LA DEMONSTRATION EUCLIDIENNE

Ridha NAJJAR,
Doctorant en didactique des mathématiques.
ISEFC, le Bardo, Tunis. Université Paris 7 – Denis Diderot.
Unité de recherche de physico-chimie moléculaire, la Marsa, Tunis.

Résumé : Pour démontrer les 465 propositions que renferment ses treize livres, Euclide a toujours suivi les mêmes étapes : énoncé, exposition, détermination, construction, démonstration, conclusion. A partir de deux propositions, l'une arithmétique et l'autre géométrique, nous mettons en relief la structure d'une démonstration euclidienne.

Les nombreuses tablettes d'argile gravées en écriture *cunéiforme* (en forme de "coins"), retrouvées à Babylone, le papyrus Rhind trouvé suite à des fouilles archéologiques dirigées dans la nécropole de Thèbes en Égypte, sont des documents avec tant d'autres qui témoignent d'une maîtrise de techniques arithmétiques et algébriques élaborées, et d'une possession d'importantes connaissances géométriques par les anciennes civilisations égyptienne et babylonienne (III^{e} ou I^{er} millénaire av. J.C.)

Ces pratiques mathématiques n'étaient pas destinées à élaborer des théories, ni à fonder des méthodes spécifiques de raisonnement. Elles visaient essentiellement à répondre aux préoccupations techniques de l'époque ; notamment en architecture, dans le commerce ou pour le partage des héritages ...etc. Pour cela nous ne rencontrons dans les papyrus égyptiens ou les tablettes babyloniennes, ni des théorèmes énoncés ni de preuves pour les résultats utilisés. Leur mathématique était essentiellement décrite par des algorithmes de calcul ou par des illustrations qui visaient à expliquer ou justifier des résultats géométriques. L'une des tablettes babyloniennes (tablette Plimpton 322), par exemple, contient un tableau où l'on découvre une liste de triplets, dits de Pythagore. C'est à dire des triplets (a,b,c) d'entiers naturels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$. Comme les triplets (4, 3, 5) et (120, 119, 169). Mais nous ne rencontrons nulle part une preuve, ni même un énoncé de l'égalité de Pythagore.

Ce n'est qu'à partir du V^{e} siècle av. J.C., que l'exigence d'une démonstration (et non d'une simple vérification) des propositions mathématiques s'impose pour les mathématiciens grecs. À cette époque, commence à apparaître un nouveau type de discours, organisé en axiomes, propositions et corollaires et caractérisé par sa rationalité et sa force de convaincre. Ce discours qui se veut de la vérité et appelé "preuve" ou "démonstration" continu à s'affiner au fil des temps pour culminer dans l'édifice des Eléments d'Euclide.

Nés vers 300 avant notre ère, les Eléments d'Euclide, gouverneront la géométrie jusqu'au XIX^{e} siècle. Répartis en treize livres et renfermant 465 propositions, ils constituent l'un des écrits mathématiques les plus importants de l'époque. Dans cet ouvrage, Euclide distingue deux choses : d'une part, les *principes premiers* posés comme tels et constitués des définitions (qui posent la signification des termes); des *notions communes* (appelées aussi *axiomes*) et des *postulats géométriques* (au nombre de cinq) ; et d'autre part, les propositions démontrées à partir de ces principes et des résultats établis précédemment dans l'ouvrage. Mais ce qui a caractérisé le plus les livres d'Euclide, se sont les procédures démonstratives qui ont marqué d'un trait distinctif les mathématiques grecques de celles des autres civilisations, notamment égyptienne et babyloniennes.

Méthodiquement, dans un style qui lui est propre, Euclide (315-255 av. J.-C.) s'appuie dans ses démonstrations sur trois éléments essentiels : l'évidence des axiomes, la déduction logique et la "contemplation des figures". D'un autre côté, nous constatons que dans toutes ses démonstrations, qu'elles soient géométriques ou arithmétiques, Euclide suit toujours un même "rituel", composé d'une suite d'étapes toujours identiques, dont Proclus (un commentateur grec d'Euclide du Ve siècle de notre ère) nous a gardé les noms :

Protasis, Ekthesis, Diorismos, Kaskateu, Apodeixis, Sumperasma.

À travers deux exemples de démonstration, l'une arithmétique (proposition 20 du livre IX) et l'autre géométrique (proposition 37 du livre I), nous allons essayer de donner une idée de la manière dont procède Euclide pour démontrer les 465 propositions qu'enferment ses Eléments.

Les énoncés

Proposition 20 du livre IX. (Infinité des nombres premiers)

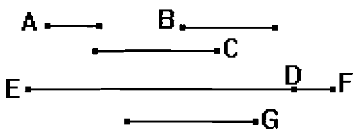
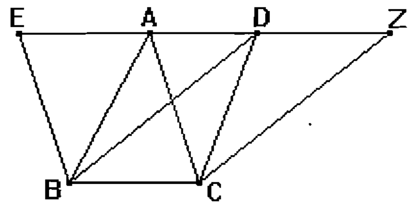
Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposés.

Proposition 37 du livre I.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Les démonstrations

Pour faire apparaître les différentes parties constitutives d'une démonstration euclidienne, et afin de voir comment Euclide suit toujours le même "rituel" dans ses démonstrations, nous proposons de présenter ces deux propositions ainsi que leurs démonstrations dans le tableau comparatif suivant :

Les étapes	Proposition 20, livre IX	Proposition 37, livre 1
1) L'énoncé (protasis) : Il s'agit d'énoncer la proposition à démontrer ou la construction à effectuer.	Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposés.	Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.
2) L'exposition (ekthesis) : Il s'agit de désigner un exemple générique pour présenter la démonstration de la proposition.	Soient les nombres premiers proposés A, B, C.	Que les triangles ABC, DBC soient sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AD, BC ;
3) La détermination (diorismos) : Il s'agit de réitérer l'énoncé de la proposition à propos de l'exemple introduit dans l'ekthesis.	Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C.	Je dis que le triangle ABC est égal au triangle DBC.
4) La construction (kaskateu) : Il s'agit d'effectuer une construction graphique qui illustre l'exemple introduit dans l'ekthesis et de lui ajouter les éléments nécessaires à la démonstration.	En effet, que soit pris le produit de A, B, C, et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE.  	Prolongeons de part et d'autre la droite AD aux points E, Z, et par le point B conduisons BE parallèle à CA, et par le point C conduisons CZ parallèle à BD. 
5) La démonstration (apodeixis) : Il s'agit de prouver, sur l'exemple introduit dans l'ekthesis la véracité de l'énoncé.	Alors, ou bien EF est premier ou bien non. D'bord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, EF, plus nombreux que A, B, C. Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc divisible par un certain nombre premier. Qu'il soit divisible par le [nombre] premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A, B, C. En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A, B, C divise DE ; donc G divisera aussi DE.	Les figures EBCA, DBCZ sont des parallélogrammes, et ces parallélogrammes sont égaux (proposition 35)[2] ; car ils sont sur la même base BC, et entre les mêmes parallèles ; mais le triangle ABC est la moitié du parallélogramme EBCA ; car la diagonale AB le partage en deux parties égales ; le triangle DBC est la moitié du parallélogramme DBCZ, car la diagonale DC le partage en deux parties égales ; mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles ; donc le triangle ABC est égal au triangle DBC.

[1] Pour Euclide un nombre est toujours distinct de l'unité, car pour lui un nombre est "*une multitude composé d'unités*"

[2] Proposition 35, du livre I : "*Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux*"

	Mais il divise aussi EF ; il divisera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre[1] ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A, B, C. Et il est supposé premier. Donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C , G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C.	
6) La conclusion (sumperasma) : Il s'agit de reformuler la proposition comme résultat (" donc ... "), en toute généralité, en ajoutant la clausule " ce qu'il fallait démontrer ".	Donc, les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposés. Ce qu'il fallait démontrer.	Donc, les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît ainsi, que la démonstration euclidienne suit une démarche logique et déductive qui s'appuie sur trois éléments essentiels :

✓ Les *hypothèses* propres à l'énoncé.

✓ Les *"prémisses"*, qui sont les demandes, les notions communes (posées au préalable par Euclide dans son premier livre) et les assertions démontrées antérieurement.

✓ les *"évidences"* qui résultent de la lecture visuelle d'informations sur la figure, comme par exemple en affirmant dans la proposition 37 du livre I que les figures EBCA, DBCZ sont des parallélogrammes.

Nous pensons que les étapes les plus intéressantes dans la démonstration euclidienne sont les stades intermédiaires, ceux où l'on "sort" de l'énoncé général pour raisonner sur un exemple, particulier dans sa désignation mais générique dans sa signification. Cet exemple est souvent accompagné d'un diagramme, qui n'est nullement une simple illustration du texte, ou une manière synthétique de représenter les hypothèses, mais plutôt une caractéristique essentielle sur laquelle repose la preuve et qui aide en même temps à suivre son déroulement.

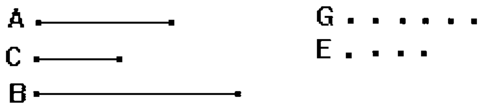
Même dans les propositions arithmétiques, nous trouvons que les démonstrations euclidiennes sont exposées à propos de nombres particuliers auxquels on donne un nom : si ce nombre n'est pas spécifié, on le dessine sous forme de segment et s'il est spécifié, on le représente par des points.

Ainsi, dans la démonstration de la proposition XII du livre II :

"Les grandeurs qui sont commensurables, avec une même grandeur sont commensurables entre elles"

nous lisons au début :

Que chacune des grandeurs A, B soit commensurable avec C ; je dis que A est commensurable avec B.



Car puisque A est commensurable avec C, A a avec C la raison[3] *qu'un nombre a avec un nombre ; qu'il ait celle que G a avec E...*

Nous voyons ici, qu'Euclide donne comme exemple de nombres ayant une raison entre eux les nombres G = 6 et E = 4.

Nous soulignons toutefois, que cette désignation du nombre, ou la représentation graphique d'une figure géométrique ne diminue en rien la généralité de la démonstration : c'est que celle-ci était répétable sans modification linguistique pour toute donnée vérifiant l'hypothèse. Pour cela, Euclide achève toujours sa démonstration par une conclusion qui consiste à re-énoncer la proposition démontrée d'une façon complètement identique à l'énoncé de départ. Ce va-et-vient général/particulier/général, de l'énoncé à la conclusion, traduit la validité universelle de la démonstration euclidienne.

Bibliographie :

EUCLIDE, (1993). *Les oeuvres* ; traduites littéralement par F.PEYRARD, revues et augmentées par M.JEAN ITARD, Paris : Librairie scientifique et technique.

BARBIN E, (1998). *La démonstration mathématique dans l'histoire*. IREM de Lyon.

ABDELJAOUAD Mahdi. *Histoire des mathématiques pré-islamiques*. Cours de DEA, MA 122. ISEFC. Année universitaire 2001/2002.

REVUE : Les cahiers de Science & Vie : Mathématiques. Ce que les grecs ont vraiment inventé. No 55 /Février 2000.

[3] Euclide défini la raison, comme « *une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité* ».