de calcul alors deux cas peuvent se présenter :

- S'il se place dans le cadre arithmétique, la formule représente une procédure de calcul ou son résultat (une grandeur mesurée) donc pour cet élève :

▪ La formule désigne un nombre (en tant que mesure).
▪ Les lettres qui entrent dans sa constitution désignent des mesures.

- S'il se place dans le cadre algébrique, la formule représente une fonction (la correspondance) ou une variable fonction (ensemble des images) et pour cet élève :

▪ La formule désigne une variable ou une fonction.
▪ Les lettres qui entrent dans sa composition désignent des variables.

Mais il est difficile de trouver dans les productions des élèves des indices qui discriminent les conceptions arithmétiques des conceptions algébriques. La seule considération des registres ne permet pas de distinguer les deux cadres. Par exemple les lettres et les formules peuvent représenter des nombres dans un cadre comme dans l'autre. De plus différentes conceptions peuvent cohabiter chez un même élève de telle sorte que le cadre dans lequel il se place dépend de la question et des connaissances qu'elle réactive.

II.2. Programmes et manuels scolaires.

Pour poursuivre l'examen de l'hypothèse initiale, nous allons consulter les programmes de 1996[11] et les manuels scolaires[12] d'une série complète de collège pour illustrer nos analyses.

Programmes de sixième et de cinquième :
Pour chaque niveau scolaire, les programmes de collège comportent trois rubriques : "Travaux géométriques", "Travaux numériques", "Organisation et gestion de données. Fonctions". C'est cette dernière rubrique qui nous intéresse. Elle est libellée en terme de contenu, de compétences exigibles et de commentaires.
Dans les contenus du <u>programme de sixième</u> figure :

"*Application d'un pourcentage à une valeur ; ... , usage des opérateurs constants d'une calculatrice. ... Calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, de la longueur l'un cercle*".

Dans les compétences exigibles, le texte propose d'exercer les élèves au calcul sur les longueurs, les aires et les volumes avec des changements d'unités qui sont autant d'occasions de mettre en œuvre les techniques de la proportionnalité.

Les commentaires insistent sur "*l'étude de situations relevant ou non du modèle proportionnel*" et précisent "*certains travaux conduiront à décrire des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que "en fonction de", "est fonction de" pourront être utilisées*" ; ils manifestent ainsi le souci de préparer les élèves à l'étude ultérieure du concept de fonction. Mais pour les élèves qui n'ont aucune idée de cette notion, l'expression "est fonction de" n'est rien d'autre qu'une expression équivalente à "dépend de" ; la seule utilisation d'un mot n'induit pas l'objet mathématique correspondant.

Cette dernière phrase (qui figurait déjà dans les compléments aux programmes et instructions de cinquième du 30 juillet 1987) est reprise dans le <u>programme de cinquième</u> qui continue de mettre l'accent sur la proportionnalité : "*Reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un tableau complet de nombres ... Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité dont les données sont fournies partiellement.*"
"*Mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants :*
- utiliser des unités combinant le système décimal et le système sexagésimal (mesure du temps),

[11] Notons que les nouveaux programmes de collège entreront en application en sixième à la rentrée 2005.
[12] Collection transmath ; éditions 2000 à 2003 ; Nathan.

- calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin,

- reconnaître un mouvement uniforme à la proportionnalité entre temps et distance parcourue ; utiliser cette proportionnalité,

- calculer un pourcentage, un coefficient de proportionnalité,

- effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure. "

Ces programmes manifestent la volonté de faire travailler les élèves sur les grandeurs mesurées et les changements d'unités qui constituent un milieu privilégié d'utilisation des techniques de la proportionnalité. Mais le lien entre "fonction linéaire" et "proportionnalité" n'est jamais évoqué dans ces programmes. La phrase "*Les élèves retiendront que dans une relation de proportionnalité, la correspondance est déterminée par un couple de valeurs homologues non nulles*" laisse entrevoir la possibilité de caractériser une relation de proportionnalité par un rapport mais il n'est pas question de faire de ce rapport un opérateur afin de généraliser cette relation de proportionnalité avec le modèle numérique "fonction linéaire".

Les commentaires précisent : "*Les activités numériques et graphiques pourront se référer à l'un ou l'autre thème exploitant des formules, notamment de longueur, d'aire et de volume*". Il s'agit donc de formules arithmétiques comme le précise la suite des commentaires : "*Ainsi, on pourra envisager des variations :*

- de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, de celle d'un disque,

- de la longueur d'un arc de cercle, de l'aire d'un secteur circulaire,

- du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit, en fonction d'une variable de la formule, toute autre variable étant fixée."

Cette dernière partie encourage une étude des variations pour un travail sur la notion de fonction dans le cadre de l'arithmétique élémentaire où les variables sont des grandeurs.

Les manuels scolaires de sixième et cinquième :

Il y a les textes des programmes et les manuels scolaires qui entretiennent une proximité avec l'enseignement. Sans avoir fait une étude exhaustive des manuels, celui que nous avons consulté apporte quelques indices qui semblent montrer la conformité de l'organisation de cet enseignement avec les programmes. Plusieurs situations y mettent en jeu des "fonctions" explicitées par des tableaux, des courbes ou des formules mais elles ne font pas apparaître de système sémiotique organisé qui permettrait d'abstraire progressivement un modèle numérique d'une relation de dépendance entre grandeurs. Par exemple, dans le tableau de proportionnalité apparaît le coefficient de proportionnalité mais cet "opérateur" n'est pas utilisé pour établir une relation numérique formelle qui résumerait et réfléchirait plusieurs situations. La potentialité qu'offre la fonction linéaire d'unifier la diversité de sens induite par la multiplicité des grandeurs quotient (prix unitaire, échelle, vitesse, pourcentage, densité, masse volumique, ...) n'est pas exploitée. De même, l'utilisation des formules arithmétiques se limite au calcul de quelques mesures : prix, longueurs, aires, volumes, vitesses, angles, ...

Or quel que soit le nombre d'exercices, il nous semble que l'idée de variable ne peut pas naître des quelques valeurs demandées dans chacun de ces exercices.

En résumé, le passage important et difficile du cadre des grandeurs au cadre numérique, de la formule arithmétique à la formule algébrique, que l'on pourrait qualifier de "saut notionnel", n'est pas préparé.

Les programmes de quatrième :

La rubrique "travaux numériques" introduit le calcul littéral :

"*Le calcul littéral sera introduit avec prudence en veillant à ce que les élèves puissent donner du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier lors de l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie*" et sous la rubrique qui nous intéresse : "Gestion de données, Fonctions" on peut lire : "*Comme en 5e, le mot « fonction » sera employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée*". La reprise de cette phrase souligne bien la volonté des auteurs du programme de ne pas détacher la notion de fonction du cadre des grandeurs ; ce que l'on retrouve dans l'insistance sur la proportionnalité aux deux parties suivantes : "1. *Représentations graphiques. Proportionnalité. Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine*" (Cette caractérisation ne figurait pas explicitement dans les programmes de 6^e et 5^e). "2. *Application de la proportionnalité. Vitesse moyenne. Utiliser l'égalité d = vt pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps*". Cette relation seulement évoquée dans les programmes de 5^e est ici explicitée par la formule arithmétique "d=vt" puis implicitement sollicitée dans la partie "*Grandeurs quotients courantes. Changer d'unité de vitesse* ...". Il n'y a toujours pas de lien entre "proportionnalité" et "fonction linéaire".

Dans la partie "*3. Statistique* ": la notion de variable apparaît avec un statut différent. Elle recouvre l'idée nouvelle et incontournable de famille de nombres : "*Les tableurs-grapheurs, utilisés dès la 5^e en technologie, introduisent une nouvelle manière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans un tableau*". Jusque là, les variables étaient des grandeurs. Remarquons aussi, que jusqu'en 4^e, les programmes excluent non seulement l'étude des fonctions linéaires et affines mais aussi toute introduction formelle de modèles numériques.

Le manuel de quatrième :

Plusieurs situations proposent des relations de dépendance entre grandeurs qui relèvent de modèles linéaires, affine ou quadratique mais les auteurs s'interdisent l'usage de ces mots et des autres ostensifs propres aux fonctions numériques ; ce qui réduit le vocabulaire à l'usage du mot "proportionnel". Par exemple[13], une activité ayant pour objet de "caractériser la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine d'un repère" propose un assortiment :

- de "cinq surfaces dont l'aire est fonction d'une longueur variable x" (un carré de côté x, un rectangle de côtés 5 et x, un rectangle de côtés 2 et x+3, un parallélogramme de base x et de hauteur 4, un triangle de base 6 et de hauteur x),
- de cinq tableaux où figurent en tête de première ligne "x" et en tête de deuxième ligne une des 5 formules correspondant à un des cinq calculs d'aire : x^2 , $5x$, $2(x+3)$, $4x$, $3x$,
- de cinq graphiques qui "représentent les tableaux" précédents.

[13] Transmath 4^e ; p115.

La première activité consiste à "associer chaque surface au tableau qui lui correspond" (en s'aidant de la formule) puis à "reproduire et compléter ces tableaux" où ne figurent que 3 valeurs numériques ; et enfin à reconnaître "parmi ces tableaux, lesquels sont des tableaux de proportionnalité ?".

La deuxième activité comporte deux questions :

a) "Associer chaque graphique au tableau qu'il représente"
b) "Comment reconnaît-on un graphique qui correspond à une situation de proportionnalité ?"

La potentialité de cet assortiment de situations, de formules et de graphes est limitée par les contraintes du programme. L'auteur ne peut pas avoir recours aux mots "linéaire, affine, quadratique" pour discriminer ces trois types de fonctions. Les trois situations de proportionnalité ne sont pas regroupées sous une même étiquette "fonction linéaire". Le seul recours de l'auteur est le tableau qui est ou n'est pas de proportionnalité et la représentation graphique où les points sont ou ne sont pas alignés avec l'origine du repère. Les distinctions points alignés ou non, points alignés avec l'origine ou non, ne sont pas faites ; ni les comparaisons de variations qui nécessiteraient d'autres ostensifs tels que "*image*, *correspondance*, $y=ax$, $f(x)=ax^2$, ..." pour expliquer et accompagner les calculs. Et l'idée de variable ne peut pas naître des trois valeurs numériques demandées dans chacun des tableaux. Les mots "*image*", "*transformation*" (pourtant utilisés en géométrie), "*antécédents*", ...seraient bien utiles pour accompagner les activités qui pourraient engendrer certains aspects du concept de variable.

Finalement, les trois principaux représentants des fonctions que sont la formule, le tableau et la représentation graphique sont présents mais leur potentialité fonctionnelle n'est pas exploitée et ne sera pas réinvestie dans d'autres exercices parce qu'il manque le vocabulaire qui permettrait de l'abstraire de cette situation par une institutionnalisation locale.

Dans l'exemple suivant, nous allons voir que les tentatives de généralisation se heurtent à des difficultés de formulation. Voici un extrait de cet exercice[14] :

«On désigne par y et z les mesures de deux grandeurs. Ces mesures dépendent de la mesure x d'une autre grandeur : $y = x(x^2 - 3x + 4)$ et $z = 5(x-3) - 3(x-5)$.
On se propose de savoir si les mesures y et z sont proportionnelles à x.

1)a) Recopier et compléter le tableau suivant :

	0	1	2

b) D'après ce tableau, les mesures y et z peuvent-elles être proportionnelles à x ?

2) Utiliser l'expression de z en fonction de x pour démontrer que z est proportionnelle à x. **Une aide** : Pour démontrer que la mesure z est proportionnelle à x, on détermine le coefficient de proportionnalité a tel que $z=ax$.»

On peut s'interroger sur le statut des lettres qui apparaissent ici. Il semble que l'auteur veuille confronter les élèves avec une abstraction qui place les notions de

[14] Transmath 4^e ; p128.

variables (et de fonction) à mi-chemin entre le cadre des grandeurs et le cadre numérique puisque les lettres désignent des mesures de grandeurs. Ce positionnement lui permet d'expliciter une relation de non-proportionnalité entre grandeurs par une formule algébrique. On peut donc l'interpréter comme une tentative d'intégration progressive d'outils unificateurs qui partent de connaissances sur les grandeurs et permettent une entrée progressive dans l'algèbre. Mais les lettres pour désigner des mesures et la formule algébrique arrivent détachées de tout milieu matériel. Or la proportionnalité caractérise une relation entre grandeurs et non entre nombres ; comment dans ces conditions, une mesure peut-elle être proportionnelle à une autre mesure ? L'auteur de l'exercice pressent le désarroi des élèves et donne une définition de mesures proportionnelles dans son aide, avec les ostensifs propres à l'algèbre. Cette institutionnalisation locale tente d'instaurer une technologie provisoire avant l'entrée dans l'algèbre. Si le tableau de proportionnalité apparu dans les années 1975-1980 permet de transposer les techniques de calcul du cadre des grandeurs vers le cadre algébrique en renvoyant les unités en tête de liste, il est plus difficile de trouver un vocabulaire qui jouerait ce rôle de médiation entre les registres propres à ces deux cadres.

Un recours prématuré au cadre numérique favorise des amalgames de registres et des confusions dans les concepts. Le processus d'algébrisation nécessite une dialectique patiente, lente et avisée entre le cadre des grandeurs et celui de l'algèbre pour une conversion progressive des concepts de grandeurs en variables numériques, de rapports et de mesures en nombres "abstraits", de dépendances entre grandeurs en relations numériques. Nous comprenons la prudence manifestée par les programmes de collège qui conduit les enseignants à n'introduire le vocabulaire des fonctions qu'en troisième mais nous avons vu aussi les limitations de l'arithmétique élémentaire dans la description des relations fonctionnelles. L'histoire montre que l'usage de la proportionnalité pour l'étude des fonctions a été un obstacle à l'arrivée de l'algèbre[15]. Les programmes actuels ne semblent pas avoir pris la mesure de cet obstacle. Ils ne permettent pas l'entrée progressive d'outils unificateurs qui, partant des connaissances sur les grandeurs permettraient une entrée progressive dans l'algèbre. Or nous considérons que l'algèbre doit apparaître aux yeux des élèves, et au moins dans une première approche, comme une connaissance sur les connaissances de l'arithmétique produites par un travail sur les grandeurs. Il n'est pas facile d'élaborer une organisation scolaire qui assume cette rupture épistémique, et c'est cette gêne qui apparaît de manière sournoise dans le manuel que nous avons analysé.

Programme de troisième :

Sous la rubrique "Travaux numériques" la prudence est toujours de mise mais ouvre la voie vers une algébrisation des pratiques des élèves : "*Pour le calcul littéral, un des objectifs à viser est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral reste simple à effectuer et où il présente du sens, que le professeur permettra au plus grand nombre de recourir spontanément à l'écriture algébrique lorsque celle-ci est pertinente.*"

Sous la rubrique "Organisation et gestion des données, fonctions", des objectifs nouveaux sont clairement explicités : "*L'un des objectifs est de faire émerger progressivement et sur des exemples très simples la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre un nombre à un autre nombre. .... L'utilisation des*

[15] Pour une explication on pourra consulter les points d'histoire de la thèse COMIN (2000).

expressions "est fonction de" ou "varie en fonction de", déjà amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et sera associée à l'introduction prudente de la notation f(x)."

La première partie de cette rubrique est libellée en termes de "fonctions linéaires", de "fonctions affines " et "d'expressions algébriques", ce qui est nouveau :

"Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image. Construire un tableau de valeurs d'une fonction linéaire.

Connaître la notation $x \mapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée".

Un pas décisif est franchi y compris pour les fonctions affines :

"Connaître la notation $x \mapsto ax + b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées."

Les programmes mettent l'accent sur la correspondance entre nombres et les notations qui l'accompagnent. Il est intéressant de comparer les commentaires sur les fonctions linéaires avec ceux sur les fonctions affines qui réfèrent tous deux à la proportionnalité :

"La définition d'une fonction linéaire, de coefficient a, s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence le fait que le processus de correspondance est "je multiplie par a"" (Remarquons que depuis l'école primaire les enseignants ont eu maintes fois l'occasion de le faire ...). *"Fonctions affine et linéaire associée* ; *La proportionnalité des accroissements est mise en évidence sur des exemples"*. Donc, dans tout le cycle du collège, la relation de référence pour l'étude des fonctions reste la proportionnalité et les seuls savoirs institutionnalisés dans le cadre numérique, sont ceux des fonctions linéaire et affine. Il est aussi intéressant de remarquer que dans la partie 2 de cette rubrique figure l'expression : *"identifier le cas où l'une des grandeurs est fonction affine de l'autre"* mais ne figure pas une expression analogue pour les fonctions linéaires comme "une des grandeurs est fonction linéaire de l'autre" probablement parce qu'il n'y a pas dans le cadre des grandeurs l'équivalent du mot "proportionnel" pour désigner une "relation affine". On retrouve ici un indice des difficultés de transposition évoquées précédemment : comment convertir des relations entre grandeurs en fonctions numériques ?

La question importante est la suivante : est-ce que les savoirs sur "fonctions linéaire et affine" suffisent à générer les concepts propres aux fonctions numériques ? Les quelques contre exemples de fonctions affines suggérés dans les commentaires *"... l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3, ..., des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines ..."* pour lesquels il est précisé *"... qu'aucune connaissance spécifique n'est exigible ..."* permettent-ils aux élèves de se faire une idée du concept général de fonction ? Il semble que les programmes de collège n'aient pas l'ambition de fournir aux élèves les moyens de remathématiser les situations avec les fonctions numériques.

Le manuel de troisième :

Le contenu d'un manuel est un indice de la place accordée par les enseignants à l'étude d'une notion. Dans les chapitres qui précèdent le chapitre "Proportionnalité et fonctions linéaires", les activités mettent en œuvre plusieurs relations fonctionnelles, en particulier linéaires, affines ou quadratiques parfois modélisées par des programmes de calcul et des formules mais les exercices se limitent à quelques calculs pour la recherche d'un petit nombre de grandeurs mesurées (deux ou trois). Les formules dont l'utilisation se limite à la résolution d'équations ou d'inéquations ne donnent pas l'occasion de faire fonctionner les relations numériques correspondantes avec un vocabulaire adapté. L'usage de l'expression "est fonction de" ne suffit pas à transformer une conception arithmétique de la formule en une conception algébrique au sens où nous l'avons défini. Certains exercices donnent la possibilité d'élaborer des tableaux numériques et des représentations graphiques pour des fonctions linéaires, affines ou quadratiques mais les auteurs ne s'autorisent pas à isoler la relation obtenue dans le cadre des grandeurs pour la généraliser au cadre numérique avant les deux chapitres consacrés à l'étude des fonctions linéaires et affines.

Enfin arrivent les chapitres "Proportionnalité et fonction linéaire" puis "Fonctions affines". Ces fonctions sont construites à partir d'assortiments de situations auxquelles sont associés tableaux numériques et formules. Le coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs devient le coefficient de la fonction linéaire associée définie en tant que relation numérique. La fonction affine est décomposée en deux fonctions numériques. Les formules sont clairement situées dans le cadre numérique (indépendamment des grandeurs). Il aura donc fallu attendre ces deux chapitres pour que s'organise le passage de la formule arithmétique à la formule algébrique et seulement pour les fonctions affines.

Conclusion de l'étude des programmes

Dans les programmes de seconde de 1999, il est proposé de présenter d'abord les savoirs sur variables et fonctions dans le cadre numérique puis de les illustrer avec les fonctions dites de référence. Or nous avons vu qu'en collège seules les fonctions linéaires et affines ont fait l'objet d'institutionnalisation. Par ailleurs, et à supposer que les différentes connaissances issues de l'ensemble des activités de collège permettent d'envisager l'institutionnalisation de savoirs généraux correspondant aux notions de variables et fonctions, cette institutionnalisation en seconde arriverait trop tardivement pour être effective. En effet, l'institutionnalisation ne se décrète pas, elle ne se limite pas à une déclaration publique de l'enseignant mais elle s'inscrit dans un processus complexe[16]. En particulier, nous savons que les savoirs qui ne sont pas institutionnalisés dans un délai "raisonnable" après les activités d'introduction sont perdus pour les élèves. C'est l'usage fréquent de l'objet institutionnel dans des situations variées qui lui donne une importance mathématique, et provoque chez les élèves une réorganisation (consciente ou non) de leur répertoire de connaissances pour lui faire une place qui le rend stable, pérenne et mobilisable dans des situations non didactiques, hors du contexte et de l'institution d'origine ou dans des situations didactiques d'une autre institution scolaire.

II.3. Connaissances des élèves

Pour avoir quelques indices sur la compréhension des élèves, sur leurs conceptions des notions de variable et de fonction à l'issue du collège, nous avons tenté d'évaluer leurs connaissances à l'aide d'un questionnaire élaboré à partir des analyses précédentes et des questions et conjectures suivantes.

[16] Une partie de la thèse de Comin (2000), a été consacrée à l'étude de ce processus.

II.3.1. Questions et conjectures pour l'enquête.

a) Questions :

Est-ce que les élèves savent :

1 Reconnaître une relation fonctionnelle dans une situation ?
2 Construire une courbe, un programme, un tableau, une formule pour modéliser une situation avec une fonction adaptée ?
3 Reconnaître dans un programme, un tableau, une formule ou une courbe la représentation d'une situation (réelle ou virtuelle) ?
4 Associer deux des cinq éléments : situation, formule, courbe, programme, tableau numérique ?
5 Faire correspondre images et antécédents avec un des quatre outils : programme, tableau numérique, formule, courbe ?
6 Etudier les variations pour rechercher un extremum ou un encadrement ?
7 Faire des calculs sur les fonctions à partir d'une des quatre représentations ?
8 Considérer une formule comme un élément d'un ensemble algébrique (variable entrant dans des calculs algébriques) ?
9 Prévoir avec des fonctions : des valeurs, des variations, des évolutions, ...?
10 Distinguer les fonctions performatives des fonctions des observations, le déterminisme de l'aléatoire ?

b) Conjectures

C1 : Les élèves qui n'ont pas acquis le concept de variable ne peuvent pas comprendre la notion de fonction. Réciproquement, l'idée de relation fonctionnelle engendre l'idée de variable.

C2 : Dans une relation fonctionnelle ($x \mapsto f(x)$), pour les élèves les antécédents sont choisis arbitrairement donc ils constituent une variable (x est libre) alors que les images ne constituent pas une variable puisqu'elles sont prédéterminées, dépendantes de leurs antécédents ($f(x)$ est liée).

C3 : Le mode de désignation des variables (lettres, mots, ...) influence les conceptions des élèves.

C4 : Certains élèves se placent dans le cadre arithmétique et conçoivent qu'une formule représente un programme ou un nombre (généralisé) alors que d'autres se placent dans le cadre algébrique et conçoivent qu'une formule représente une variable ou une fonction (variable-fonction).

C5 : La variation de la variation est difficile à percevoir. Les élèves ne conçoivent pas le taux de variation comme une variable, donc il leur est difficile de distinguer des variations (le linéaire du non linéaire).

C6 : La compréhension de la notion de fonction est influencée par la nature des variables (individus d'une population, grandeurs mesurées, variables numériques, ...) et par la nature de la fonction (fonction performative, fonction mesure, fonction des expériences, fonction des observations, ...).

C7 : Le terme "relation" qui a un aspect contingent, constatif, empirique, est de ce fait plus primitif que le terme "fonction" qui a un aspect constructif, pragmatique.

C8 : Certains élèves ont des difficultés à passer du cadre arithmétique au cadre algébrique.

II.3.2 Un questionnaire soumis à des élèves de seconde

Le questionnaire suivant[17], soumis aux élèves d'une classe de seconde durant l'année scolaire 2002-2003, a été proposé avant les chapitres qui traitent les fonctions. Les questions, codées dans la première colonne, sont accompagnées des fréquences de réponses calculées en pourcentages sur 34 élèves de cette classe[18].

Pour chacune des questions ou affirmations, cochez la case de votre choix.

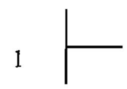
	Dans les questions suivantes, on s'intéresse à la pointure des chaussures et à la taille des élèves de classe. Peut-on considérer que :			
A1	L'élève est une variable.	OUI 12	NON 65	JE NE SAIS PAS 24
A2	La taille de l'élève est une variable.	OUI 85	NON 12	JE NE SAIS PAS 3
A3	La pointure est une variable.	OUI 85	NON 9	JE NE SAIS PAS 6
A4	La pointure est fonction de l'élève.	OUI 35	NON 53	JE NE SAIS PAS 12
A5	La pointure dépend de l'élève.	OUI 76	NON 18	JE NE SAIS PAS 6
A6	La pointure est déterminée par la taille de l'élève.	OUI 21	NON 76	JE NE SAIS PAS 3
A7	La pointure est fonction de la taille de l'élève.	OUI 41	NON 56	JE NE SAIS PAS 3

On considère le tableau de valeurs numériques ci-contre :

Ligne A	0,4	-5	4,6	-1,7	2,2	-4,4
Ligne B	-3,9	4,3	3,1	-3,3	-2,4	2,5

T1	Les nombres qui figurent dans la ligne A déterminent une variable :	VRAI 50	FAUX 21	JE NE SAIS PAS 29
T2	La correspondance qui à chaque nombre de la ligne A associe le nombre de la ligne B situé dans la même colonne est une fonction :	VRAI 44	FAUX 24	JE NE SAIS PAS 32

Dans la division euclidienne ci-contre :
31 est le dividende ; 4 est le diviseur ;
7 est le quotient ; 3 est le reste.

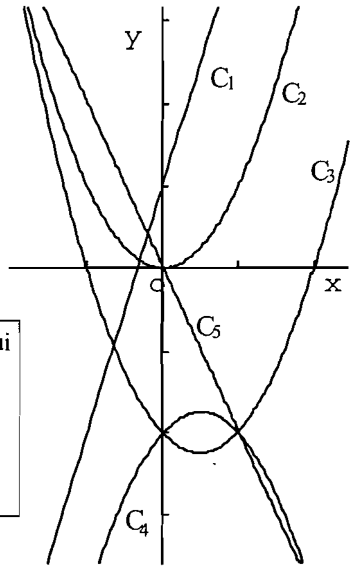


	Dans les questions suivantes on considère des divisions euclidiennes où le diviseur est 4 :			
B1	Il y a quatre restes possibles.	VRAI 18	FAUX 68	JE NE SAIS PAS 15
B2	Le reste est une variable.	VRAI 53	FAUX 18	JE NE SAIS PAS 29
B3	Le dividende est une variable.	VRAI 44	FAUX 21	JE NE SAIS PAS 35
B4	Le reste dépend du dividende.	VRAI 85	FAUX 15	JE NE SAIS PAS 0
B5	Le reste est fonction du dividende.	VRAI 68	FAUX 21	JE NE SAIS PAS 12
	Dans les questions suivantes on note D le dividende, d le diviseur, q le quotient, r le reste			
C1	Les lettres D, d, q, r représentent des nombres.	VRAI 91	FAUX 9	JE NE SAIS PAS 0
C2	Les lettres D, d, q, r représentent des variables.	VRAI 47	FAUX 26	JE NE SAIS PAS 26
	L'égalité $D = d \times q + r$:			
C3	exprime une relation entre D, d, q et r.	VRAI 82	FAUX 18	JE NE SAIS PAS 0
C4	exprime que D est fonction de d, q, r.	VRAI 65	FAUX 21	JE NE SAIS PAS 15
	Dans les questions suivantes r = 0 et d = 4 :			
	L'égalité $D = 4 \times q$			
D1	exprime que D est fonction de q.	VRAI 65	FAUX 26	JE NE SAIS PAS 9
D2	exprime que D est proportionnelle à q.	VRAI 50	FAUX 32	JE NE SAIS PAS 18

[17] Il a été construit pour être en relation avec les questions et conjectures précédentes.
[18] Nous avons choisi de présenter les fréquences sous forme de pourcentages malgré le faible effectif de la population questionnée car les pourcentages sont plus intelligibles que les fractions non décimales.

	On considère l'expression suivante : $\frac{1}{3}x^2-4$.			
E1	Dans cette expression "x" désigne une variable.	VRAI 53	FAUX 26	JE NE SAIS PAS 21
E2	Dans cette expression "x" désigne un nombre.	VRAI 74	FAUX 15	JE NE SAIS PAS 12
E3	" $\frac{1}{3}x^2-4$ " désigne une variable.	VRAI 41	FAUX 24	JE NE SAIS PAS 35
E4	" $\frac{1}{3}x^2-4$ " désigne un nombre.	VRAI 56	FAUX 32	JE NE SAIS PAS 12
E5	" $\frac{1}{3}x^2-4$ " définit une fonction.	VRAI 76	FAUX 12	JE NE SAIS PAS 12
E6	" $\frac{1}{3}x^2-4$ " est l'image de x par une fonction.	VRAI 38	FAUX 26	JE NE SAIS PAS 35

	Parmi les représentations graphiques ci-contre, déterminer celle qui correspond à chacune des fonctions suivantes :										
Ffi	$f(x)=3x+1$	C_1	68	C_2	6	C_3	15	C_4	6	C_5	9
Fgi	$g(x)=x^2$	C_1	9	C_2	62	C_3	12	C_4	0	C_5	9
Fhi	$h(x)=-2x$	C_1	6	C_2	3	C_3	18	C_4	18	C_5	50



	Parmi les représentations graphiques ci-contre, déterminer celle qui correspond à chacune des fonctions suivantes :										
Ffi	$f(x)=3x+1$	C_1	68	C_2	6	C_3	15	C_4	6	C_5	9
Fgi	$g(x)=x^2$	C_1	9	C_2	62	C_3	12	C_4	0	C_5	9
Fhi	$h(x)=-2x$	C_1	6	C_2	3	C_3	18	C_4	18	C_5	50

Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des deux programmes ci-dessous :

$$f_1(x)=2x+3\ ;\ f_2(x)=2(x+3)\ ;\ f_3(x)=\frac{x+3}{2}\ ;\ f_4(x)=\frac{x}{2}+3.$$

PAi	Ajouter 3 puis prendre la moitié.	f_1 6	f_2 6	f_3 76	f_4 21
PDi	Doubler puis ajouter 3.	f_1 85	f_2 18	f_3 3	f_4 3

Une personne veut louer une voiture. Elle a le choix entre trois contrats :
Au contrat A : la personne paie un forfait de 80 € et 0,12 € par kilomètre parcouru.
Au contrat B : la personne paie un forfait de 60 € et 0,15 € par kilomètre parcouru.
Au contrat C : la personne paie un forfait de 150 €.
Choisir parmi les fonctions suivantes celle qui modélise chacun des contrats A, B, C :

$f_1(x) = 150x$; $f_2(x) = 60 + 0{,}15x$; $f_3(x) = 80x + 0{,}12$;

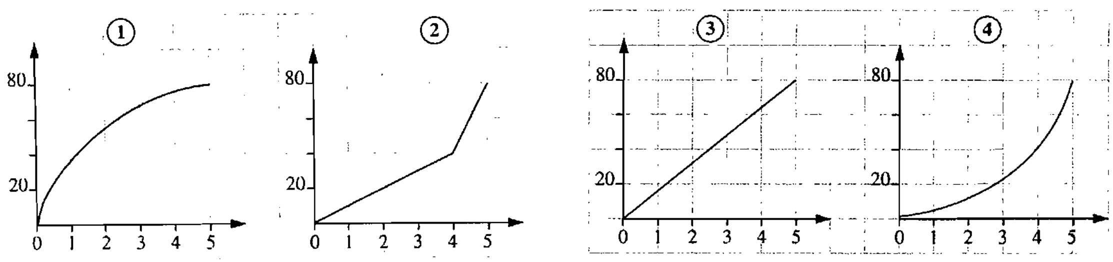
$f_4(x) = 80{,}12x$; $f_5(x) = 80 + 0{,}12x$; $f_6(x) = 150$.

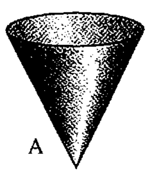
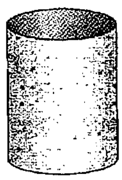
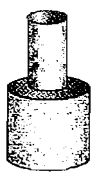
QAi	Contrat A :	f_1 0	f_2 3	f_3 3	f_4 3	f_5 97	f_6 0
QBi	Contrat B :	f_1 0	f_2 97	f_3 0	f_4 0	f_5 3	f_6 0
QCi	Contrat C :	f_1 9	f_2 0	f_3 0	f_4 0	f_5 0	f_6 94

Les trois récipients ci-contre ont :
- la même hauteur : 80 cm,
- la même capacité : 100 litres.

On les remplit successivement, en utilisant un robinet à débit constant de 20 litres par minute.

Pour chacun des récipients, la hauteur de l'eau dans le récipient est représentée en fonction du temps écoulé depuis le début du remplissage, en minutes.
Retrouver, parmi les graphiques ci-dessous, la courbe correspondant à chaque récipient :



RAi	RBi	RCi
		
Courbe 1 79 Courbe 2 0 Courbe 3 3 Courbe 4 21	Courbe 1 3 Courbe 2 0 Courbe 3 97 Courbe 4 0	Courbe 1 6 Courbe 2 85 Courbe 3 0 Courbe 4 12

II.3.3 Analyses des résultats (statistiques et analyses de données)

L'étude des connaissances des élèves peut présenter différentes formes de traitement. Les réponses de quelques élèves à un questionnaire permettent seulement de mettre en évidence quelques indices sur leurs conceptions. Nous accompagnons les résultats statistiques de commentaires. Les quelques associations de questions qui résultent d'analyses de corrélations ou d'implications n'apportent que peu d'indications supplémentaires et sont d'une portée limitée compte tenu de l'échantillonnage très localisé et limité à 34 élèves.

a) Variables

Nous avions envisagé plusieurs catégories de variables. Il est clair que les élèves interrogés nomment plus fréquemment "variable" :

- une grandeur mesurée (A2 : 85% et A3 : 85%)
- qu'une variable numérique, qu'elle soit désignée par un mot (B2 : 53% et B3 : 44%), par une lettre (C2 : 47% et E1 : 53%), par une famille de nombres (T1 : 50%), par une expression algébrique ou formule (E3 : 41%)
- ou que l'élément générique d'un ensemble non numérique (individu d'une population) (A1 : 12%).

Les élèves semblent plus influencés par la nature des variables (grandeurs, variables numériques, ...) que par leur mode de désignation (lettre, mot, ...) ; ce qui va à l'encontre de la conjecture C3. Pour les élèves une lettre ou une formule peuvent désigner un nombre ou une variable ou les deux simultanément mais au moins un des deux (à une exception près).

85% des élèves interrogés reconnaissent que le reste dépend du dividende (B4) mais seulement 44% disent que le dividende est une variable (B3) et 53% disent que le reste est une variable (B2). Ces fréquences semblent contredire la conjecture C2 : une variable libre n'est pas mieux reconnue par les élèves qu'une variable liée.

b) Nombres

Pour les élèves interrogés, les lettres représentent plus fréquemment des nombres (C1 : 91% et E2 : 74%) que des variables (C2 : 47% ; E1 : 53%). Une formule est plus fréquemment perçue comme un nombre (E4 : 56%) que comme une variable (E3 : 41%) ; ce qui tend à valider les conjectures C4 et C8 avec une majorité d'élèves qui se situent dans le cadre arithmétique.

c) Fonctions

Par ordre décroissant de fréquences, les élèves interrogés reconnaissent une fonction :

- dans une relation numérique explicitée par une formule (E5 : 76% ; C4 : 65% ; D1 : 65%)
- dans une relation numérique explicitée par une opération arithmétique (B5 : 68%)
- dans une correspondance entre nombres définie terme à terme (T1 : 50%)
- dans un caractère des individus d'une population (A4 : 35%)

Pour ces élèves, une fonction est prioritairement une relation entre nombres qui décrit une fonction performative, ce qui valide la conjecture C6. Nous avons utilisé quatre expressions : "est fonction de", "est déterminé par", "dépend de", "exprime une relation" :

- les trois quarts des élèves connaissent le sens de l'expression "est déterminé par " (A6 : 76%). C'est plus ambigu pour l'expression "est fonction de" (A7 : 41%).
- Il semble que le mot "relation" (C3 : 82%) soit mieux connu que le mot "fonction" (C4 : 65%). Ces résultats semblent aller dans le sens de la conjecture C7.
- De même l'expression "dépend de" (A5 : 76% et B4 : 85%) semble mieux connue que le mot "fonction" (A4 : 35% ; B5 : 68%). Remarquons que le verbe "dépendre" est plus général et couvre un champ de situations plus vaste que l'expression "est fonction de" (il y a des dépendances corrélatives qui ne sont pas fonctionnelles). Ceci peu expliquer ces différences de fréquences. Néanmoins, tous les élèves ou presque tous, selon les cas, optent pour au moins une des deux formulations proposées : "est fonction de" ou "dépend de", (ou les deux à la fois). Mais l'analyse implicative ne fait pas apparaître d'implication entre ces caractères ; l'usage du mot "fonction" n'est pas assujetti à l'usage d'une autre formulation telle que "dépend de" ou "exprime une relation"
- La dépendance qui résulte d'une fonction "performative" (B4 : 85%) semble mieux reconnue que la dépendance liée au caractère d'un individu (fonction des observations) (A5 : 76%) ce qui renforce la conjecture C6.

Remarquons que l'analyse des corrélations ne fait pas apparaître de corrélations significatives entre les caractères E5 ("$\frac{1}{3}x^2-4$" définit une fonction) et E6 ("$\frac{1}{3}x^2-4$" est l'image de x par une fonction). 76% des élèves acceptent la première formulation contre 38% pour la seconde. Cette dernière formulation n'est pas un objectif du collège, ce qui peut expliquer cet écart de fréquences.

d) Variables et fonctions

La relation $D=d\times q+r$ est plus souvent perçue comme une formule arithmétique (C1 : 91% ; C3 : 82%) que comme une formule algébrique (C2 : 47% ; C4 : 65%). Ce résultat semble indiquer qu'une majorité d'élèves se situent dans le cadre arithmétique et conforte la conjecture C8.

Dans l'égalité $D=4\times q$, les élèves reconnaissent plus fréquemment une fonction (D1 : 65%) qu'une relation de proportionnalité (D2 : 50%). Ceci semble contredire le résultat précédent mais rappelons que la fonction linéaire a été institutionnalisée en collège. Bien que la notion de proportionnalité soit antérieure à celle de fonction linéaire, l'écriture de cette relation avec une égalité et des lettres peut placer les élèves dans un cadre algébrique et influencer leur réponse. Il semble donc que le savoir reste attaché aux ostensifs qui ont accompagné son institutionnalisation. La "décontextualisation" ne suffit pas à établir les liens entre les différents savoirs ; il faudrait aussi "décadrer" et "déformaliser" pour que les élèves repèrent les invariants communs à différents modèles indépendamment du cadre et du registre.

Remarquons qu'il y a autant d'élèves qui reconnaissent une fonction de 3 variables (C4 : 65%) qu'une fonction d'une variable (D1 : 65%). Est-il judicieux de se limiter à l'étude d'une fonction réelle de la variable réelle en lycée ?

e) Recherche d'associations de questions

Ces analyses complémentaires concernent les conjectures C1, C4, C6, C8 et tentent de vérifier si les élèves établissent un lien entre les notions de variables et de fonctions, et si les cadres arithmétique et algébrique influent sur leurs conceptions.

Les corrélations significatives au seuil de 5% entre les caractères E1 et E3 ainsi qu'entre E3 et E6 semblent conforter la conjecture C4 ; ces trois caractères réfèrent au cadre algébrique et sont autant d'indices d'une conception algébrique de la formule. D'autre part, E2 et E4 sont corrélés, or ces deux caractères réfèrent au cadre arithmétique et sont des indices d'une conception arithmétique de la formule.

- E32⇒E62⇒E41. Les élèves qui n'admettent pas que la formule "$\frac{1}{3}x^2-4$" désigne une variable n'admettent pas non plus que "$\frac{1}{3}x^2-4$" puisse être l'image de la variable x par une fonction et pour ces mêmes élèves "$\frac{1}{3}x^2-4$" désigne un nombre.
- Notons aussi que E12 ⇒E21 : Les élèves qui disent que dans "$\frac{1}{3}x^2-4$" , x ne désigne pas une variable disent que x désigne un nombre. Ces résultats semblent conforter la conjecture C4.
- E31⇒D21
  ⇓
  C41
  Les élèves qui admettent qu'une formule peut désigner une variable reconnaissent une relation de proportionnalité ou une fonction entre variables représentées par des lettres.
- B31⇒C21⇒B41
  ⇑
  La reconnaissance de la notion de variable quelle que soit sa représentation (lettre, mot, liste) implique la reconnaissance d'une dépendance entre variables.

Ces quelques résultats très fragmentaires, tendent à valider la conjecture C1 : les notions de variable et de fonction s'étayent mutuellement : pour certains élèves, la reconnaissance de certaines variables est assujettie à la reconnaissance de certaines relations fonctionnelles.

- A61⇒A12 ; A71⇒A42. Les élèves qui disent que la pointure est déterminée par la taille de l'élève (bien que ce soit faux) disent que l'élève ne peut pas être une variable.
  Les élèves qui disent que la pointure est fonction de la taille de l'élève (bien que ce soit faux) disent que la pointure n'est pas fonction de l'élève.

Pour certains élèves, il semble qu'une grandeur mesurée ne puisse être déterminée que par une autre variable numérique et non par un individu car un individu n'est pas une variable, ce qui abonderait dans le sens de la conjecture C6.

Finalement, plusieurs résultats suggèrent que certains élèves se cantonnent au calcul numérique alors que d'autres sont passés au calcul littéral et à une notion plus générale de variable et de fonction et accréditent ainsi la conjecture C8.

f) Représentation des fonctions

Il semble que les élèves font mieux le lien entre situation et formule (QA5 : 97% ; QB2 : 97% ; QC6 : 94%) ou situation et courbe (RA1 : 79% ; RB3 : 97% ; RC2 : 85%) qu'entre courbe et formule (Ff1 : 68% ; Fg2 : 62% ; Fh5 : 50%) ou programme et formule (PA3 : 76% ; PD1 : 85%). Autrement dit, il est plus facile pour les élèves, de représenter une situation que d'établir un lien entre deux modèles représentant une même situation.

Les réponses aux questions du tableau R semblent valider la conjecture C5 : certains élèves ne voient pas les variations de variations. 18% des élèves ne repèrent pas la linéarité physique et le changement brusque du coefficient de linéarité (RC). 21% des élèves choisissent la courbe 4 au lieu de la courbe 1 pour le remplissage du cône (RA).

On peut remarquer aussi quelques bizarreries :

Au tableau F : seulement la moitié des élèves reconnaissent la représentation graphique d'une fonction linéaire alors que c'est en quatrième que les programmes prévoient la caractérisation d'une fonction linéaire par une droite qui passe par l'origine du repère.

Au tableau P : un pourcentage non négligeable d'élèves inversent l'ordre des opérations dans l'écriture de la formule.

g) Conclusion

On ne peut pas tirer de conclusions fermes et définitives d'un questionnaire soumis à quelques élèves de seconde mais les résultats précédents renforcent les conjectures et hypothèses posées a priori. En particulier, il semble que les notions de variable et de fonction s'étayent mutuellement mais que ces concepts ne soient pas reconnus et institués dans le cadre algébrique pour au moins un quart des élèves interrogés. Un nombre important d'entre eux se confinent au cadre arithmétique sur certaines questions alors que d'autres sont "passés à l'algèbre" ; le repérage de conceptions arithmétique et algébrique pourrait en témoigner en poussant plus avant les investigations dans ce sens. Les réponses obtenues confortent au moins partiellement l'hypothèse initiale qui a motivé cette recherche, à savoir qu'une partie importante de ces élèves de seconde ne sont pas prêts à recevoir un enseignement formel du concept de fonction.

III . Perspectives curriculaires

Les différents éléments réunis et développés dans les parties précédentes nous permettent de tracer les grandes lignes d'un projet curriculaire qui pourrait être un instrument pour faire évoluer certaines bases de l'enseignement des fonctions au collège et au lycée.

Nous souhaitons construire les différents sens de la notion de fonction en trois temps :

- En premier lieu, les fonctions performatives seront abstraites de phénomènes physiques, logiques ou sociaux.

- Puis les opérations sur les fonctions permettront de construire une structure algébrique qui génère d'autres fonctions.
- Enfin ces connaissances et savoirs seront utilisés pour mettre en œuvre d'autres types de fonctions, pour décrire les statistiques, pour définir les mesures et en particulier les probabilités.

III.1. Les fonctions du primaire au lycée

Les idées de variable et de fonction ne peuvent pas apparaître pertinentes sur quelques situations. Elles prennent la forme de contenus qui évoluent de l'enseignement primaire à l'enseignement supérieur. Le but est de les faire apparaître à long terme comme des objets "algébriques". L'étude de la relation de proportionnalité commence à l'école primaire[19], et se poursuit dans toute la scolarité avec l'étude des fonctions linéaires. Elle est à l'origine d'une genèse artificielle de la notion de fonction qui prend du sens dans l'étude des grandeurs avant de s'abstraire du monde sensible pour s'insérer dans des organisations mathématiques plus générales. Mais l'abstraction de quelques modèles numériques de milieux matériels divers ne peut pas rendre compte des possibilités algébriques que présentent les fonctions dans ces organisations mathématiques.

Pour accompagner le passage d'une conception arithmétique à une conception algébrique, il nous semble raisonnable de s'appuyer sur un assortiment[20] de fonctions qui puisse servir de système générateur avec les opérations algébriques usuelles sur les formules (addition, multiplication, substitution) et les transformations géométriques correspondantes sur les représentations graphiques. Chaque nouvelle fonction ainsi construite pourrait apparaître comme le modèle d'une situation potentielle, son étude théorique serait alors justifiée aux yeux des élèves par la mise au point d'un moyen d'étudier et de traiter des phénomènes qui relèvent d'une problématique fonctionnelle.

L'ordre d'apparition des différents objets de connaissance dans un processus d'apprentissage est dicté en général par leur complexité mathématique croissante ; ils peuvent être déclinés en termes d'action pour des élèves en situation a-didactique. Nous en proposons quelques exemples pour les notions de variable puis de fonction.

<u>Variables</u>

- Comparer, ordonner, additionner plusieurs éléments d'une même grandeur.
- Proposer des grandeurs mesurées répondant aux contraintes matérielles d'une situation.
- Proposer des mesures virtuelles ou des nombres pour faire fonctionner le modèle de référence d'une situation.
- Evaluer qualitativement ou quantitativement l'effet de la variation d'une grandeur ou d'une variable numérique sur une autre grandeur ou variable numérique.

---

[19] Cette étude fait suite et prolonge un travail d'ingénierie commencé en primaire dans le cadre d'une thèse, Comin (2000), et qui a fait l'objet d'un article dans N : "Des graines et des souris" (2003).

[20] La notion d'assortiment a été développée par Florence Genestoux. Il s'agit d'une collection d'objets organisée à des fins didactiques. Pour plus de précision, on pourra consulter Genestoux (2000).

Fonctions

- Considérer plusieurs couples de grandeurs mesurées donnés avec l'intention didactique de faire découvrir une relation fonctionnelle.
- Rechercher un couple de grandeurs mesurées répondant à des contraintes matérielles dans une relation entre grandeurs.
- Proposer des couples de valeurs hypothétiques (possibles ou imaginaires) faisant fonctionner le modèle de référence du phénomène étudié.
- Modéliser une situation par une fonction à l'aide d'une de ses représentations.
- Construire des fonctions avec des opérations sur les fonctions de références (addition, multiplication, composition, inversion).
- Utiliser les caractéristiques d'une fonction comme outils d'analyse d'un phénomène réel ou potentiel.
- Manipuler une formule en tant qu'élément d'une structure algébrique.

Nombres

Les nombres accompagnent cette étude et s'enrichissent de l'étude des rapports, de leur comparaison, de l'étude des fonctions, de la résolution d'équations, ..., ce qui permet de distinguer différents ensembles de nombres.

III.2. La fonction au collège (de la procédure pour agir à la formule pour résumer)

III.2.1. Objectifs

Un des objectifs consiste à passer des relations de proportionnalité entre grandeurs qui sont spécifiques à l'enseignement primaire, aux relations numériques. Les fonctions affines et quadratiques justifient le passage à l'algèbre car les problèmes qui relèvent de ce type de fonctions ne peuvent pas être résolus par l'emploi d'une proportionnalité simple (la seule complexité de la fausse supposition double justifie le passage à l'algèbre)[21].

La fonction sera définie par un programme de calcul (écrit dans le langage vernaculaire puis avec des signes) puis résumé par une formule arithmétique (écrite avec des lettres). Ce programme puis cette formule devront apparaître comme des systèmes simplificateurs : pour agir (résoudre, communiquer, valider) puis pour résumer une situation. Le passage à la formule algébrique devrait permettre de modéliser une classe de situations comme, par exemple, "la fonction linéaire" renvoie aux différentes situations de proportionnalité.

III.2.2. Situations

Dans un premier temps, on souhaite que les élèves trouvent dans le programme puis la formule un moyen économique pour agir, communiquer, valider au sein d'une situation didactique. Le programme ou la formule, qui résultent d'une abstraction d'une correspondance entre grandeurs mesurées, permettent de décrire des états (tableau de

[21] Pour une étude de l'articulation arithmétique algèbre dans la résolution de problèmes on pourra consulter Broin (2002).

valeurs) mais aussi de prévoir des relations entre quantités effectives du milieu matériel puis fictives (éléments du graphe de la fonction) pour faire fonctionner le modèle. Les élèves ancrent les formules algébriques dans le langage et les raisonnements connus de l'arithmétique. L'algèbre doit apparaître comme une connaissance sur les connaissances d'arithmétique mais aussi comme un moyen résolutoire plus simple et plus efficace que les techniques anciennes de l'arithmétique.

Dans un deuxième temps, les formules devront discriminer des situations. On pourra proposer aux élèves des situations qui relèvent de fonctions linéaires, affines, quadratiques, inverses, puis leur soumettre des assortiments de problèmes pour les conduire progressivement à discriminer des classes de situations et donc des types de fonctions.

Lien avec les équations :
Les équations apparaissent comme des formulations pour :

- La recherche d'un antécédent par réversibilité des opérations ; dans $2x+3=7$, le signe = est interprété comme en arithmétique : $2x+3$ donne 7.
- La recherche des nombres qui ont la même image par deux fonctions ; dans $2x+3 = 5x-4$ on cherche le ou les nombres qui ont la même image par les deux fonctions affines.

III.3 La fonction au lycée (de la formule pour modéliser à l'élément d'une structure pour construire)

III.3.1 Objectifs

La formule algébrique doit maintenant résumer une classe de situations réelles ou fictives.

L'étude d'une fonction particulière doit évoquer l'étude de l'évolution du phénomène supposé en vue de faire des prévisions ; c'est ce qui justifie l'étude des variations de la fonction (variable-fonction).

La représentation graphique permet de visualiser ces variations et donc de conjecturer l'évolution possible du phénomène qu'elle est sensée représenter. Elle facilite une approche qualitative mais aussi quantitative des variations en permettant d'entrevoir la vitesse de l'évolution. La quantification des variations est l'angle d'attaque du concept de dérivée.[22]

Le but de l'observation ou de l'expérience est de détecter une possible modélisation du phénomène étudié par une fonction performative ou par une loi de probabilité connue.

III.3.2 Situations

La présentation actuelle de "l'herbier des fonctions" en seconde s'apparente à une description d'une collection amorphe d'objets juxtaposés car elle ne s'inscrit pas dans une dynamique structurante. Nous souhaitons amener les élèves à considérer les fonctions dites de référence comme un système générateur de fonctions avec les

[22] On retrouve, dans l'étude des variations, l'aspect qualitatif de la variable que la formule algébrique tend à occulter.

opérations algébriques usuelles (addition, multiplication, inversion, composition). Ce système générateur est constitué des fonctions étudiées au collège mais aussi de nouvelles fonctions. Or nous savons que l'institutionnalisation d'un savoir s'accompagne de connaissances propres à l'institution d'origine qui peuvent faire obstacle à sa pérennisation. Il semble donc souhaitable de commencer l'enseignement des fonctions en seconde par quelques situations pour instituer les connaissances anciennes et construire des savoirs nouveaux sur les fonctions de références. Il s'agit ensuite de trouver des raisons autres que structurelles de construire formellement des fonctions.

On peut proposer quelques situations modélisables par une fonction déjà composée de fonctions élémentaires[23] et conduire les élèves à déterminer la structure algébrique de la formule correspondante ; mais la recherche systématique de telles situations est impossible. La proposition d'un assortiment de fonctions et d'un assortiment de situations à mettre en relation, permet d'induire un travail réflexif chez les élèves et d'asseoir l'idée que chacune des fonctions construites formellement mérite une étude particulière car elle peut modéliser un phénomène réel connu ou à découvrir. La recherche d'images et d'antécédents se trouve ainsi justifiée aux yeux des élèves et donne du sens à la résolution d'équations ou d'inéquations. De même, la recherche d'extremums ou d'encadrements peut justifier l'étude des variations et préparer l'introduction de la dérivée.

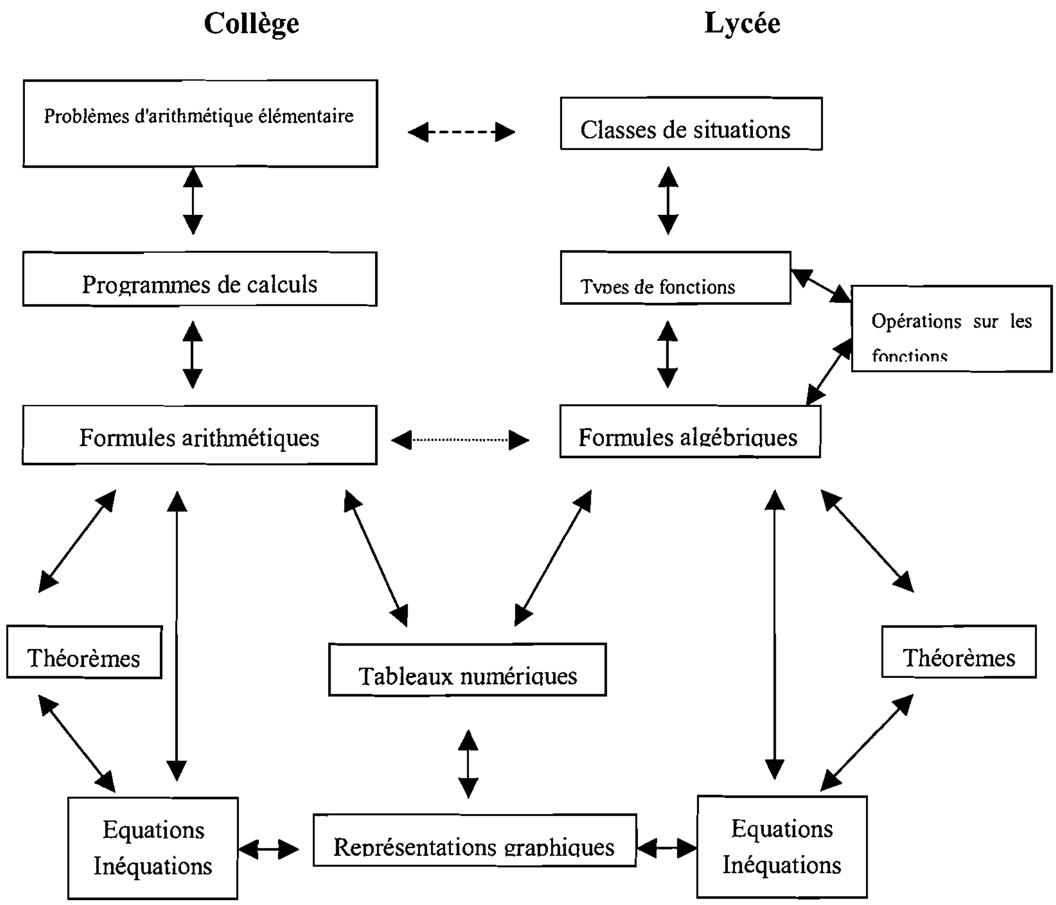
Les fonctions non algébriques nécessiteront des situations spécifiques (résolution d'équations différentielles, recherche de morphismes particuliers, ...).

III.4. Organigramme pour le collège et le lycée

Le schéma qui suit à pour objet de résumer les activités mathématiques à mettre en œuvre plutôt au collège (colonne de gauche) ou plutôt au lycée (colonne de droite). Le basculement d'une conception arithmétique à une conception algébrique de la notion de fonction se concrétise dans l'interprétation de la formule qui passe du statut de représentant d'une grandeur à celui de représentant d'une fonction avant de devenir l'élément d'une structure algébrique. L'introduction d'un milieu graphique permet alors une initiation aux structures algébriques : sommes et produits de fonctions, fonctions inverses. Ce cadre permet également un travail sur les propriétés des fonctions liées à l'ordre et à la continuité : croissance, majorations, asymptotes et exemples de fonctions discontinues...

Ce travail graphique, s'il ne peut être mené à son terme qu'en classe de Première, peut néanmoins être initié en Seconde où il contribue à renforcer la vision des fonctions comme objets (point de vue qualitatif). De plus, il fournit un cadre d'entraînement pour la recherche d'images et d'antécédents (cf. Bloch, 2002).

[23] On peut trouver des exemples dans Berté (1996).



IV Conclusion

Le passage du cadre arithmétique au cadre algébrique correspond à un changement sémantique et conceptuel qui se cristallise, pour l'étude des fonctions, dans le changement de statut de la formule. La construction d'une formulation algébrique des fonctions développe un sens nouveau des mathématiques chez les élèves qui devrait englober et reprendre les connaissances de l'arithmétique élémentaire. Or seuls les exemples traités au travers de situations didactiques dans le cadre arithmétique puis algébrique fournissent aux élèves les outils transactionnels entre ces deux approches. Actuellement, cette double étude n'est effective que pour les fonctions linéaires et affines au collège. L'étude précédente ouvre des perspectives pour faciliter ce changement de statut et faire évoluer de manière significative les instruments mis à la disposition des enseignants et notamment à travers l'articulation des deux cycles de l'enseignement secondaire : collège et lycée.

Références bibliographiques

BERTE Annie. 1996. *Mathématiques du collège au lycée.* Nathan pédagogie.

BLOCH Isabelle (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université ; savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation.* Université de Bordeaux 1.

BLOCH Isabelle (2002) Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction. *Petit x* **58**, 5-28.

BROIN Dominique. (2002). *Arithmétique et algèbre élémentaires scolaires.* Université de Bordeaux I.

COMBIER Gérard, GUILLAUME Jean Claude, PRESSIAT André (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège.* INRP.

COMIN Eugène. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Bordeaux : Université de Bordeaux I.

COMIN Eugène. (2003). Des graines et des souris. Grand N **72**.

DE COTRET Sophie René. (1985). *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Université du Québec.

DIGNEAU Jean-Marie. (1989). *Une étude des connaissances sur les nombres à l'entrée de la seconde.* IREM de Bordeaux, Université de Bordeaux I.

ESMENJAUD-GENESTOUX Florence. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires.* Université de Bordeaux I.

VLASSIS Joëlle, DEMONTY Isabelle. (2002). *L'algèbre par des situations problèmes au début du secondaire.* De Boeck.