CONNAITRE ET RECONNAITRE LES THEOREMES DE LA GEOMETRIE

Sylvia GOUSSEAU COUTAT
Equipe IAM
Université Joseph Fourier Grenoble

Résumé : Cet article présente une expérimentation faite dans une classe de 4$^{\text{ième}}$ dont l'objectif est d'aider les élèves à entrer dans le processus de preuve en géométrie. A cette fin est mis en place un processus de médiation sémiotique visant à introduire la distinction entre hypothèse et conclusion et à contribuer ainsi à la reconnaissance du statut opératoire des énoncés.

Introduction

La preuve en mathématiques est un des points les plus délicats de l'enseignement, aussi bien pour les professeurs que pour les élèves. Certains manuels scolaires utilisent l'activité de preuve dans les exercices, mais ne la présentent pas. Dans d'autres manuels, cette activité est enseignée, cependant dans un cadre restreint qui ne laisse pas de place à l'enjeu de vérité, caractéristique première de la preuve pour le mathématicien. De plus, au niveau du collège, la preuve subit un changement de contrat ce qui entraîne une difficulté supplémentaire pour les élèves : d'une preuve le plus souvent pragmatique, elle doit devenir une démonstration[1] théorique.

Cette étude est centrée sur la preuve mathématique en tant que démonstration fondée sur le raisonnement déductif particulièrement étudié par Duval. Une perspective vygotskienne a été adoptée pour la conception de la mini ingénierie didactique organisée avec l'intention de permettre une meilleure compréhension, par les élèves, du statut opératoire d'un énoncé.

Une première partie de cet article expose le cadre théorique utilisé pour l'expérimentation ainsi que la problématique et les questions qui ont découlé de ce cadre. Une deuxième partie présente l'expérimentation avec l'analyse des productions de deux élèves. Enfin une dernière partie propose un retour sur les attentes initiales pour conclure sur les perspectives que ce travail pourrait entraîner

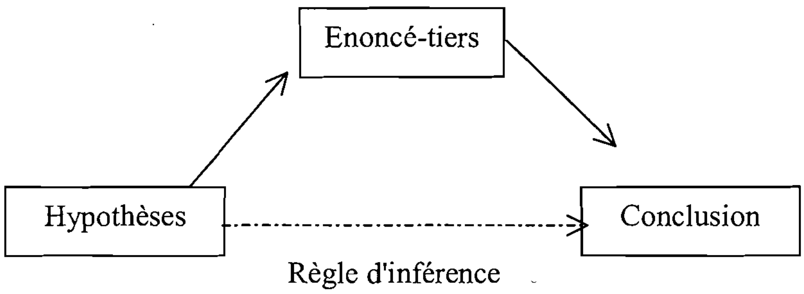
I. Cadre théorique et hypothèses

I.1. Cadre théorique :

I.1.1. L'apprentissage de la démonstration

L'apprentissage de la démonstration en géométrie commence à l'école primaire. Cette preuve, reposant sur le dessin, est appelée *preuve pragmatique*[1]. Elle est perceptive et instrumentée. Les élèves utilisent leur construction pour répondre aux questions qui leur sont posées, le dessin et les instruments sont les uniques supports à la résolution des problèmes de géométrie. Ensuite, s'installe au niveau du collège, un changement de contrat relatif à la démonstration. Ce changement de contrat progressif commence en $6^{\text{ième}}$ et doit être installé en $4^{\text{ième}}$. Au cours de ces deux années, la preuve se transforme et devient une *preuve intellectuelle*[1]. La démonstration fait appel à des éléments théoriques (propriétés, définitions, théorèmes ...). Pourtant, à ce niveau, l'enseignement de la démonstration se rapproche plus de l'acquisition d'un algorithme de résolution que d'un raisonnement permettant la validation d'une conjecture. Ce changement de contrat est laborieux et les élèves rencontrent nombre de difficultés dans l'apprentissage de cette nouvelle démonstration reposant en fait sur un raisonnement déductif.

Ce raisonnement s'organise en une succession de pas de démonstration. Suivant l'analyse de Duval (1993), un pas de démonstration est constitué de trois éléments. Ces éléments reposent sur le *statut opératoire* des énoncés, on distingue trois statuts opératoires :hypothèse, énoncé tiers et conclusion. Les données du problème correspondent à l'énoncé qui a le statut d'hypothèse. La réponse cherchée correspond à l'énoncé qui a le statut de conclusion. L'énoncé tiers est la propriété qui permet de relier ces deux énoncés. Les hypothèses de l'énoncé tiers correspondent à l'énoncé qui a le statut d'hypothèse, la conclusion correspond à l'énoncé qui a le statut de conclusion.



Un pas de déduction repose donc sur un fonctionnement ternaire. On attend des élèves qu'ils associent les données du problème aux hypothèses (prémisses ou conditions) d'un énoncé tiers dont la conclusion correspond à la conclusion cherchée. Cette triple perception est difficile à acquérir pour les élèves, leurs connaissances des énoncés étant assez particulières. Les élèves considèrent souvent une proposition indépendamment de sa structure, un peu comme un ensemble de mots sans tenir compte de l'ordre des mots dans la proposition. Pourtant deux propositions contenant les mêmes mots, mais dans un ordre différent, seront différentes du point du vue de la déduction. Cela est particulièrement visible pour un théorème et sa réciproque. Les deux énoncés

---

[1] N. Balacheff 1987-1988

contiennent les mêmes groupes de mots, cependant ces groupes sont inversés : dans la réciproque, les hypothèses deviennent conclusions et les conclusions hypothèses. Cela n'est pas un effet de style mais une organisation qui suit un schéma bien défini. Un élève incapable de distinguer les hypothèses et conclusions dans un théorème risque de se retrouver en difficulté lorsqu'il devra utiliser ce théorème comme énoncé tiers. En effet il ne pourra identifier les prémisses et conclusions de l'énoncé.

Pour parvenir à mettre en place une démonstration correcte, il faut donc comprendre le raisonnement déductif c'est à dire l'organisation des pas de démonstration comme l'écrit Duval (1993) : " *Pour l'apprentissage de ce raisonnement, il est donc important d'insister sur la compréhension du fonctionnement d'un pas de déduction. Pour cela il faut que les propositions soient regardées non pas pour leur contenu mais pour leur statut opératoire* ". Si l'on veut que les élèves comprennent le processus de démonstration, il faut donc qu'ils comprennent ce qu'est une hypothèse et ce qu'est une conclusion. Or cela est loin d'être acquis pour eux au début de la classe de Quatrième. Notre étude va donc se centrer sur un apprentissage des théorème qui permette aux élève de distinguer les hypothèses et la conclusion d'un énoncé.

I.1.2. La médiation sémiotique dans une approche vygotskienne

La relation qui unit l'homme à la nature est toujours médiatisée par des outils. Le fait d'utiliser ces outils peut donc permettre de modifier la nature ; cependant, cela peut aussi modifier physiquement l'homme qui les utilise. Par analogie, Vygotski, tout en en précisant les limites, transpose ce concept de médiation du plan physique au plan psychique. Ainsi la relation qui unit l'homme aux autres hommes est médiatisée par des "instruments psychiques" (le langage, les symboles mathématiques, les tableaux, les cartes, les plans). L'appropriation de ces outils, appelés aussi artefacts, va agir sur l'homme " qui les utilise en le transformant et développant son mental " (Mondémé 1999).

Rabardel (1999) reprend les idées de Vygotski. Ainsi, les artefacts, qui sont des dispositifs matériels ou symboliques utilisés comme moyen d'action, sont utilisés par les enseignants pour modifier le rapport des élèves au savoir mathématique. Le compas est un artefact comme la règle ou le rapporteur. Lorsque l'élève va utiliser l'artefact compas pour construire un cercle, il va associer à cet artefact un ensemble d'actions qui permettent la construction d'un cercle. Cette utilisation particulière de l'artefact compas est appelée par Rabardel (1999) un schème d'utilisation. L'artefact compas associé à ce schème d'utilisation est appelé un instrument. Lorsque l'élève utilise l'artefact compas pour reporter une mesure, l'instrument ne sera plus le même, le schème d'utilisation est différent.

L'objectif de l'enseignement reposant sur une approche théorique centrée sur la médiation sémiotique est qu'à partir de l'utilisation d'un artefact, les élèves construisent une représentation mentale de son utilisation et de son action. Cette représentation mentale est appelée un outil psychologique : un signe. Selon Falcade (2002): " *le signe (ou 'objet psychologique') agit comme un instrument d'activité psychologique de façon analogue au rôle de l'outil technique dans le laboratoire. La différence est que la fonction de l'objet technique est extérieure : elle doit mener au changement de l'objet. D'un autre côté, le signe est intérieur : il permet la propre maîtrise de la personne.* " Le processus de génération des signes est appelé par Vygotski : *processus d'intériorisation*, il est caractérisé par la reconstruction interne d'une opération externe et par la transformation d'un processus inter-personnel en un processus intra-personnel. Ce processus de transformation, l'élève ne peut pas le faire seul. En effet, c'est par le dialogue avec un enseignant que l'élève va progressivement intérioriser ces actions, et les réactions des artefacts sur les objets présents. Dans ce dialogue avec l'enseignant (l'expert) l'élève doit extérioriser, formuler ces actions sur les objets et les rétroactions faites par le milieu. Dans un premier temps l'élève peut agir directement sur l'artefact pour percevoir les différentes actions et rétroactions possibles, puis dans un second temps, l'artefact n'est plus présent. L'utilisation de l'artefact devient mentale.

On peut considérer que les logiciels mathématiques peuvent être utilisé comme des instruments de médiation sémiotique. Ces logiciels offrent une visualisation concrète des mathématiques qui permet un rapport différent à la géométrie. Les outils disponibles dans les logiciels peuvent être comparées à des artefacts. On peut donc, à partir de ces artefacts extérieurs, travailler sur leur intériorisation en signes.

Avec ce type d'outil, les problèmes sont différents des problèmes de l'environnement papier-crayon., les relations entre problèmes et connaissances sont transformées, cela oblige les élèves à mettre en place des stratégies adaptées. Ces nouvelles stratégies reposent sur les outils disponibles dans ce nouvel espace. On peut considérer que les logiciels offrent des artefacts, ces objets techniques peuvent être utilisés pour permettre une nouvelle modélisation des mathématiques. Ainsi l'élève va devoir modifier son rapport avec les mathématiques, ce qui va lui permettre de se retrouver en situation d'apprentissage.

I.1.3. Cabri junior

Un environnement de géométrie dynamique permet de manipuler la géométrie différemment d'un environnement papier-crayon. En effet en papier-crayon, les élèves pratiquent une géométrie qui s'appuie sur le dessin. Leurs constructions peuvent donner l'apparence de satisfaire à des propriétés géométriques. Alors que dans un environnement de géométrie dynamique, dès que l'on déplace un élément d'une figure construite de façon perceptive, la satisfaction apparente des propriétés géométriques cesse d'exister. Ensuite, lorsque les élèves manipulent la géométrie à travers un environnement dynamique, ils perdent leurs repères initiaux. La page de travail de Cabri ne possède pas de lignes. Ainsi les élèves doivent construire leurs droites, droites perpendiculaires et droites parallèles sans utiliser les lignes supports habituelles du cahier. Chaque construction d'objet utilise les propriétés géométriques qui le caractérisent. Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et égaux. En conséquence, pour chaque construction, on demande de respecter un ordre défini par les propriétés de l'objet.

Etant placé dans un environnement de géométrie dynamique l'élève peut déplacer ou modifier les objets qu'il crée et voir quelles en sont les conséquences. Cela permet donc à l'élève de prendre conscience de la différence entre les hypothèses, ce qui est construit et peut être changé, et la conclusion qui est la conséquence des manipulations, l'observation finale. C'est sur cette distinction que nous allons organiser un processus de médiation sémiotique conduisant à l'intériorisation du processus de reconnaissance des hypothèses et conclusions. Prenons par exemple la propriété : *un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles et égaux deux à deux est un parallélogramme.* Les élèves construisent un quadrilatère quelconque, puis doivent déplacer les sommets pour obtenir des côtés opposés parallèles et égaux. C'est alors qu'ils peuvent observer la forme parallélogramme prise par le quadrilatère. L'élément construit est le quadrilatère quelconque et les éléments déplacés sont les côtés (par l'intermédiaire des sommets).

Ces éléments (construits et déplacés) correspondent aux hypothèses de la proposition, l'observation finale du parallélogramme correspond à la conclusion de la proposition.

Cabri Junior est un micro-monde issu du logiciel Cabri Géomètre, il s'utilise sur une calculatrice (TI 83 plus et TI 84 plus). Un logiciel de géométrie dynamique construit sur le modèle d'un micro-monde permet à son utilisateur d'explorer en toute liberté les différents outils, possibilités de constructions, déplacements, manipulations disponibles. Cependant pour qu'il y ait apprentissage, la manipulation du logiciel doit être guidée par l'enseignant. La présence de l'enseignant aura aussi une grande importance pour la mise en place du processus de médiation sémiotique (par dialogue avec les élèves).

Le principal artefact que les élèves vont utiliser et qui va entrer dans le processus de médiation sémiotique est le déplacement. Cet artefact permet de mettre en place deux aspects de la médiation sémiotique. Tout d'abord les élèves seront confrontés au côté général des constructions (Laborde Capponi 1994), l'action de déplacer permet donc de souligner la distinction figure-dessin en mathématiques. Ensuite le déplacement permet de mettre en valeur l'aspect dynamique des hypothèses opposé à l'aspect statique de la conclusion.

I.2. Problématique – Questions et hypothèses de recherche

L'objectif de cette recherche est l'étude du caractère contextualisé des connaissances des élèves relativement à la structure de la démonstration en géométrie. Pour cela nous allons utiliser les travaux de Duval (1993) en ce qui concerne la démonstration reposant sur le raisonnement déductif. En effet au niveau du collège, les démonstrations reposent principalement sur ce raisonnement. Nous allons donc travailler plus précisément sur la reconnaissance du statut opératoire d'un énoncé, c'est à dire sur la reconnaissance des hypothèses et conclusion dans un théorème. Pour cette étude, nous allons utiliser le cadre théorique de la médiation sémiotique de Vygotski fondé sur l'usage d'un artefact. Nous allons placer les élèves dans un milieu qui nous semble propice à nos objectifs, un environnement de géométrie dynamique.

Nous avons axé notre étude pour essayer de répondre aux questions suivantes :

Question 1 : *Dans quelle mesure un environnement de géométrie dynamique peut permettre de mettre en place un processus de médiation sémiotique relatif à la notion de statut opératoire d'un énoncé ?*

Question 2 : *Quelles en sont les incidences sur les connaissances des élèves et quel est le degré de contextualisation des connaissances éventuellement construites ?*

En parallèle à ces questions nous avons testé les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : *si les élèves distinguent un théorème et sa réciproque alors ils sauront reconnaître les hypothèses et la conclusion.*

Hypothèse 2 : *Si un élève sait reconnaître les hypothèses et la conclusion alors il saura faire la différence entre un théorème et sa réciproque.*

II. Expérimentation

Cette expérimentation comporte trois phases.

Sélection des élèves par un test en environnement papier-crayon :

La première phase a pour but de repérer les connaissances initiales des élèves concernant les théorèmes et propriétés de la géométrie. Nous voulons obtenir une image de l'état des connaissances des élèves sur les théorèmes. Cette phase se déroule dans l'environnement habituel des élèves, c'est à dire un environnement statique papier-crayon. Les élèves doivent répondre aux questions posées individuellement, le matériel de géométrie habituel est disponible. Les exercices posés reposent sur des théorèmes et situations connus des élèves. Cette première phase peut être assimilée à une phase d'évaluation des connaissances des élèves sur les théorèmes de géométrie.

A l'issue de cette première phase, nous sélectionnons 8 élèves qui participeront à la deuxième phase. Ces 8 élèves sont choisis parmi les élèves qui ont rencontré des difficultés dans la résolution des exercices de cette première phase. Nous avons fait ce choix car notre objectif est de tester la mise en œuvre d'un processus de médiation sémiotique sur des élèves rencontrant des difficultés dans la notion de statut opératoire des énoncés.

Manipulation de la géométrie dans un environnement de géométrie dynamique :

Lors de la deuxième phase, les élèves travaillent avec l'environnement de géométrie dynamique *Cabri Junior* de la calculatrice TI 83 Plus, cependant cette expérimentation peut aussi se faire sur le logiciel Cabri Géomètre, ou un autre logiciel de géométrie dynamique. Cette phase est considérée comme une séance d'enseignement, nous avons donc prévu des interactions entre les élèves et l'expérimentateur. Nous donnons aux élèves des exercices qui font appel à la géométrie dynamique dans leur résolution. L'environnement Cabri est utilisé dans cet exercice comme extériorisant l'évolution entre hypothèses et conclusions. Plus précisément dans un environnement de géométrie dynamique, les hypothèses correspondent à des conditions sur les éléments que l'on peut faire varier, les conclusions sont les conséquences du choix de valeurs particulières données à ces variations. Cette règle est la connaissance visée que les élèves doivent acquérir. Cette acquisition doit se faire à travers les actions que l'élève peut faire sur le milieu mis à sa disposition. Le milieu est constitué par le logiciel Cabri Junior, les rétroactions du logiciel se situent au niveau du dynamisme des conditions (hypothèses) et l'immobilité de la conclusion. Les élèves sont placés par groupe de deux, ce qui permet des échanges entre les élèves, l'enseignant est aussi présent pour guider les élèves dans l'utilisation de Cabri et pour permettre le dialogue élève-expert.

Bilan par l'expérimentateur :

La troisième phase se situe dans l'environnement papier-crayon. Avec ce retour à l'environnement initial de travail des élèves, nous cherchons à identifier une évolution éventuelle de leurs connaissances et surtout de leur analyse des énoncés des théorèmes en termes d'hypothèses et conclusion. Pour cela nous travaillons avec toute la classe, cela nous permet de comparer les deux groupes. Le groupe ayant travaillé avec Cabri Junior, est susceptible d'avoir un processus d'intériorisation organisé autour de l'environnement Cabri. Le deuxième groupe est formé des élèves n'ayant pas travaillé avec Cabri. Cette dernière phase reprend le principe de la phase 1, c'est à dire que les élèves sont placés dans un contexte d'évaluation des connaissances.

Nous allons présenter précisément les différentes phases de cette expérimentation. Nous avons travaillé avec une classe de $4^{\text{ième}}$ qui connaissait Cabri Géomètre. Les élèves ont uniquement eu une initiation à Cabri Junior pour identifier la position des différents outils, leur fonctionnalité étant connue par Cabri Géomètre. Pour chaque phase, nous allons analyser les productions de deux élèves, Arthur et Pauline, que nous retrouverons tout au long de l'expérimentation. Ces deux élèves n'ont pas travaillé ensemble au cours de la phase 2, mais chacun avec un autre binôme.

II.1. Phase 1

La première phase a pour but de repérer les connaissances initiales des élèves concernant les théorèmes et propriétés de la géométrie. Nous voulons ainsi obtenir une image de l'état des connaissances des élèves en dehors de l'utilisation de Cabri. Ensuite nous allons utiliser les réponses des élèves pour choisir 8 élèves qui ont rencontré des difficultés dans la reconnaissance des théorèmes.

Enoncé 1 :
Dessinez un triangle ABC, notez M le milieu du côté [AB].
Dessinez une droite passant par M et parallèle au coté [BC].

Que remarquez-vous, que pouvez-vous faire pour vérifier cette remarque ?
Enoncer la propriété que vous venez d'illustrer.

Parmi les propriétés suivantes, cochez celles qui semblent correspondre à la propriété illustrée ? Justifiez vos choix.

1. Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté parallèlement à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.
2. Dans un triangle si une droite passe par les milieux de 2 côtés alors elle est parallèle aux $3^{\text{ième}}$ côté.
3. Dans un triangle, si on trace la parallèle à un côté passant par le milieu d'un autre côté, alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.
4. Dans un triangle, la droite parallèle au $3^{\text{ième}}$ côté passe par les milieux des 2 autres côtés.

Enoncé2 :
Dessinez un cercle de centre O, puis un triangle ABC tel qu'un côté du triangle passe par le centre du cercle O et que ses sommets appartiennent au cercle.

Quel triangle obtenez-vous, comment le vérifiez-vous ?
Enoncez le théorème que vous venez d'illustrer.
Parmi les propriétés suivantes, cochez celles qui semblent correspondre à la propriété illustrée ? Justifiez vos choix.

1. Un triangle, qui est dans un cercle, avec ses sommets sur le cercle est rectangle.
2. Un triangle rectangle est situé dans un cercle de diamètre l'hypoténuse du triangle.

3. Un triangle, qui est inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle,

est un triangle rectangle.
4. Dans un triangle si le centre du cercle circonscrit appartient à un côté alors le triangle est rectangle.
5. Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est sur l'hypoténuse.

Le choix de ces exercices :

Nous avons choisi de faire travailler les élèves sur le triangle, qui représente une partie importante du programme de géométrie de 4$^{\text{ième}}$, ainsi, nous avons un vivier de théorèmes important. Chaque exercice comporte deux activités : une première activité de construction, une seconde plus théorique sur la recherche et l'étude de propriétés. Dans cette deuxième activité théorique, les élèves doivent étudier plusieurs propriétés se rapportant toutes au même " thème ", c'est à dire que dans chaque propriété nous pouvons retrouver les objets construits par les élèves (un triangle et un cercle). L'organisation des questions offre une aide pour les élèves, en effet, après chaque construction, nous demandons qu'elle est l'observation finale, cela peut guider les élèves pour retrouver la propriété demandée, et choisir parmi les différentes propositions.

L'objectif de ces exercices est de voir dans quelle mesure les élèves parviennent à identifier un théorème, étant placé dans une situation précise où les hypothèses et les conclusions peuvent être facilement identifiées. Ensuite par le choix des énoncés, nous allons savoir si les élèves savent différencier un énoncé et sa réciproque. Parmi les différentes propriétés, certaines sont des propriétés correctes, d'autres sont incorrectes car incomplètes. Parmi les propriétés correctes, nous avons volontairement mélangé des propriétés avec leur réciproque.

Les choix des élèves nous permettent certaines hypothèses. Dans l'énoncé 1, nous pouvons considérer que les élèves qui ont choisi la deuxième propriété n'ont pas conscience de la notion d'hypothèse et de conclusion, car cette propriété est la réciproque de la propriété illustrée par le schéma. On peut supposer pour les élèves qui vont choisir la dernière propriété qu'ils ne savent pas juger de la validité d'un énoncé. On ne peut pas être complètement positif sur les élèves qui vont choisir les énoncés 1 et 3, si ce n'est qu'ils ont su retrouver l a bonne propriété pour cet exercice. Cependant pour les élèves qui choisiront les propriétés 1 ou 3 avec la propriété 2 ou 4 nous pourront conclure la propriété n'a pas été bien perçue ou la notion d'hypothèse et conclusion n'est pas acquise chez ces élèves.

Pour l'énoncé 2, les élèves qui vont choisir la première propriété n'auront pas étudié la validité de cette propriété, car elle est incomplète. Les élèves qui vont choisir les propriétés 2 et 5 vont choisir les réciproques de la propriété effectivement illustrée, on peut supposer qu'ils ne maîtrisent pas les théorèmes et certainement les notions d'hypothèses et de conclusion. Comme précédemment, on ne peut se prononcer définitivement sur leur connaissance et leur maîtrise des notions que nous visons. Les élèves prioritaires pour la phase deux sont ceux qui auront choisi des propriétés réciproques et des propriétés fausses.

Arthur a su énoncer les deux théorèmes illustrés par sa construction, dans chaque exercice. Cependant il n'a pas su distinguer les différences entre les propriétés proposées. Dans l'exercice 1, il considère tous les énoncés comme équivalents, il n'a pas remarqué que l'énoncé 4 était erroné. Dans l'exercice 2, il n'a pas sélectionné tous les énoncés, mais uniquement deux énoncés : la propriété effectivement illustrée et sa réciproque.

On peut donc conclure qu'Arthur sait reconnaître un théorème dans une situation précise, mais il ne sait pas distinguer deux théorèmes de formulation proche (théorème et réciproque).

Contrairement à Arthur, dans l'exercice 1, Pauline n'a pas énoncé de théorème, on

Réponses des élèves Arthur et Pauline :

Enoncé 1	Arthur	Théorème : *D'après les hypothèses, la droite M est parallèle à (BC) et MB = MA et M appartient à AB, donc d'après le théorème des milieux AB/AM = AC/AO.* (la droite passant par M et parallèle au côté [BC] coupe (AC) en O) Choix : 1, 2, 3, 4 *car ce sont toutes les mêmes.*
	Pauline	Théorème : non écrit Choix : 1, 2, 3 *les deux que j'ai coché veulent dire à peu près la même chose et définissent la propriété illustrée. Dans la quatrième proposition, ce n'est pas forcément vrai, car il faudrait rajouter une donnée de plus pour que se soit juste.*
Enoncé 2 :	Arthur	Théorème : *Théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle.* Choix : 3, 5 sans justification.
	Pauline	Théorème : *un triangle qui a un de ses côtés qui passe par le centre d'un cercle et que tous ses sommets appartiennent au cercle est obligatoirement rectangle, on dit qu'il est inscrit dans un cercle, c'est la propriété du triangle inscrit dans un cercle.* Choix : 1, 2, 3 *car ce sont des définitions possibles pour la propriété illustrée.*

peut donc se demander si elle a reconnu le théorème illustré ou non. Ensuite elle a su choisir les deux propriétés effectivement illustrées, cependant, elle a aussi choisi l'énoncé 2 qui est l'énoncé réciproque. Elle a remarqué que l'énoncé 4 ne pouvait pas être correct car incomplet. Pour l'exercice 2, l'énoncé qu'elle donne est bien construit dans le sens où elle a reformulé toutes les hypothèses qui lui permettent d'obtenir la conclusion, sa formulation est plus proche d'une formulation personnelle, que la formulation classique des manuels. On peut donc supposer qu'elle parvient à identifier les hypothèses et les conclusions d'un énoncé. Par contre, elle n'a pas choisi les énoncés qui correspondent à sa construction. Seul l'énoncé 3, parmi ces réponses correspond effectivement à la situation, l'énoncé 2 étant sa réciproque et l'énoncé 1 une propriété incomplète donc erronée.

On peut déjà voir un premier décalage entre nos hypothèses et les réponses de Pauline. En effet, Pauline a su identifier les hypothèses pour donner une formulation correcte, mais elle n'a pas su différencier les propriétés et leur réciproque. De même pour Arthur, il sait reconnaître un théorème, il sait identifier les hypothèses à partir d'une construction, mais il ne sait pas différencier un énoncé et sa réciproque.

II.2. Phase 2

L'objectif de cette phase 2 est de faire travailler les élèves sur Cabri-Junior, ils vont utiliser l'artefact du déplacement. Nous allons donc travailler sur la mise en place du processus de médiation sémiotique pour la reconnaissance du statut opératoire des énoncés. Cette séance se déroule en binôme, l'expérimentateur guide les élèves pour comprendre le sens du déplacement et l'associer à la reconnaissance des hypothèses d'un théorème. Lors de cette phase, Arthur et Pauline ont travaillé en binôme avec d'autres élèves qui ont aussi rencontré des difficultés dans la reconnaissance des théorèmes.

Exercice 1 :

Enoncé 1 :
Créez un triangle ABC, construisez la médiatrice du côté [BC] de ce triangle. Puis construisez la hauteur issue de A.
Quelle manipulation devez-vous faire pour que la médiatrice soit confondue avec la hauteur ?
Quelle est la conséquence de cette manipulation sur le triangle ABC ?
Formulez sous forme de *si...alors* la propriété associée à la manipulation que vous avez fait.
Enoncé 2 :
Créer un triangle ABC, dessinez 2 médiatrices de ce triangle puis le cercle circonscrit au triangle.
Quelle manipulation faites-vous pour que le centre du cercle vienne sur un côté du triangle ?
Que devient alors le triangle, où est alors situé le centre sur ce côté ?
Formulez un théorème sous la forme *si...alors* que vous pouvez associer à la manipulation que vous venez de faire.

Exercice 2 :

Enoncé 1 :
Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
Quelles manipulations peut-on associer dans Cabri à cette propriété pour distinguer l'hypothèse et la conclusion ?

Enoncé 2 :
Un quadrilatère ayant 2 côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
Quelles manipulations peut-on associer dans Cabri à cette propriété pour distinguer l'hypothèse et la conclusion ?

Le choix de ces exercices:

Dans l'exercice 1, à partir d'une construction initiale, les élèves doivent faire des déplacements qui vont entraîner des changements sur l'objet initial. Le déplacement permet aux élèves de faire évoluer le triangle donné au départ, le déplacement correspond à des conditions particulières demandées par l'enseignant.

Dans ce premier exercice, l'élève agit sur le milieu (Cabri Junior) en utilisant ces connaissances du logiciel. A la suite de ces actions, le logiciel renvoie des figures particulières. Lorsque nous demandons aux élèves d'expliciter son action sur la calculatrice ainsi que la rétroaction obtenue, nous attendons de l'élève la formulation d'une propriété où les hypothèses sont associées aux actions et la conclusion aux observations. Le contrôle de cette formulation se fait par une discussion avec l'expérimentateur.

La deuxième partie de cette phase (exercice 2) correspond à une phase de réinvestissement des connaissances acquises par les élèves au cours des premières activités (exercice 1). L'énoncé 1 de l'exercice 2 est un énoncé traditionnel, c'est à dire contenant les mots clés *si* et *alors*. Ces petits mots semblent très importants pour les élèves dans la reconnaissance des hypothèses et conclusion, de plus les formulations de l'exercice 1, sont construites avec ces mots. Par contre dans l'énoncé 2, nous les avons supprimés. Le milieu offre moins d'informations à l'élève pour reconnaître les hypothèses et la conclusion. Les élèves vont devoir mettre en œuvre une nouvelle stratégie pour reconnaître les hypothèses et conclusion. Ainsi, par l'utilisation de Cabri-Junior, nous incitons les élèves à utiliser une stratégie qui repose sur la manipulation de Cabri.

Ces deux exercices ont pour objectif de mettre en place un processus de médiation sémiotique au sens de Vygotski pour la reconnaissance du statut opératoire d'un théorème. Ce processus nécessite des actions externes à l'élève, mais aussi la formulation de ces actions. C'est par cette formulation et l'explicitation des actions à un expert (ici l'expérimentateur) que le processus d'intériorisation peut se mettre en place. Nous retrouvons deux sortes d'activités. La première activité va permettre aux élèves de reconnaître un théorème à partir d'une situation donnée et cela grâce à l'utilisation de Cabri. Au cours de cet exercice, nous allons utiliser les outils disponibles dans l'environnement Cabri, c'est à dire la construction et le déplacement. Ces outils vont permettre à l'élève d'agir sur les figures Cabri correspondant aux hypothèses d'un théorème, ensuite la rétroaction de l'environnement Cabri permet une observation, la conséquence des actions : la conclusion du théorème. Dans la deuxième activité, les élèves vont travailler dans l'autre sens, c'est à dire à partir d'un théorème donné ils vont devoir repérer les hypothèses et la conclusion, Cabri leur donnera les rétroactions sur leurs choix.

A la fin de cette phase, nous supposons que les élèves auront acquis de nouvelles connaissances concernant la reconnaissance du statut opératoire d'un énoncé. Ces connaissances s'appuieront sur l'utilisation de Cabri. Comme dans la phase 3 nous supprimons la calculatrice et donc l'environnement Cabri, les élèves devront utiliser leurs nouvelles connaissances, mais sans Cabri. Ainsi sera testée la médiation sémiotique pour la reconnaissance du statut opératoire d'un énoncé.

<u>Résultats des élèves, Arthur et Pauline :</u>

Pour cette phase, nous avons enregistré les dialogues[2], nous avons ainsi obtenu un matériau pour analyser les connaissances des élèves sur les théorèmes travaillés.

Dès le début de la séance, nous pouvons constater qu'Arthur connaît parfaitement tous ces théorèmes. En effet, il anticipe largement les différentes manipulations sur Cabri, ainsi dans l'exercice 1, nous obtenons le dialogue suivant[3] :

Jonathan : Quelle manipulation faites-vous pour que le centre du cercle vienne sur un côté du triangle ?
Expérimentateur : Vas-y Jonathan.
Jonathan : Il faut changer la médiatrice, en bougeant le point ... il faudrait décaler la médiatrice.
(...)

[2] les dialogues sont donnés en intégralité en annexe
[3] Jonathan étant le binôme d'Arthur pour cette séance

Arthur : essaie de faire un triangle ...
Jonathan : quelconque ?
Arthur : non plutôt un rectangle.

On peut donc se demander si Arthur manipule dans l'objectif d'obtenir l'objet de la conclusion, ou pour obtenir une hypothèse supplémentaire du théorème.

Ensuite, nous pouvons voir que Arthur n'inclut pas dans les hypothèses les objets que l'on manipule. Cela est visible dans l'exercice 2 :

A : Dès que, les hypothèses on met un angle, dans un parallélogramme si un angle, on met un angle à 90°.
E : Tu ne mets que les hypothèses.
A : Ca fait un rectangle, tous les angles sont droits. Hypothèses : un angle à 90°, et conclusion : le parallélogramme devient rectangle.
(...)
J : Je fais un quadrilatère quelconque ?
E : Oui
A : On ne peut pas plutôt commencer déjà à le faire avec 2 droites parallèles ?

Nous retrouvons encore la même idée à la fin de cet exercice, lorsque nous demandons de donner les hypothèses, Arthur ne parle que des côtés opposés parallèles et égaux. Ainsi l'objet initial, n'est pas considéré comme faisant partie des hypothèses.

Une dernière information apparaît sur la construction des théorèmes. A la fin de la séance, l'expérimentateur revient sur les différents exercices et sur les nouveaux moyens à disposition des élèves pour reconnaître hypothèses et conclusions.

E : Quand on regarde par rapport aux énoncés, Arthur, quelles sont les hypothèses du théorème ?
A : un angle à 90°
E : A partir du théorème et non ce que vous avez écrit.
A : Je ne comprends pas la question.
E : Dans le théorème, un théorème est coupé en deux.
A : Ah, oui avec le si alors.
(...)
E : (...) les hypothèses sont en général
A : Au début.

Ainsi, Arthur utilise l'organisation de la phrase pour retrouver les hypothèses et conclusions, en s'appuyant sur les mots-clefs *si* et *alors* ou en considérant que les hypothèses sont en début de phrase.

Cette séance avait pour but de mettre en place un processus de médiation sémiotique pour la reconnaissance des hypothèses et conclusion dans un théorème. On ne peut, bien entendu, pas juger immédiatement de son efficacité cependant nous pouvons voir une évolution d'Arthur sur la reconnaissance des hypothèses au cours de cette séance. En effet, au début Arthur ne prend pas en compte les objets supports des théorèmes. En effet dans l'exercice 1, Arthur ne considère comme hypothèses que hauteur et médiatrice confondues, de même dans l'exercice 2, les hypothèses qu'il prend en compte portent sur le cercle circonscrit, il n'inclut pas le triangle. Dans l'exercice 4 Arthur considère comme hypothèses les côtés opposés et parallèles mais ne parle pas du quadrilatère support de ces côtés. Cependant, à la fin de la séance, il parvient à énoncer toutes les hypothèses des théorèmes travaillés. Ainsi dans le dernier exercice, il donne comme hypothèses le parallélogramme, et un angle droit.

Pour Pauline, la phase 1 ne nous a pas donné d'informations sur sa méthode personnelle de reconnaissance des hypothèses et conclusion d'un théorème. Nous ne pouvons pas savoir si elle reconnaît les théorèmes sur lesquels nous la faisons travailler. Contrairement à Arthur, elle ne reformule pas des théorèmes qu'elle connaît, mais elle prend un soin particulier à intégrer toutes ses manipulations dans son énoncé. Nous retrouvons son style de formulation dès le premier exercice dans cette deuxième phase. Dès la synthèse du premier exercice et dans le deuxième exercice, nous pouvons remarquer qu'elle semble avoir compris la méthode que nous lui proposons avec l'utilisation de Cabri[4] :

<u>Synthèse des deux premiers exercices :</u>
E (...) est ce que vous pouvez me dire, ce que l'on a construit, déplacé observé ? Quelles sont les hypothèses et conclusion en général dans Cabri ?
P : Que si l'on fait quelque chose, on obtient quelque chose.
E : Oui, et donc les hypothèses et les conclusions, on les place comment par rapport à ce qu'on fait et ce qu'on observe ?
P : hypothèse c'est en premier
E : Oui, donc les hypothèses correspondent à quoi ?
(...)
P : Donc l'hypothèse serait de construire, après on observe, non on déplace,
(...)
P : On conclut
E : Donc les conclusions, on les fait à partir de quoi ?
P&L : des hypothèses
P : Et des observations
E : Surtout des observations
P : Et les observations, on les fait à partir des déplacements, qu'on fait à partir des hypothèses.

Bien entendu, ces remarques pertinentes se retrouvent dans l'exercice 2 tout comme au moment de la synthèse de la séance.

On peut difficilement conclure sur cette phase. Les stratégies des deux élèves semblent avoir évolué, cependant nous ne pourrons évaluer la mise en place du processus de médiation sémiotique que dans les phases suivantes. Nous pouvons cependant émettre une remarque : Arthur n'a pas considéré les théorèmes de la même façon que Pauline, il a utilisé ses connaissances, alors que Pauline a utilisé ses manipulations sur Cabri. Ensuite Pauline semble plus proche du résultat que nous attendions qu'Arthur. Est ce que l'écart entre ces deux approches peut expliquer de cette différence ?

---

[4] Lorine étant le binôme de Pauline pour cette séance

II.3. Phase 3

Cette phase se déroule dans l'environnement papier-crayon. Tous les élèves sont réunis et vont travailler individuellement.

Nous allons présenter un ensemble d'énoncés aux élèves. Ils vont devoir regrouper les énoncés identiques. Les théorèmes proposés ont tous des formulations différentes.

Enoncé :
Voici plusieurs formulations de différents théorèmes que vous devez regrouper. Mettez ensemble les formulations qui correspondent au même théorème en indiquant quelles sont les hypothèses et la conclusion de ce théorème.

1 –Si 2 droites (d) et (d') sont parallèles à une même droite (D) alors ces 2 droites sont parallèles.
2 –Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
3 –Dans un triangle ABC, la droite passant par le milieu de [AB] et parallèle à [BC], passe par le milieu de [AC].
4 –Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.
5 –Dans un triangle ABC, si une droite coupe [AB] en son milieu et qu'elle est parallèle à [BC], alors elle coupe [AC] en son milieu.
6 –Dans un triangle ABC, le segment qui relie les milieux des côtés [AB] et [AC] est parallèle au côté [BC].
7 –Si 2 droites sont parallèles entre elles, alors toute parallèle à l'une sera parallèle à l'autre.
8 –Un quadrilatère qui a ces côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.
9 –Dans un triangle ABC, si une droite qui passe par les milieux de [AB] et [AC] alors elle est parallèle à [BC].
10 –Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Choix des énoncés:

Certains énoncés sont formulés avec les mots clés *si alors*, ce qui peut aider, dans un premier temps les élèves, pour obtenir une première catégorie de théorèmes. Ensuite les élèves devront utiliser d'autres stratégies pour identifier les théorèmes identiques. C'est donc à cet instant que les élèves du groupe Cabri devraient se détacher des élèves de groupe témoin. En effet, ces élèves vont pouvoir mettre en œuvre les connaissances qu'ils devraient avoir acquis lors de la phase 2. Ils vont pouvoir évoquer mentalement l'espace de Cabri, qui est un guide pour identifier les hypothèses. Les élèves de l'autre groupe ne vont pas avoir ces connaissances pour résoudre le problème posé, leurs stratégies s'appuieront par exemple sur l'organisation de la phrase (les hypothèses au début et la conclusion à la fin). Cependant nous avons ajouté quelques pièges, en effet deux propositions sont en fait des réciproques des autres propositions (les propositions 4 et 7). Ainsi nous voulons contrôler si les élèves, en reconnaissant les hypothèses et la conclusion, vont pouvoir faire la différence entre un théorème et sa réciproque. Cela va nous permettre de tester l'hypothèse selon laquelle un élève qui sait reconnaître les hypothèses et la conclusion peut faire la différence entre un théorème et sa réciproque.

Choix de cet exercice:

Pour nous, cet exercice est révélateur des conceptions des élèves en ce qui concerne la connaissance et reconnaissance des théorèmes. En effet, les élèves vont devoir réfléchir à chaque phrase et l'interpréter. Les pièges (énoncés 4 et 7) vont nous permettre de voir si les élèves ne se contentent pas de sélectionner uniquement les propositions à l'aide de l'objet géométrique traité sans se demander quelles sont les hypothèses et les conclusions.

Comme nous leur demandons d'écrire les hypothèses et la conclusion, nous espérons qu'ils vont orienter leur étude dans ce sens, et qu'ainsi ils parviendront facilement à résoudre les problèmes.

Réponses des deux élèves, Arthur et Pauline :

	Groupe 1 :	Groupe 2 :	Groupe 3 :
Arthur :	Enoncés : 1, 7, 10	Enoncés : 2, 4, 8	Enoncés : 3, 5, 6, 9
	Hypothèses : *deux droites sont parallèles à une même droite*	Hypothèses : *un quadrilatère a ses côtés égaux*	Hypothèses : *Parallèle à la base passant par le milieu d'un côté adjacent*
	Conclusion : *les 3 droites sont parallèles entre elles*	Conclusion : *c'est un parallélogramme*	Conclusion : L*a parallèle coupe le troisième côté en son milieu*
	Pourquoi : *Pour les hypothèses, c'est la première chose que je sais, et la conclusion c'est ce que je déduis grâce aux hypothèses (en imaginant la construction de la figure).*		
Pauline :	Enoncés : 1, 7, 10	Enoncés : 2, 4, 8	Enoncés : 3, 5, 6, 9
	Hypothèses : *Deux droites parallèles à une même troisième*	Hypothèses : *deux côtés opposés d'un quadrilatère*	Hypothèses : *triangle, segment passant par le milieu de deux des côtés*
	Conclusion : *Les deux droites sont parallèles*	Conclusion : *parallélogramme*	Conclusion : *segment et troisième côté parallèle*
	Pourquoi : *J'ai mis les trois phrases ensemble car elles traitent le même sujet, elles parlent de la même chose et arrivent au même résultat*	Pourquoi : *J'ai mis ces trois phrases dans le même groupe car elles ont les mêmes hypothèses et la même conclusion*	Pourquoi : *J'ai mis ces quatre phrases dans le même groupe car elles ont les mêmes hypothèses, et la même conclusion mais ces hypothèses et cette conclusion sont différentes des autres groupes*

La résolution de cet exercice est révélatrice de nombreux faits. Tout d'abord, Arthur n'a pas su faire la différence entre les énoncés et leur réciproque. Dans le groupe 1 l'énoncé 7 est la réciproque des énoncés 1 et 10, de même dans le groupe 2 avec l'énoncé 4 est la réciproque des énoncés 1 et 8 et enfin dans le dernier groupe, les énoncés 3 et 5 sont des énoncés réciproques des énoncés 6 et 9. Cependant, il a su repérer des hypothèses et des conclusions qui correspondent à des théorèmes sélectionnés. De plus Arthur reste logique dans son raisonnement puisque les hypothèses et conclusion qu'il énonce sont bien les deux parties d'un même théorème. On peut donc conclure qu'Arthur sait distinguer les hypothèses et les conclusions d'un théorème. Cependant il ne sait pas différencier deux énoncés réciproques.

Nous pouvons faire les mêmes constations pour Pauline que pour Arthur. En effet Pauline a su distinguer les hypothèses et conclusion (sauf pour le groupe 2) mais elle n'a pas su distinguer les théorèmes et leurs réciproques.

Cette phase n'est pas vraiment positive en ce qui concerne notre processus d'intériorisation pour la reconnaissance des théorèmes, mais elle nous apporte un résultat très intéressant par rapport à nos hypothèses de travail. La distinction des hypothèses et conclusion dans un théorème n'implique pas nécessairement que l'élève parviendra à différencier un théorème et sa réciproque.

III.4. Phase 3-bis

La phase 3 n'a pas fonctionné comme nous l'attendions, nous avons donc utilisé de nouveaux exercices plus adaptés aux élèves.

Exercice 1 :

Question : Pour chaque proposition, cochez les énoncés qui vous semblent équivalents, c'est à dire qui ont les mêmes hypothèses et les mêmes conclusions. Expliquez votre choix.

1 - Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

1. Un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
2. Un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

2 - Dans un triangle, si la hauteur est confondue avec la médiatrice, alors le triangle est isocèle.

1. Un triangle qui a sa médiatrice confondue avec sa hauteur est un triangle isocèle.
2. Un triangle isocèle a sa hauteur et sa médiatrice confondues.
3. Un triangle est isocèle si sa hauteur et sa médiatrice sont confondues.

3 - Dans un triangle, si une droite est parallèle à un côté et qu'elle coupe un deuxième côté un son milieu, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

1. Dans un triangle, une droite qui coupe deux côtés en leur milieu est parallèle au troisième côté.
2. Dans un triangle, une droite qui coupe un côté en son milieu est qui est parallèle à un autre côté, coupe le dernier côté en son milieu.
3. Dans un triangle, une droite qui est parallèle à un côté et qui coupe un autre côté en son milieu passe par le milieu du troisième côté.

Le choix des énoncés :

Chaque proposition initiale contient les mots clés *si alors* ainsi les élèves pourront identifier facilement les hypothèses et les conclusions. Par contre, pour les énoncés à choisir, nous avons volontairement donné des formulations qui ne contiennent pas ces mots indicateurs. Les élèves ne vont donc pas pouvoir obtenir d'informations du milieu. Les élèves devront utiliser une stratégie personnelle qui ne repose pas sur le *si ... alors* pour sélectionner les bons énoncés. Ainsi nous allons pouvoir repérer quelles sont les stratégies des élèves pour identifier un théorème. Nous attendons des élèves qui ont participé à la deuxième phase qu'ils utilisent une stratégie reposant sur l'utilisation mentale de Cabri. De plus nous allons tester une fois de plus l'hypothèse qu'un élève qui sait reconnaître les hypothèses et la conclusion est un élève qui peut faire la différence entre un théorème et sa réciproque.

Productions des deux élèves, Arthur et Pauline :

	Enoncé 1 :	Enoncé 2 :	Enoncé 3 :
Arthur :	Proposition 2 *Car en imaginant la figure j'essaie de voir ce qui est codé au départ (ici les diagonales se coupent en leur* ***milieu****) donc ce sont les hypothèses*	Propositions 1 et 3 *Car en imaginant la figure j'essaie de voir ce qui est codé au départ (ici hauteur confondue avec la médiatrice) donc ce sont les hypothèses*	Propositions 2 et 3 *Car en imaginant la figure j'essaie de voir ce qui est codé au départ (droite parallèle à un côté, elle coupe un 2ième côté en son milieu) donc ce sont les hypothèses*
Pauline :	Proposition *2* *Car les phrases sont presque les mêmes.*	Propositions *1 et 3* *Les hypothèses et les conclusions sont les mêmes mais pas formulées pareilles dans les phrases.*	Propositions *2 et 3* *Car les phrases veulent dire la même chose.*

Les deux élèves ont choisi les bons énoncés pour chaque propriété. On peut donc conclure que, pour cet exercice, ces deux élèves ont su distinguer un énoncé et sa réciproque. Grâce aux justifications, nous pouvons voir que les élèves n'ont pas utilisé les mêmes stratégies pour résoudre le problème. Arthur imagine le codage[5] des figures, cela peut être encourageant, on peut supposer que les élèves pourront imaginer les déplacements des objets géométriques. La stratégie d'Arthur repose sur le fait que les hypothèses correspondent au codage de la figure.

La stratégie de Pauline est différente. On peut supposer qu'elle utilise la structure des phrases et leur sens. Elle identifie les hypothèses et les conclusions, mais on ne sait pas vraiment comment. Il est très difficile de pouvoir statuer sur les stratégies de Pauline car ses explications sont très vagues. De façon plus générale, on peut remarquer que les élèves peuvent rencontrer certaines difficultés pour formuler leur stratégie.

Exercice 2 :

Question : Pour chaque propriété suivante écrivez la conclusion. Exemple : Un quadrilatère qui a ses 4 côtés égaux est un losange. Conclusion : Le quadrilatère est un losange. 1 - Dans un triangle isocèle, la médiane est confondue avec la bissectrice. 2 - Un losange qui a un angle droit est un carré. 3 - Un triangle équilatéral a tous ses angles égaux à 60°. 4 - Un quadrilatère est un trapèze s'il a 2 côtés parallèles. 5 - Un triangle qui a 2 côtés égaux est un triangle isocèle. Comment avez-vous fait ?

[5] Le codage de figures fausses a été travaillé avec leur enseignant dans la même période, ce qui peut expliquer cette justification.

Choix des énoncés :

Dans tous les énoncés, les mots indicateurs *si* et *alors* sont absents. Ainsi le travail sur la reconnaissance de la conclusion doit se faire en utilisant une autre stratégie.

Les énoncés concernent des objets géométriques facilement visualisables par les élèves. Cependant tous les énoncés ne sont pas comme l'exemple, c'est à dire concernant la transformation d'un quadrilatère ou d'un triangle. En effet, dans l'énoncé 3 la propriété découle de la définition du triangle équilatéral, elle n'entraîne pas d'évolution du triangle.

Productions des deux élèves Arthur et Pauline :

	Enoncé 1	Enoncé 2	Enoncé 3	Enoncé 4	Enoncé 5
Arthur	*La médiane est confondue avec la bissectrice.*	*Le losange est un carré.*	*Le triangle a tous ses angles égaux à 60°.*	*Le quadrilatère est un trapèze.*	*Le triangle est isocèle.*
	En imaginant la figure, j'ai trouvé ce que l'on voit grâce au codage.				
Pauline	*La médiane est confondue avec la bissectrice.*	*Le losange est un carré.*	*Le triangle est équilatéral.*	*Le quadrilatère est un trapèze.*	*Le triangle est isocèle.*
	J'ai mis à l'écart les choses que j'avais au départ. Et j'ai pris ce que j'obtenais (ce qu'il restait) comme conclusion.				

Arthur a utilisé la même stratégie que pour l'exercice précédent, il utilise le codage des figures pour retrouver les hypothèses et déduire les conclusions. Cela lui a permis de distinguer toutes les conclusions des différents énoncés.

Pour Pauline, les explications sont une fois de plus très vagues. On pourrait penser qu'elle utilise l'ordre des mots, mais comme elle a su retrouver la conclusion de la proposition 4 (elle est au début et non à la fin de la phrase), cette supposition devient fragile. On peut donc penser qu'elle a conscience d'une certaine chronologie, dans l'énoncé. Elle n'a pas su retrouver la conclusion de la proposition 3. On peut expliquer cette erreur car pour cette proposition, il n'y a pas d'évolution de l'objet (ici le triangle) simplement une observation. Donc il se pourrait que ses explications évoquent une manipulation dans Cabri. Bien entendu cela reste une hypothèse.

III. Discussion

En ce qui concerne les deux élèves que nous avons suivis pour cette étude, nous ne pouvons pas nous montrer entièrement positifs. En effet, le processus d'intériorisation que nous avons cherché à installer n'apparaît pas dans les réponses des élèves.

Pourtant, au vue des réponses des deux dernières phases, il semble que les élèves aient acquis une connaissance. Les théorèmes travaillés dans la phase 2 sont des théorèmes connus des élèves, ils leur ont été enseignés dans l'année ou au cours des années précédentes. L'organisation du milieu n'avait pas pour but l'acquisition de nouveaux théorèmes, cependant nous pouvons supposer qu'il a induit une perception de la structure des théorèmes, c'est à dire l'organisation interne des théorèmes avec les hypothèses et la conclusion. En effet tout au long de la phase 2 les élèves ont travaillé sur les hypothèses et la conclusion. Ainsi en voulant mettre en place le processus de médiation sur la reconnaissance des hypothèses et conclusion dans un théorème nous avons utilisé les concepts d'hypothèses et de conclusion dans un théorème. L'hypothèse que nous pouvons émettre sur l'acquisition de connaissance des élèves est que le milieu a induit une prise de conscience chez les élèves de la structure interne des théorèmes reposant sur les hypothèses et la conclusion. Un moyen d'identifier ces deux éléments du théorème serait de considérer que la conclusion est à la fin du théorème, l'objet final, et que les hypothèses sont les éléments qui permettent le contrôle sur la conclusion. Lors des actions et rétroactions entre les élèves et l'environnement Cabri au cours de la phase 2 les connaissances initiales des élèves interviennent, cela est visible dans les réponses d'Arthur. Ces connaissances permettent une anticipation des résultats et des rétroactions qui ne jouent plus leur rôle initialement prévu. Bien entendu le fait qu'Arthur connaisse ses théorèmes n'induit pas qu'il distingue hypothèse et conclusion. Pour que les rétroactions soient plus efficaces, il faudrait que les élèves ne puissent pas anticiper le résultat, au moins dans un premier temps.

Le travail sur Cabri a entraîné des évolutions de stratégies. Dans les réponses d'Arthur pour la première phase, l'analyse des théorèmes se fait sur le sens des différentes phrases. Lors des deux dernière phases, cette analyse porte plus sur l'étude des objets avec l'utilisation de ce que nous appellerons codage mental des objets. Cela lui permet de trouver les conclusions d'un énoncé En ce qui concerne Pauline nous ne pouvons pas vraiment parler d'évolution de stratégie car ses productions ne nous informent pas vraiment sur sa procédure. Ensuite, contrairement à Arthur, elle n'utilise pas ses connaissances pour formuler ses théorèmes, mais ses constructions lorsque cela est possible. Les résultats du travail sur Cabri sont difficiles à saisir. En effet, à l'issue de la phase 2, Pauline semble maîtriser la reconnaissance des hypothèses et conclusions d'un énoncé en utilisant Cabri. Pourtant, elle ne fait aucune référence à cette stratégie dans les exercices des phases suivantes, bien qu'elle parvienne à répondre avec succès aux questions posées. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'elle est restée dans le monde de Cabri. Pauline a peut être intériorisé les signes extérieurs de Cabri, ici principalement le déplacement, mais elle ne parvient pas à les expliciter.

Cet article présente les productions de deux élèves d'un groupe de 8 élèves. Les autres élèves de ce groupe confortent les résultats que nous avons exprimé pour Arthur et Pauline. Dans les deux phases de comparaison des deux groupes (3 et 3-bis) les résultats montrent une évolution des élèves du groupe Cabri. Il faut rappeler que ces élèves ont été choisis pour leurs difficultés dans la reconnaissance des théorèmes de géométrie. Au cours des deux dernières phases, ces élèves Cabri obtiennent un taux de réussite proche (voire même plus élevé dans la phase 3) que les élèves du groupe témoin.

Revenons maintenant aux questions qui ont motivé cette étude.

Question 1 : *Dans quelle mesure un environnement de géométrie dynamique peut permettre de mettre en place un processus de médiation sémiotique relatif à la notion de statut opératoire d'un énoncé ?*

Question 2 : *Quelles en sont les incidences sur les connaissances des élèves et quel est le degré de contextualisation des connaissances éventuellement construites ?*

On ne peut pas se prononcer sur la mise en place du processus de médiation sémiotique car il n'apparaît pas dans les réponses des élèves. Cela nous conduit à penser que l'organisation de la séance ne convenait pas vraiment à notre objectif. En effet pour qu'un processus de médiation sémiotique se mette en place, il faut que l'élève explicite ces manipulations, ses actions à un expert (un enseignant). Les formulations de nos exercices sur les actions sont relativement pauvres car ils ne concernent que les déplacements des objets de bases et non les objets visés (pas de formulations sur les conditions d'arrêts des déplacements). Les formulations des élèves concernent surtout les théorèmes illustrés avec Cabri, ainsi que la notion d'hypothèse et de conclusion. Ainsi les formulations ont concerné davantage l'explicitation des théorèmes avec les hypothèses et la conclusion que les actions pouvant être associées aux hypothèses, et les rétroactions associées à la conclusion. Ainsi le travail avec Cabri n'a pas porté sur l'utilisation des outils disponibles avec Cabri pour distinguer hypothèses et conclusion d'un théorème, mais sur l'explicitation des hypothèses et de la conclusion de théorèmes connus.

Cependant nous devons préciser qu'à la fin de la séance d'utilisation de Cabri, les élèves semblaient avoir appris quelque chose puisqu'ils ont été capables d'identifier les hypothèses et conclusion dans les exercices de la dernière phase. L'utilisation d'un environnement de géométrie dynamique permet aux élèves de matérialiser la fonction des hypothèses. Ainsi, ils peuvent prendre conscience du contrôle des hypothèses sur la conclusion.

En parallèle à ces questions revenons sur les deux hypothèses formulées au début de cet article:

Hypothèse 1 : *si les élèves distinguent un théorème et sa réciproque alors ils sauront reconnaître les hypothèses et la conclusion.*

Hypothèse 2 : *Si un élève sait reconnaître les hypothèses et la conclusion alors il saura faire la différence entre un théorème et sa réciproque.*

Un résultat fort de cette étude est que les élèves qui savent reconnaître les hypothèses dans un théorème ne font pas forcément la différence entre un théorème et sa réciproque. Le fait de reconnaître les hypothèses et la conclusion dans un théorème ne suffit pas pour pouvoir différencier un. théorème et sa réciproque[6]. La deuxième hypothèse que nous avions faite n'est donc pas suffisamment précise pour être valide. Les élèves utilisent de nombreuses stratégies pour reconnaître les hypothèses ou les conclusions d'un énoncé. Certaines de ces stratégies ne regardent pas le sens de l'énoncé, mais s'appuient simplement sur la structure de la phrase, par effet de contrat didactique. Dans ces conditions, il devient très difficile de pouvoir prétendre que les élèves qui savent reconnaître les hypothèses et les conclusions sauront reconnaître le théorème. Cela entraîne de gros doutes sur la première hypothèse. Les élèves ont donc des stratégies pour retrouver les hypothèses dans un énoncé qui ne mettent pas en jeu le sens de l'énoncé. Dans la phase 3bis, la majorité des élèves a su différencier les théorèmes et leur réciproque cependant rien ne nous prouve que cette différenciation s'est faite grâce à la reconnaissance des hypothèses et conclusions.

[6] Cf. les résultats de l'exercice 1 de la phase 3.

IV. Conclusion

Notre étude ne nous permet pas de conclure positivement sur l'utilisation du processus de médiation sémiotique pour la notion de statut opératoire, mais elle est plutôt prometteuse au sens où en simplement une heure de travail en binôme, les élèves, qui étaient les plus faibles pour notre cadre, ont pu acquérir des connaissances sur le statut opératoire d'un énoncé.

Nous avons pu voir que les connaissances initiales des élèves entrent en jeu dans les manipulations de Cabri. Si l'on veut que l'apprentissage des théorèmes permette la reconnaissance des hypothèses et de la conclusion par l'utilisation de Cabri, il faut que l'utilisation de Cabri soit associée à l'apprentissage, au lieu d'intervenir après l'acquisition des théorèmes. Nous avons effectué une nouvelle expérimentation cette année avec des théorèmes non connus des élèves, et un milieu plus riche en interactions. Les résultats sont plus prometteurs.

Il apparaît aussi que des difficultés sur le statut du dessin continuent de persister alors que l'on demande aux élèves de démontrer. Certains élèves ont de nombreuses difficultés à élaborer une signification adéquate de la notion de figure. Par exemple Pauline a construit un triangle isocèle sur Cabri, alors que nous attendions un triangle quelconque. L'utilisation de Cabri tôt dans l'apprentissage de la géométrie permettrait, peut-être, de faire disparaître cette conception restrictive des objets géométriques.

Bibliographie

BALACHEFF N.(1987) Processus de preuve et situation de validation, *Educational Studies in Mathematics, vol.18, 147-176*

COUTAT S. (2003) Connaître et reconnaître un théorème en géométrie, Mémoire de DEA EIAH D, UJF, Grenoble

DUVAL R. & EGRET M.A. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repères IREM*, n°12 juillet 93

FALCADE R. (2002) Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction, *Petit x*, 58, 47-81

LABORDE C. et CAPPONI B. (1994) *l'apprentissage de la notion de figure géométrique,* RDM vol 14 n°1.2

MARIOTTI M. A. (2002) Influence of technological advances on students' mathematics learning. In: English L. - Bartolini Bussi M. G. – Jones G. – Lesh R. & Tirosh, D. (eds). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* Lawrence Erbaum Associates in press.

MONDEME G.(1999) Morceaux de vache en tableaux pour une voie lactée et directe. Les actes de lectures, la revue l'AFL n°66