PREUVE OU DEMONSTRATION, UN THEME POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES : DEUXIEME PARTIE

Michèle Gandit
IUFM de Grenoble

Dans la première partie de cet article[1], nous avons examiné quelques scènes de la vie de nos classes qui nous ont permis de mettre à jour des règles d'un contrat didactique coutumier par rapport à la démonstration, en vigueur au collège, voire au lycée, où la forme du discours l'emporte sur le sens de la preuve :

- Règle R_1 dite du « on sait que-or-donc » : pour faire une démonstration en géométrie, on articule différents pas ternaires, hypothèse-règle-conclusion, l'hypothèse étant introduite par « on sait que », la conclusion par « donc », la règle justifiant le passage de la première à la seconde étant éventuellement introduite par « or ».
- Règle R_2 dite de « transcription de l'énoncé» : pour faire une démonstration en géométrie, on fait une figure que l'on accompagne des hypothèses (souvent appelées données) et l'on écrit ce que l'on veut démontrer ; ceci est indépendant du projet de preuve.
- Règle R_3 dite des « petits pas » : dans une démonstration, il faut expliciter tous les pas, même les plus petits, ceux qui relèvent d'une définition.
- Règle R_4 dite du « fichier » : dans une démonstration, on ne doit utiliser que les connaissances vues en cours ou celle d'une liste donnée.
- Règle R_5 : on doit commencer l'apprentissage de la démonstration dans le cadre de la géométrie plane.

Remarquons que les règles R_3 et R_4 facilitent la gestion des « trous[2] » par les enseignants.

---

[1] Paru dans le numéro 65 de ***Petit x***.

[2] Pour expliciter cette notion de « trou », nous nous sommes placés du côté du lecteur (ou de l'auditeur) du produit d'une preuve, c'est-à-dire un membre du public auquel s'adresse la preuve. Cet interlocuteur constate qu'un argument est omis, qu'un résultat intermédiaire n'est pas donné. Il se peut que cette omission relève de la volonté de l'auteur de ne pas dire certains arguments ou résultats, qu'il juge élémentaires, pour en mettre en valeur d'autres, qu'il considère comme plus pertinents. Il se peut aussi que l'auteur ne sache pas compléter ces manques constatés ou mésestime l'importance relative des arguments. Ces deux possibilités nous présentent ainsi deux catégories de trous.

Ce contrat repose sur les représentations qu'ont les enseignants de la preuve, mais aussi de la façon dont on peut l'enseigner. Dans la première partie, nous avons identifié certains éléments de conceptions des enseignants par rapport à la preuve :

- Elément de conception *P* (pas) : une démonstration est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle d'inférence-conclusion.
- Elément de conception *T* (tout est écrit) : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.
- Elément de conception *G* (géométrie) : la démonstration s'apprend dans le cadre de la géométrie plane.
- Elément de conception *V* (vérité) : une démonstration est destinée à établir la vérité d'un résultat, elle a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute.
- Elément de conception *R* (rationalité) : une démonstration répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.

Aussi avons-nous envisagé de créer une situation de formation pour la preuve, à destination des enseignants, débutants ou expérimentés, la preuve (ou démonstration) étant considérée à la fois comme processus[3] et comme produit[4].

I. Analyse a priori de la situation

Cette situation est proposée à une trentaine d'enseignants débutants dans le cadre d'un module[5] sur la démonstration à l'IUFM de Grenoble, le vendredi 14 mars pour une durée de six heures. Elle se décompose en quatre phases qui vont être décrites ci-dessous. Explicitons auparavant les objectifs visés et les difficultés inhérentes.

1) La connaissance visée

« Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens et que nous appellerons *situation fondamentale.* » (G. Brousseau, 1986)

La connaissance que nous visons ici touche à la fois à la preuve et à son enseignement. La preuve ne peut prendre son sens que par rapport à un problème donné (ou à une question d'un problème), dans la recherche de conjectures et la réduction du doute. Aussi cette situation doit-elle faire apparaître la preuve dans cette véritable dimension épistémologique, permettant d'induire fortement une transformation des

[3] Le **processus de preuve** recouvre les différents gestes, attitudes, intentions, opérations mentales, afférents à l'action de prouver dans le cadre de la rationalité mathématique, dont certains sont plus ou moins visibles de l'extérieur suivant que cette action a lieu au sein d'un groupe ou dans le domaine privé de la personne. Il se met en effet en marche sous la triple impulsion qui naît de la recherche d'une conjecture, du désir de combler le doute sur cette conjecture, et du besoin d'explication.

[4] Le **produit de la preuve** est un écrit qui résulte du processus, destiné à être communiqué à l'extérieur. Il est certes constitué en « une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées » comme le propose N. Balacheff (1987) pour ce qu'il nomme la démonstration, mais il peut aussi contenir des indications heuristiques, s'autoriser des remarques qui permettent au lecteur de comprendre le sens profond des arguments en jeu, leurs raisons, ne craignant pas de montrer des pistes qui n'ont pas abouti, de donner un contre-exemple pour invalider une conjecture formulée.

[5] Ce sont des stagiaires PLC2 (professeur de lycée-collège deuxième année) de mathématiques. Ce module a été choisi par les professeurs stagiaires. Il est d'une durée totale de douze heures.

conceptions des enseignants sur la preuve elle-même, mais aussi sur son enseignement, provoquant une réflexion sur le contrat usuel en vigueur dans leurs classes. Mettre à jour ces conceptions sur la preuve, d'une part, faire prendre conscience aux enseignants de l'écart qui réside entre la preuve en mathématiques et la conception qu'ils en ont, d'autre part, tels sont donc nos objectifs. Ces conceptions des enseignants, nous en construisons des éléments, directement à partir de leurs discours sur la preuve, ou par analyse de ce qu'ils proposent à leurs élèves, ou encore par observation de leurs comportements révélés au travers d'une situation adidactique de validation par rapport à un problème. Les trois voies seront explorées.

La recherche d'une situation adidactique de validation pose le problème de la connaissance en jeu. Il s'agit bien pour nous de la preuve, mais comme le dit N. Balacheff (1988), « l'apprentissage de la démonstration doit se faire dans le même mouvement que celui des mathématiques elles-mêmes. Il ne peut être « isolé » à des fins d'enseignement comme cela peut être le cas pour d'autres notions. » Nous sommes du même avis à condition que le savoir mathématique en jeu puisse suffisamment s'effacer pour laisser paraître la preuve, sous le double aspect du processus et du produit tels que nous les avons définis. Aussi avons-nous choisi, pour cette phase de validation, de faire chercher aux enseignants un problème qui relève des mathématiques discrètes, mettant en jeu des notions suffisamment simples pour que le problème du sens et de l'enjeu de vérité redeviennent essentiels. Or la situation ne devant pas seulement faire apparaître la preuve comme un *outil* de validation par rapport au problème choisi, nous l'avons complétée par une phase où la démonstration puisse prendre le statut d'*objet*, soit une phase de débat sur son contenu, sur sa forme, son adéquation avec le contrat usuel…

2) La première phase de la situation : le questionnement direct

Ce questionnement vise les conceptions que les enseignants ont de l'activité mathématique d'une part, de l'enseignement de la démonstration au collège, d'autre part. Ce choix doit, pensons-nous, montrer de manière plus flagrante que la question directe, « Qu'est-ce qu'une preuve ou une démonstration pour vous ? », l'importance de l'écart entre la nature de l'activité mathématique que les professeurs souhaitent voir pratiquée par leurs élèves et celle qui est mise en jeu dans les situations qu'ils leur proposent pour l'apprentissage de la preuve.

Voici les questions ; les enseignants doivent y répondre individuellement ; elles sont écrites au tableau ; le temps réservé à cette phase est d'une demi-heure :

Quelles attitudes, quels comportements souhaiteriez-vous qu'un élève ait quand il fait des mathématiques ? Proposez un énoncé qui, pour vous, est bien adapté au début de l'apprentissage de la démonstration. Expliquez pourquoi.

Avant d'anticiper sur les réponses à la première question, qui doit permettre de mettre en avant les conceptions que les enseignants ont de l'activité mathématique, nous décrivons brièvement nos attentes à la deuxième question : nous prévoyons des énoncés voisins de ceux que l'on trouve dans les manuels de collège, des situations mettant essentiellement en relief la fonction explicative de la preuve, créant peu de doute chez les élèves, tout à fait propices au bon fonctionnement du contrat usuel déjà décrit.

Détaillons maintenant les réponses attendues à la première question, sujet délicat de la caractérisation de **l'activité mathématique en soi**. Dans la communauté mathématique, chaque fois que s'engage un débat d'explicitation de ce que signifie faire des mathématiques, il n'en ressort jamais un consensus sur ce qui, pourtant, fonde épistémologiquement nos enseignements. Faire des mathématiques[6], ce serait s'engager dans des situations où s'entrelacent concepts et techniques, concret et abstrait, particulier et général, représentations personnelles locales et représentations canoniques universelles, langage personnel et langage codifié, recours à l'imaginaire et respect d'une rigueur implacable. Ce serait aussi chercher à percevoir ce qu'il y a de général ou de généralisable derrière le particulier, comprendre les raisons de la vérité de tel résultat, mais aussi les raisons de la stratégie qui a mené au résultat, ne pas hésiter à formuler des conjectures, en tester la pertinence et la validité, s'engager sur la vérité de telle conjecture ou la réfuter, comprendre que la plupart des problèmes ne sont pas naturellement mathématiques, mais qu'ils nécessitent une modélisation, avancer dans une méthode ou une technique sans perdre le contrôle.

Ce que nous souhaitons que les élèves comprennent des mathématiques

Notre propre image des mathématiques, celle qui oriente notre action dans la classe, repose sur notre vision du monde mathématique constitué d'objets mathématiques, objets de pensée créés par une communauté[7], qui sont à distinguer de leurs représentations[8]. Ces objets, et les affirmations à caractère général qui les concernent, telles que « *Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu , alors c'est un parallélogramme* », sont des résultats, des productions de l'activité mathématique, qui est régie par une rationalité spécifique : elles sont vraies s'il n'y a pas de contre-exemple, un seul contre-exemple suffit pour qu'elles soient fausses. Cette règle du vrai et du faux en mathématiques est aussi la base du caractère de nécessité des énoncés : dès que les hypothèses sont vérifiées, ce qui est annoncé dans la conclusion ne peut que se réaliser. Les énoncés ont ainsi un caractère prédictif, la validité de la prédiction étant garantie. Cette rationalité propre aux mathématiques, où les contradictions sont intolérables, est différente[9] de celle du quotidien. Il n'en demeure pas moins présent à notre esprit qu'il existe des énoncés auxquels on ne sait pas attacher de valeur de vérité, soit parce que l'on ne sait pas prouver qu'ils sont vrais ou faux, soit parce que, dans la théorie où ils se placent, dire qu'ils sont vrais ou dire qu'ils sont faux ne conduit à aucune contradiction. Et même si l'élève, lui, est souvent dans cette situation « d'indécidabilité », nous souhaiterions qu'il adopte l'attitude du doute, qu'il pose un regard critique sur tout énoncé nouveau, quel qu'il soit. Ces objets de pensée sur lesquels porte le travail mathématique sont issus de problèmes relatifs à la réalité (et aussi de problèmes liés à d'autres objets de pensée), et la connaissance que l'on a d'eux peut permettre d'agir, de prévoir, dans cette réalité. C'est la fonction de modèle des mathématiques.

---

[6] Nous reprenons des éléments de la conclusion d'un rapport de recherche INRP sur « Quand l'élève fait-il véritablement des mathématiques en cours de mathématiques ? », rédigé par un groupe de l'IREM de Grenoble (2003).

[7] Ceci ne veut pas dire que ces objets sont loin de la réalité. Bien au contraire, ils sont souvent construits pour répondre à des problèmes du monde réel.

[8] Lors de la recherche, il y a très souvent, en géométrie par exemple, superposition d'une représentation de l'objet de pensée, nous dirons figure, et d'un objet réel, nous dirons dessin. La même trace sur la feuille peut être vue comme représentation de l'objet mental triangle ou comme dessin sur lequel j'expérimente, je mesure. Le même problème se pose dans le domaine numérique avec l'écran de la calculatrice.

[9] Au sens qu'elle ne fonctionne pas toujours comme la logique du quotidien, mais elle ne lui est tout de même pas complètement étrangère, répétons-le.

Face à un problème, toute personne qui apprend ou pratique les mathématiques adopte une attitude de recherche faite d'essais, d'erreurs, d'intuitions, de fausses pistes, d'expérimentations, s'engageant ainsi dans un processus de preuve. On ne fait des mathématiques que si l'on adopte cette attitude de preuve, les preuves étant là pour établir les connaissances. Si la démonstration (ou preuve) peut s'aider des sens, elle présente cependant la caractéristique de se détacher de l'expérience et du monde sensible. Enfin la preuve prend son statut dans une communauté, la classe en est une, avec son corpus de connaissances et son niveau de preuve qui évoluent au cours du temps. La dimension sociale est importante : chacun doit pouvoir apporter ses arguments, examiner ceux des autres, être entendu. Les moments où c'est le professeur qui dit le vrai ou le faux, ne doivent pas empiéter sur la validation, faite par l'élève lui-même, par des moyens mathématiques : chacun devrait arriver à se créer des convictions, soit par intuition remise éventuellement en question, soit en se donnant des preuves mathématiques, et non parce que le professeur, personne d'autorité, a dit.

Pour préciser ce que nous entendons par **activité mathématique**, nous reprenons à notre compte la description qu'en donne P. Boero (1999), en six phases, allant de la production d'une conjecture à la construction d'une démonstration. Les voici, présentées dans un certain ordre, mais dans la réalité du travail du mathématicien les phases heuristiques sont imbriquées aux phases d'élaboration de la démonstration :

- exploration du problème donnant lieu à une conjecture : elle appartient au travail heuristique privé du mathématicien ;
- communication par un document de l'énoncé qui se dégage de la phase précédente ;
- exploration de la conjecture, les limites de sa validité et un travail, ici encore privé, du mathématicien concernant sa validation ;
- sélection d'arguments théoriques enchaînés de façon déductive concernant la validation de la conjecture, dont un résumé puisse être communiqué oralement à un public averti ;
- élaboration d'un texte de preuve de la conjecture qui soit acceptable selon les standards mathématiques en vigueur ;
- approche de la preuve formelle (que Boero appelle la démonstration), cette phase ne concernant parfois que quelques parties de la preuve (Thurston pense même qu'il est pratiquement impossible, voire vide de sens pour le mathématicien, de produire une preuve complètement formelle pour la plupart des théorèmes actuels en mathématiques).

Nous considérons que ce que nous appelons le **processus de preuve** recouvre les trois premières phases et que les trois autres constituent le **produit** du processus de preuve. Nous ne réservons pas le mot de démonstration à la seule preuve formelle, comme le fait P. Boero, la démonstration étant, de notre point de vue, le produit du processus de preuve. Ainsi cette description de l'activité mathématique et ce qui a trait à la preuve dans l'image que nous avons des mathématiques constituent notre savoir de référence.

Les réponses des enseignants auxquelles on peut s'attendre

Cette question de l'activité mathématique des élèves, nous l'avions déjà posée à plusieurs stages de formation continue et en formation initiale d'enseignants. Les réponses peuvent être classées en cinq rubriques. La première regroupe les aspects de recherche, prise d'initiative et entrée dans un processus de preuve de la part des élèves.

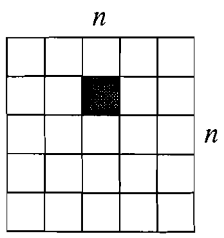
Cette rubrique tient une place assez importante dans la représentation qu'ont les enseignants de l'activité mathématique qu'ils souhaiteraient voir pratiquer par leurs élèves. La deuxième rubrique, relative à l'organisation des connaissances, est représentée de façon beaucoup moins importante que la première. La troisième, sous l'appellation de développement de l'esprit critique des élèves, d'une attitude de contrôle, de doute, est davantage présente dans les représentations des enseignants, surtout des enseignants expérimentés. La quatrième rubrique regroupant l'argumentation, la communication et la rationalité mathématique, est très largement présente, les demandes de rigueur de la part des élèves étant nombreuses, notamment chez les enseignants expérimentés. A ces rubriques s'ajoute une cinquième, très présente, que l'on nomme prise de distance sur son travail ou sur les mathématiques : on y retrouve les demandes de motivation pour les mathématiques, le plaisir de faire des mathématiques, d'attitude de calme..., certaines de ces demandes ne concernant que de très loin l'activité mathématique elle-même.

Au vu de ces réponses, très semblables, bien qu'issues de publics différents, nous nous attendions à un bilan du même type de la part de nos trente enseignants débutants. Quatre remarques qui devaient se retrouver vraisemblablement dans ce bilan : écart sensible avec notre propre conception de l'activité mathématique, importance de la cinquième rubrique où certains souhaits des enseignants ne concerneraient pas du tout l'activité mathématique, absence de preuve ou démonstration, visibilité du contrat didactique, comme par exemple, au travers d'expressions telles que « que l'élève sache rédiger avec rigueur ».

3) La deuxième phase de la situation : la résolution d'un problème

Les enseignants, répartis par groupe de quatre, vont chercher, pendant deux heures, le problème dit du « polymino troué d'une case », dont voici l'énoncé :

On considère un polymino[10] carré privé d'une case (un exemple est dessiné ci-dessous). Est-il possible de le paver avec des dominos ?[11]



Le côté n du carré n'étant pas fixé, il constitue l'un des paramètres de la discussion. Un domino est constitué de deux cases qui ont un côté commun. Si n est pair, n^2 l'est aussi, donc $n^2 - 1$ est impair, le polymino ne peut alors être recouvert par des dominos. Le fait que n soit impair est ainsi une condition nécessaire pour que le pavage soit possible. Cette condition n'est évidemment pas suffisante : l'expérimentation sur des cas simples, par laquelle débute habituellement l'appropriation de ce problème, permet de s'en assurer.

---

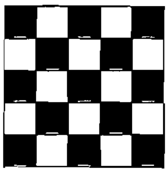
[10] Plus généralement, étant donné un quadrillage à mailles carrées identiques, on appelle polymino un ensemble de ces mailles ou cases.

[11] Pour l'étude de ce problème nous faisons référence à notre propre recherche et à celle de collègues, et surtout à D. Grenier et C. Payan (1998).

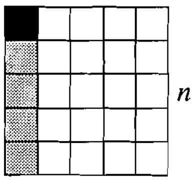
Dans le cas où n est impair, la position de la case manquante est un autre paramètre du problème. Si, pour une certaine position de la case manquante, on réussit à paver le polymino par des dominos, la question est résolue, mais si, après plusieurs essais, on ne trouve pas de pavage qui convienne, on ne peut pas en tirer la conclusion que le pavage est impossible : la preuve devient alors nécessaire. Il apparaît ainsi deux types différents de raisonnement à développer, l'un pour prouver qu'il suffit que la case manquante soit dans telle position pour que le pavage soit possible, l'autre pour prouver la réciproque.

L'entrée dans ce problème est facile, les connaissances en jeu sont élémentaires : il faut savoir ce qu'est un nombre pair, calculer l'aire d'un carré, comprendre ce que l'on appelle un pavage. Il est cependant lié à une problématique de recherche actuelle dans le domaine des mathématiques discrètes : le problème du pavage d'un polymino par des polyminos plus petits n'est actuellement résolu que dans quelques cas particuliers.

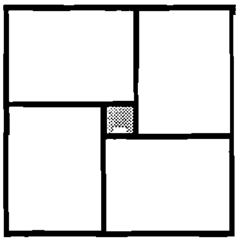
Par ailleurs, ce problème met en jeu des pratiques mathématiques peu courantes dans les classes, comme, par exemple la modélisation, la structuration des objets, la décomposition-recomposition, l'induction. Comment faire apparaître sur le polymino le recouvrement de deux cases par un domino ? Comment *structurer cet objet* « polymino » de manière à visualiser le recouvrement par des dominos ?

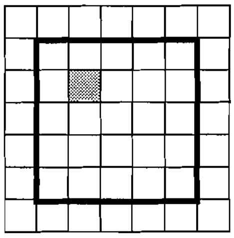


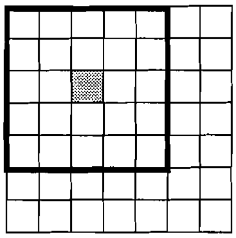
C'est en effet la relation de voisinage entre cases, par un côté en commun, qui nous intéresse en premier lieu. On peut la faire apparaître par la *coloration* en damier, une case noire étant voisine d'une case blanche, au sens qu'elles ont un côté commun. Ainsi chacun de ces couples de cases, une noire, une blanche, pourra être recouvert par un domino. Dès lors, la coloration en damier permet de mettre en évidence que si la case manquante est une case blanche du polymino, le pavage par des dominos est impossible : le pavage n'est en effet possible que si le nombre de cases noires est égal à celui des cases blanches.



Le *raisonnement par décomposition-recomposition* consiste à partager l'objet que l'on étudie en différents morceaux pour lesquels on peut conclure. Ainsi, pour traiter par exemple le cas où la case manquante est dans un coin, on peut s'attendre à la stratégie qui consiste à décomposer le polymino $n \times n$ (n impair) en deux rectangles, celui qui correspond à la zone grise ci-contre et celui qui correspond à la zone blanche. Le rectangle gris, de type $1 \times (n - 1)$ est pavable par des dominos, situés l'un au-dessous de l'autre, puisque $n - 1$ est pair. Le rectangle blanc ayant aussi une dimension paire, il est pavable par des dominos. Ce polymino est donc pavable. De manière plus générale, ce type de raisonnement peut être utilisé pour prouver la faisabilité du pavage dans le cas où n est impair et pour une position de la case manquante sur une case noire du damier ci-dessus.



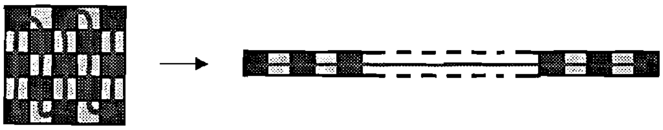




Voici ci-contre un découpage qui permet d'obtenir quatre rectangles qui, ayant un côté pair, sont pavables. Il fait apparaître un algorithme de pavage, par suite une validation de la preuve que le pavage est, dans ce cas, toujours possible. D'autres découpages pourraient être proposés (nous avons ci-dessous une approche du raisonnement par induction) : chaque carré de côté impair, privé d'une case noire dans la coloration en damier déjà évoquée, est découpé en un carré plus petit, de côté impair aussi, privé d'une case noire également, et d'une bande, en carré ou en L, pavable par des dominos. Le découpage proposé au milieu ne permet pas de traiter les cas où la case manquante est sur le bord du carré initial et n'est pas possible lorsque le carré initial est de côté 1. La partition proposée à droite, quant à elle, permet de traiter toutes les possibilités de case manquante pour le carré initial, sauf celui où il est de côté 1 et celui où la case manquante est la case centrale du polymino 3×3. Ces deux cas devraient apparaître comme les fondements de la récurrence.

Outre les comportements mathématiques déjà évoqués, ce problème permet de revenir sur le *sens de l'implication*, la notion de *condition nécessaire* et celle de *condition suffisante*. Pour éclairer ce point, revenons sur la pratique de la preuve en classe de collège, à propos des théorèmes dont la réciproque est vraie, comme par exemple, le théorème dit « théorème des milieux » (cas particulier du théorème de Thalès appliqué au triangle). La stratégie de démonstration est la suivante : on démontre d'abord le théorème direct - *Dans un triangle, la parallèle à un côté, menée par le milieu d'un côté, passe par le milieu du troisième côté* – on utilise le théorème direct pour démontrer sa réciproque – *Dans un triangle, la droite joignant les milieux I et J de deux côtés est parallèle au troisième* – : étant donnée l'unicité du milieu d'un segment, d'une part, de la droite qui passe par deux points, d'autre part, (IJ) est nécessairement confondue avec la parallèle au troisième côté qui passe par I, puisque cette dernière, d'après le théorème direct, passe par J. Ceci favorise donc la croyance que la preuve d'une condition suffisante est très liée à celle de la condition nécessaire : pour démontrer l'une, on s'inspire, dans les classes, de ce qui a été fait pour l'autre. On notera *NS* (nécessaire-suffisant) cet élément de conception sur la preuve, que nous devrions rencontrer ; il est en effet favorisé par les types de problèmes pratiqués dans les classes. Celui-ci, le « polymino privé d'une case », permet justement de montrer les limites du domaine de validité de *NS*.

De la part des enseignants, outre les raisonnements proposés ci-dessus, nous nous attendons à voir apparaître rapidement les résultats complets de l'étude du cas où $n = 3$. Des considérations de symétries ou de rotations devraient permettre de réduire le nombre de cas à étudier. La coloration en damier est attendue, mais simplement comme un moyen de repérer certaines cases, elle ne devrait pas fonctionner pas comme un outil de preuve de l'impossibilité du pavage dans le cas où la case manquante est une case blanche, celle-ci constituant une difficulté du problème. Pour la preuve de la faisabilité du pavage, dans le cas où *n* est impair et si la case manquante est une case noire du damier, on pourrait penser à « déplier » le polymino coloré en damier comme on peut le voir ci-dessous : on déplie, puis on partage le chemin qui suit le damier en deux chemins qui comptent chacun un nombre pair de cases, qui sont donc pavables. Nous ne nous attendons pas cependant à rencontrer souvent cette stratégie. On reconnaît derrière cette stratégie une modélisation du problème à l'aide d'un graphe, celui-ci permettant de traduire la relation de voisinage de deux cases, qui peuvent être recouvertes par un domino, l'une étant attachée à l'autre par un côté.



Pendant ces deux heures de recherche en groupe, un débat de preuve aura lieu, avons-nous déjà dit. Un des groupes est filmé. Cette phase doit se conclure par l'écriture d'un compte-rendu : ce que nous appelons le **produit** de la preuve, et que nous souhaiterions voir remplacer ce qui est communément appelé démonstration dans le contrat usuel déjà décrit. Les membres du groupe, que nous allons regarder faire des mathématiques, raisonnent en fonction de certaines représentations de la discipline, de ses objets, de la preuve. Les représentations que chacun s'est construites, loin d'être identiques, vont régir les choix opérés, dans la recherche privée et dans les échanges avec les autres. Pour ce qui nous concerne dans cette partie, ce n'est qu'au travers du débat en groupe que nous y aurons accès, encore que très partiellement. Nous cherchons, de l'extérieur, à saisir des indices qui nous permettront de construire les conceptions, sur la preuve, dont relèvent les comportements observés.

Ainsi à l'issue de ce temps de recherche, la consigne suivante sera donnée.

Rédiger en une demi-heure une présentation de la résolution du problème ou d'un point particulier. Cette rédaction sera relevée.

L'objectif, répétons-le, est de confronter ce qui aura été écrit en guise de compte-rendu de recherche avec ce qui sera considéré comme une démonstration. Il est prévu de ne pas donner cette consigne de rédaction avant la fin du temps de recherche pour éviter la confusion entre l'argumentation écrite qui accompagne habituellement le processus de preuve et la rédaction du produit de ce processus, destinée à être communiquée aux autres groupes.

4) La troisième phase de la situation : débat de preuve et débat sur la preuve

Il est prévu de ne retenir, pour le débat avec l'ensemble de tous les stagiaires, que quelques-unes des présentations rédigées par les groupes, celles qui pourraient faire ressortir des conceptions différentes sur la preuve, par exemple, celles qui mettraient l'accent sur l'émission de conjectures, la validation, la réfutation ; celles qui ressembleraient à des comptes-rendus de recherche, incluant expérimentation, explicitation de démarche ; celles qui seraient régies davantage par des contraintes de forme, présentation, écriture, au détriment de la recherche de vérité. Une préparation du débat nous semble utile. A cet effet chaque stagiaire recevra une feuille où est inscrite l'une des deux questions suivantes, ainsi qu'une présentation (la même pour tous) d'un groupe : en quelques minutes, il devra répondre à sa question par rapport à la présentation distribuée. Une autre production de groupe lui sera ensuite distribuée, il aura à nouveau quelques minutes pour répondre, et ainsi de suite... Un maximum de cinq présentations est fixé. Les stagiaires ignoreront qu'il y a deux sortes de questions, ce qui devrait favoriser le débat sur preuve et démonstration.

Question n°1 : En quoi chacune de ces productions est-elle une preuve ? En quoi n'en est-elle pas ? Pourquoi ? Que modifieriez-vous pour qu'elle en soit une ?
Question n°2 : En quoi chacune de ces productions est-elle une démonstration ? En quoi n'en est-elle pas ? Pourquoi ? Que modifieriez-vous pour qu'elle en soit une ?

5) La quatrième phase de la situation : émergence de contradictions

Il s'agit de conclure par une mise en regard de trois points :

- tout d'abord, les attitudes et comportements attendus de la part des élèves lorsqu'ils font des mathématiques, qui auront été proposés à la première phase ;
- ensuite les types d'attitudes, de comportements que l'on peut prévoir de la part des élèves s'ils sont confrontées aux situations destinées à l'apprentissage de la démonstration, dont des exemples auront été proposés par les enseignants lors de la première phase ;
- enfin les conclusions du débat sur les processus de preuve et les productions des groupes de stagiaires à propos du problème du polymino.

Des contradictions seront visibles entre ce que les enseignants veulent que les élèves fassent et ce qu'ils leur demandent de faire. On peut espérer qu'elles amènent les professeurs à changer leur rapport à la preuve. Une remise en question des règles du contrat usuel pourra se produire pour quelques-uns d'entre eux.

II Les résultats de la première phase : qu'attendent les professeurs de leurs élèves, quelles activités leur proposent-ils ?

1) Quelles attitudes, quels comportements souhaiteriez-vous qu'un élève ait quand il fait des mathématiques ?

Telle est la première question à laquelle doivent répondre par écrit les enseignants. Pour classer leurs attendus sur l'activité mathématique de leurs élèves, nous pouvons reprendre les cinq rubriques proposées dans l'analyse a priori de la situation.

Un premier commentaire complète nos remarques de l'analyse a priori. Il concerne l'importance de la place occupée par les attendus qui ne sont pas nécessairement liés aux mathématiques, la dernière rubrique. Lorsque l'on pose la même question à des enseignants qui ne sont pas débutants, les réponses sont différentes sur ce point. Certains stagiaires répondent comme s'il n'était aucunement question de l'activité mathématique, ils montrent simplement leur représentation de l'élève idéal qui assiste à leur cours. Ceci est assez révélateur des préoccupations premières des enseignants qui débutent : ils sont essentiellement à la recherche d'une position d'autorité dans la classe, **concevant difficilement que l'intérêt et la concentration des élèves soient liés à la**

tâche qu'ils ont à accomplir, au problème qu'ils ont à résoudre. Ceci est fort bien mis en évidence dans une des réponses, qui se termine par « ... après toutes ces conditions on arrive enfin à faire cours correctement... ». Il ne faut en effet pas voir trop d'ironie dans cette phrase : l'auteur est sincère !

Si la question posée aux enseignants fait référence à l'activité mathématique de l'élève, la plupart des réponses proposées évoquent néanmoins l'élève en cours de mathématiques avec le professeur qui donne la réponse. Le commentaire précédent insiste déjà sur ce point. La majorité des stagiaires interrogés a une représentation de l'élève qui fait des mathématiques **indissociable du cours qu'il assure**. Dans la plupart des réponses, on retrouve un élément qui évoque le cours ou le professeur lui-même. Certains enseignants ont même une image très étroite de l'élève qui fait des mathématiques, uniquement orientée vers l'utilisation du cours : faire des mathématiques voudrait dire bien écouter le professeur, comprendre le cours, s'entraîner avec des exercices d'application. On peut se demander quelle est la place de la preuve dans cette conception de l'activité mathématique de l'élève. Certains enseignants vont même jusqu'à ne pas envisager du tout cette activité mathématique de l'élève, ils sont tellement centrés sur leur propre rôle dans la classe qu'ils en oublient que la question concerne l'élève, voici ce que répond l'un d'eux : « ...Il faut encourager toutes les propositions, toutes les pistes, et voir dans quelle mesure elles sont intéressantes, ne pas hésiter à valoriser les idées de la classe. »

Il est aussi à noter qu'**aucune réponse ne contient explicitement les mots de preuve ou démonstration**. Une seule utilise le mot de raisonnement. Certes l'attitude de preuve recouvre les actions de chercher, prendre des initiatives, conjecturer, douter, contrôler, argumenter, convaincre... qui sont clairement souhaitées par les enseignants, mais il n'est pas explicitement mentionné l'attitude de prouver ou démontrer, si ce n'est, peut-être, dans une réponse. Celle-ci, cependant, donne une vision de la preuve essentiellement orientée vers la forme. Si l'on se place dans l'hypothèse déjà évoquée ci-dessus, à savoir que les enseignants ne voient l'élève faire des mathématiques que dans le cadre de leur cours, il se pourrait que la preuve ne vive pas réellement dans la classe. Ceci expliquerait l'absence de référence à la preuve ou à la démonstration dans les attendus des enseignants.

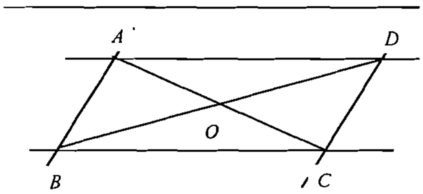
Revenons sur la réponse suivante (l'unique réponse donnée par l'un des enseignants) : « Je souhaite qu'un élève soit logique avant tout, c'est-à-dire il faut que je voie qu'il ait compris la question posée et que, dans chaque étape, il donne des supports théoriques. ». Deux questions peuvent être posées : peut-on évaluer le raisonnement logique de l'élève seulement par l'intermédiaire de ce qu'il rédige ? de quelle logique parle-t-on ? Pour répondre à la première question, on peut faire référence à R. Duval (1991) qui montre très bien l'intérêt de **distinguer l'apprentissage du raisonnement et l'écriture d'une démonstration**. En ce qui concerne la « logique » évoquée dans cette réponse, il semblerait que cela soit un indice d'une conception selon laquelle la logique mathématique est la même que celle du quotidien, elle est innée : le fameux « c'est du **bon sens** ! » que l'on entend parfois dans la bouche des professeurs, stupéfaits que leurs élèves donnent une réponse qu'ils jugent complètement farfelue. Or la logique mathématique ne relève pas du tout du « bon sens », ce fameux « bon sens » qui fait souvent dire que l'exception confirme la règle. Dans le monde mathématique, un contre-exemple suffit à réfuter une conjecture sur laquelle on avait pourtant réfléchi. Tout comme la capacité à écrire des textes mathématiques, la logique mathématique relève d'un apprentissage spécifique.

2) Proposez un énoncé qui, pour vous, est bien adapté au début de l'apprentissage de la démonstration. Expliquez pourquoi.

Il s'agit de la deuxième question posée lors de cette première phase de la situation. Un premier point commun se remarque dans les vingt-sept propositions retenues : aucune ne propose explicitement un travail de groupe, où l'interaction sociale puisse être utilisée, les uns cherchant à convaincre les autres. Pour en dégager les autres éléments qui relèvent de conceptions communes sur la preuve, nous regroupons les énoncés suivant quatre catégories, chacune d'elles pouvant se décliner en une règle de contrat didactique. Nous n'illustrerons ici chaque catégorie que par un exemple.

La première catégorie, nommée « absence d'enjeu de vérité et mise en avant de la forme » recouvre les énoncés qui répondent à trois critères. Tout d'abord, ils ont pour cadre la géométrie, nous retrouvons ainsi l'élément de conception G, défini dans l'introduction. Ensuite, ils créent peu de doute, l'enjeu de vérité est très faible. Aucune place n'est laissée à la recherche de la conjecture à démontrer ; celle-ci est donnée dans une phrase du type « démontrer que… » ou est la réponse évidente à la question posée : ceci renvoie à l'élément de conception que nous notons $\overline{V}$ [12]. Le troisième critère concerne la structure supposée de la démonstration : ils sont révélateurs d'une conception très formelle de la démonstration, l'élément P[13] déjà vu. Enfin, un quatrième élément est souvent avancé (mais ce n'est pas toujours le cas) par les enseignants qui proposent ces énoncés : ils évoquent leur simplicité, ce qu'ils jugent bon pour commencer. Ce dernier point, qui renforce l'élément de conception $\overline{V}$, est en contradiction avec une modélisation constructiviste de l'enseignement-apprentissage.

Une proposition d'enseignant



« Soient A, B et O trois points non alignés, soient C le symétrique de A par rapport à O et D le symétrique de B par rapport à O. Montrer que ABCD est un parallélogramme.
On donne les théorèmes utiles :

* Si C est le symétrique de A par rapport à O, alors AO = CO.
* Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
* Ecrivez une démonstration à votre façon, c'est-à-dire un raisonnement qui permet de prouver que ABCD est un parallélogramme.

On construira la démonstration sur le schéma :
Je sais que… (hypothèses utiles)
Or… (définition, théorème)
Donc… (conclusion).
Correction au tableau pour que les élèves aient une première démonstration bien rédigée. »

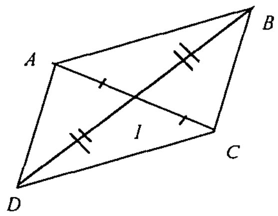
Cette proposition évoque clairement l'exigence d'expressions bien précises et la donnée d'un modèle aux élèves. On retrouve explicitement dans cet énoncé, la règle R_1 du contrat usuel. La conception dominante est donc celle qui consiste à voir la démonstration essentiellement comme un texte particulier, qui s'articule en pas, suivant un mode déductif. Au travers des autres réponses des enseignants (qui ne sont pas

[12] La lettre V désigne l'élément de conception « vérité », rappelé au début de cet article.
[13] La lettre P désigne l'élément de conception « pas », rappelé aussi au début de cet article.

données ici), c'est bien un **exercice de style** qui est proposé aux élèves pour apprendre la démonstration. La forme du texte est essentielle, l'enjeu de vérité est absent. Cette première catégorie peut être codée par les trois éléments de conception, G, $\overline{V}$, P, auquel s'ajoute l'élément T[14]

Une deuxième catégorie, intitulée « mise en œuvre de connaissances vues en cours », regroupe les situations qui mettent l'accent sur le cours. Pour beaucoup des propositions, il n'y a pas d'enjeu de vérité, mais aucune exigence de forme n'est requise, dans l'énoncé, sur le texte à produire.

Une proposition d'enseignant



« Soit ABC un triangle quelconque. Placer le point I milieu de [AC]. Construire le symétrique D du point B par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier. » La raison de ce choix pour un niveau de cinquième : « Cet exercice nécessite de repérer la propriété caractéristique des parallélogrammes adéquate parmi celles connues (ici : un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme). Pour cela, on utilise deux milieux : l'un obtenu directement de l'énoncé, l'autre à déduire de la symétrie centrale. »

Comme celle-ci, les autres propositions consistent en des exercices de mise en application de connaissances. Les commentaires des professeurs ne laissent apparaître aucun élément relatif à l'apprentissage de la démonstration. Les enseignants qui ont donné ces réponses semblent privilégier les connaissances, la démonstration n'étant qu'un moyen de les mettre en application et ne requérant pas d'apprentissage explicite. Nous reconnaissons ainsi l'élément de conception, déjà noté C[15] dans le premier chapitre, et nous ajoutons une * pour marquer la conception que la preuve ne relève pas d'un apprentissage explicite, soit C^*. Nous codons ainsi par $\overline{V}$, C^*, cette deuxième catégorie.

Une troisième catégorie de propositions montre tout de même que certains enseignants, bien au contraire, souhaitent mettre en avant l'apprentissage de la démonstration et proposent pour cela des situations dans lesquelles interviennent des connaissances de niveau antérieur, qu'ils pensent beaucoup plus disponibles comme outils de raisonnement pour les élèves. Nous les regroupons sous cette troisième catégorie qui relève de l'élément de conception *AP* défini ainsi.

<u>Elément de conception AP (apprentissage de la preuve)</u> : pour apprendre la preuve, il est utile de recourir à des connaissances suffisamment simples pour se centrer sur la preuve elle-même.

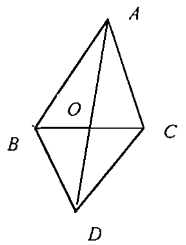
Cependant les énoncés proposés, comme ceux des deux rubriques précédentes, ne laissent que trop peu de place à l'expérimentation de l'élève et il n'y a aucun doute sur le résultat à démontrer.

---

[14] L'élément de conception *T* (texte) est rappelé aussi : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.

[15] La lettre *C* marque le fait que la réponse montre la démonstration comme un moyen de mise en œuvre du cours.

Une proposition d'enseignant

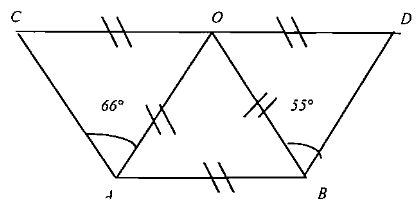


« Soient un triangle ABC et O le milieu de [BC]. Soit D le symétrique de A par rapport à O. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier. »
Cet énoncé me paraît intéressant pour deux raisons : les notions mathématiques requises pour la démonstration sont peu complexes, on ne dirige pas les élèves vers un chaînon déductif structuré sur tel ou tel mode. »

Le commentaire qui accompagne cet énoncé montre la volonté de l'enseignant de laisser une certaine liberté à l'élève sur la forme de la preuve à produire. Cette situation, proposée pour un niveau de quatrième, est cependant très pauvre pour permettre la construction d'un raisonnement par les élèves : il est évident que *ABDC* est un parallélogramme. Même s'il ne le spécifie pas, l'enseignant attend un texte construit pour justifier que *ABDC* est un parallélogramme. Or ceci s'explique en quelques mots : [*AD*] et [*BC*] ont le même milieu. Le décalage n'est-il donc pas trop important entre ce qu'attend le professeur dans une telle situation et la conception de la preuve dans la communauté mathématique ? Quelle représentation va se forger un élève si on lui montre la preuve sous un tel angle ? Ainsi au travers de cette catégorie, ce n'est plus la conception formelle de la preuve qui domine, ce n'est pas non plus la démonstration en tant que moyen d'utilisation du cours qui est privilégié, c'est plutôt la construction d'un système d'articulation de connaissances géométriques simples qui permette d'expliquer des faits dont la valeur épistémique est déjà très forte. Mais pour l'élève, aucune motivation à établir la vérité parce qu'il y a doute ! Aussi pouvons-nous coder cette troisième catégorie par les éléments de conception : G, $\overline{V}$, AP.

Enfin, une quatrième catégorie où l'on prouve pour lever le doute, pour convaincre. Elle se démarque des précédentes par l'apparition de la fonction réductrice de doute de la preuve.

Une proposition d'enseignant



« La figure ci-contre est faite à main levée. Que peut-on dire des points C, O et D ? »

Bien que l'enseignant n'ait pas explicité les raisons de son choix, on peut reconnaître que la situation peut susciter la curiosité des élèves. Néanmoins il est clair que la question n'induit que deux réponses : ces trois points sont alignés ou ils ne le sont pas. Par effet de contrat, l'élève répondra sûrement que les trois points ne sont pas alignés : si le professeur me pose cette question en me montrant ce dessin, c'est que la réponse...

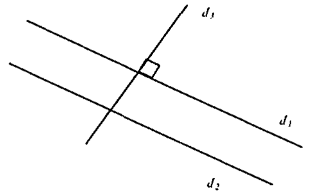
Ainsi tout à fait à l'opposé des premières propositions, centrées essentiellement sur la forme de la démonstration, celles de cette dernière catégorie montrent davantage d'ouverture vers des activités diversifiées qui permettent de travailler sur le sens de la démonstration. Si, dans quelques-unes des réponses de cette dernière catégorie, nous pouvons évoquer le travail sur la logique mathématique, sur la nécessité de définir un langage approprié, c'est bien dans toutes que se retrouvent le besoin de démontrer pour expliciter une contradiction ou le souci de prouver pour convaincre. Certes le domaine privilégié reste la géométrie (élément de conception *G*), une proposition est néanmoins faite dans le numérique. Se retrouvent ainsi les éléments de conception *R* et *V* déjà évoqués. Aussi codons-nous cette catégorie par les éléments *R*, *V*, *G*.

3) Le dépassement d'une contradiction

On peut être tenté de penser qu'en réglant le problème du fonctionnement de la logique mathématique, on résout le problème de la démonstration, dont l'un des objectifs est de garantir la vérité, par suite, l'absence de contradiction. Nous pensons certes qu'il faut expliciter clairement aux élèves les notions d'exemple, de contre-exemple (même de hors-sujet) par rapport à une conjecture, le principe fondamental du vrai et du faux en mathématiques, mais ceci ne demeure qu'une des faces de l'apprentissage de la preuve. Même une fois éclaircies les règles du débat mathématique, l'obstacle du dépassement de la contradiction demeure, comme le montre N. Balacheff (1987) : « le 'fait' de la contradiction… présente une complexité qui ne se laisse pas réduire à la complexité logique. »

La géométrie est pensée comme le terrain propice à l'apprentissage du raisonnement déductif, qui est le type de preuve privilégié par les enseignants. Propice, l'est-il vraiment ou est-ce un effet de contrat didactique ? Il n'est en effet jamais réellement évoqué le problème de l'évidence, qui joue nécessairement un grand rôle en géométrie. Peut-on donner les raisons de tout fait géométrique ? Plusieurs propositions sont accompagnées de dessins, les enseignants souhaitent cependant que les élèves « ne lisent pas sur la figure ». Ont-ils vraiment analysé leurs propres actions lorsqu'ils prouvent en géométrie ? Citons G. Arsac (1997) : « …en fait le raisonnement mathématique est bien fabrication à l'aide de la logique de vérités nouvelles à partir de vérités supposées connues, mais ces vérités supposées connues ne se résument pas à une collecte dans les axiomes et les théorèmes, dans les faits, elle implique presque toujours d'autres origines, en géométrie par exemple, l'appel à la lecture du dessin… » Ainsi l'apprentissage de la démonstration en géométrie, outre la difficulté de l'organisation des connaissances dont il s'accompagne, se double nécessairement du problème de la gestion de la figure.

Enfin si le dépassement de la contradiction est une difficulté pour les élèves, il en est une aussi pour les enseignants qui, nous allons le voir au travers d'un exemple, proposent parfois des situations qui induisent des comportements de leurs élèves tout à fait contraires à ceux qu'ils souhaitent. Voici un exemple où la pauvreté de la situation, dépourvue d'enjeu de vérité, ne peut qu'empêcher l'enclenchement d'un processus de preuve. L'énoncé proposé est le suivant :



La figure ci-contre est donnée.
« Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles. Soit d_3 une droite perpendiculaire à d_1. Montrer que d_3 et d_2 sont des droites perpendiculaires. »

L'enseignant qui donne cette proposition souhaite que « l'élève se montre curieux, qu'il schématise un problème, qu'il ait envie de faire des expérimentations, des conjectures, qu'il soit ouvert aux autres et puisse discuter des différents points de vue pour aboutir à une position commune. » Le contraste est saisissant entre l'attitude souhaitée de l'élève et l'activité proposée où l'on voit difficilement la place de l'expérimentation, de l'activité de conjecture... Est-il possible d'avoir « différents points de vue » sur un tel problème ? Ici encore, la réponse ne laisse aucun doute !

4) La contradiction : apprendre la preuve, apprendre les mathématiques

Au regard des réponses concernant l'activité mathématique que les enseignants souhaitent pratiquée par leurs élèves, nous constatons que beaucoup d'entre elles vont tout à fait dans le sens de l'activation d'un processus de preuve. Dans un premier temps, la seule lecture de cette liste d'attendus pourrait permettre aux professeurs de voir qu'ils ne se situent pas tous sous les mêmes rubriques : une première prise de conscience pourrait avoir lieu sur la nature de l'activité qu'ils attendent de leurs élèves.

Par contre, si l'on regarde les catégories retenues des situations proposées pour l'apprentissage de la démonstration, nous les avons repérées par G, $\overline{V}$, P, T pour la première, par $\overline{V}$, C^* pour la seconde, par G, $\overline{V}$, AP, pour la troisième, par R, V, G pour la dernière. Trois de ces catégories ont en commun l'étiquette $\overline{V}$, qui signifie l'absence d'enjeu de vérité, alors que la dernière s'inscrit, par le code V, en opposition à cet indice. De même pour l'étiquette AP, apprentissage explicite de la preuve, en opposition avec C^*, mise en œuvre du cours, sans activité d'apprentissage de la preuve. Ces contradictions, qui apparaissent simplement dans la classification des énoncés, pourraient permettre une deuxième prise de conscience sur la nature de l'activité que les enseignants proposent à leurs élèves.

Enfin la mise en regard des rubriques relatives aux attendus d'une part, et des codes retenus pour les catégories de situations proposées pour l'apprentissage de la preuve d'autre part, pourrait favoriser la reconnaissance d'une troisième contradiction si l'on reconnaît qu'apprendre à démontrer, c'est apprendre à faire des mathématiques.

III – Le groupe filmé : recherche et production de preuve (des résultats de la deuxième phase)

Ce groupe est constitué de quatre professeurs stagiaires, qui ont débuté il y a environ six mois : Patrice, Agnès, Emilie et Emmanuelle. Cette dernière enseigne en classe de seconde, ses collègues en classe de quatrième. Il s'agit, rappelons-le, du film de leur recherche du problème du « polymino troué d'une case », dont il est question plus haut. Rappelons que, dans les actions du groupe filmé, nous devons distinguer la recherche du problème et l'écriture de la preuve, que celle-ci est à regarder sous le double aspect du processus et du produit. Celui-ci, c'est le texte qui sera communiqué aux autres participants. Celui-là, le processus de preuve, il se dégagera du film des échanges au sein du groupe et des brouillons qui seront relevés.

1) Différents épisodes de la recherche du groupe filmé

Pour identifier des éléments de conceptions sur la preuve, qui émergent dans l'action, nous résumons et commentons quelques-uns des épisodes de la phase de recherche.

Expérimentation privée

La recherche du problème débute, assez naturellement, par l'étude d'exemples simples, permettant la découverte de résultats pertinents. Nous identifions un premier élément de conception sur la preuve, noté *EP* (expérimentation privée), selon lequel on entre dans un problème nouveau par l'expérimentation sur des exemples, à partir desquels on essaie d'identifier des régularités, ainsi que les conditions de ces régularités, mais ceci doit rester dans le domaine privé du groupe. On remarquera en effet par la suite que cette étude n'est pas rapportée dans la communication aux autres groupes : cette partie expérimentale, qui permet l'appropriation du problème, aussi bien à celui qui la pratique qu'à celui qui la lit, ne doit pas être communiquée. C'est la règle paradoxale du contrat usuel déjà évoquée *: on écrit une démonstration pour convaincre le lecteur, mais il ne faut tout de même pas trop lui faciliter la tâche de compréhension du problème. A lui de se construire sa propre expérimentation.*

Une exigence de définition qui freine la preuve

Ensuite, l'étude du cas où $n = 5$ permet de pousser plus avant l'exploration des régularités afférentes à la situation et de produire une conjecture, à savoir : « Si n est pair, ça ne marche pas ; si n est impair, on peut paver avec des dominos quand la case manquante est une case noire du damier. » Il est ainsi question d'un coloriage en damier. C'est une phase d'argumentation, où les seuls processus de validation apparaissent lors de l'exhibition de pavages qui conviennent lorsque la case manquante est une case noire du damier 5×5. La communication de ces éléments de preuve se fait par ostension, le langage n'était pas l'outil fondamental d'expression, il est familier et pauvre. Mais le plus marquant dans ce passage est le temps important passé à la définition du damier, Emmanuelle et Agnès souhaitent décrire le damier par un discours, un dessin leur semble ne pas suffire, Patrice et Emilie se seraient bien contentés d'un schéma pour montrer de quel damier il s'agit, mais ils se laissent convaincre, dans un premier temps, de la nécessité d'élaborer une définition. Celle-ci ne leur est cependant pas utile pour avancer dans la preuve, car chacun sait parfaitement de quel objet il s'agit. Ainsi on peut observer des indices de deux conceptions différentes sur la preuve, l'une tirant beaucoup plus que l'autre vers la forme. Cette conception, tournée davantage vers la forme, aboutit à la règle suivante : tous les objets introduits doivent être définis par un texte, un schéma n'est pas très satisfaisant, elle renvoie à la règle R_4[16] dite du « fichier » et à l'élément de conception T[17] déjà signalé. L'autre conception tolère les schémas en guise de définition, voit un texte de preuve dans un sens plus large que celui d'une suite de phrases. De plus, de façon inattendue se révèle un élément de conception sur la définition :

Elément de conception D (définition): on définit un objet parce qu'il est nouveau, et non pas parce que le manque de clarté à son égard freine ou empêche la preuve par la possibilité de malentendus ; cette définition est un texte.

On peut remarquer que ce besoin de mettre au point un texte de définition occulte l'absence de preuve du fait que le pavage est impossible lorsque la case manquante est

[16] Règle R_4 ou règle du « fichier » : dans une démonstration, on ne doit utiliser que les connaissances vues en cours ou celle d'une liste donnée.

[17] Elément de conception T (tout est écrit) : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.

l'une des cases blanches du damier. Enfin, la coloration en damier n'est pas du tout perçue comme un moyen de structurer l'objet polymino 5×5, qui permette d'accéder à une preuve simple. C'est un type de démarche absent des pratiques de l'enseignement secondaire. Ceci renvoie à l'épisode suivant.

Une preuve doit suivre une stratégie répertoriée

« Quelle stratégie on peut bien avoir pour faire ça ? » Cette question, posée par Patrice, dénote une tentative d'identification d'une certaine méthode déjà rencontrée, au collège, au lycée, à l'université... La structuration d'un objet par coloration ne fait pas partie des stratégies déjà rencontrées par le groupe. La récurrence par contre est un raisonnement auquel Agnès se raccroche, examinant le passage du cas où $n = 5$ à celui où $n = 7$. Patrice l'interrompt avec l'idée que si l'on considère un polymino $n \times n$,

Figure A :

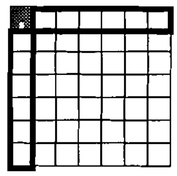
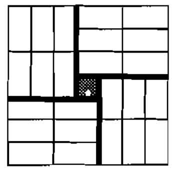


Figure B :



où n désigne un nombre entier naturel quelconque impair, et que la case manquante se trouve dans le coin « en haut et à gauche » (Figure A), on pourra toujours le paver car on aura alors un nombre pair de cases à recouvrir sur le reste de la première ligne, de même un nombre pair de cases à recouvrir sur le reste de la première colonne, et, ces deux rangées exceptées, il va rester un carré de côté pair, que l'on pourra recouvrir par des dominos. Il poursuit avec les cas où la case manquante est située au centre du polymino, en disant qu'on pourrait aussi toujours le paver, comme le montre la figure B.

Patrice enchaîne de manière cohérente les arguments pour prouver ces deux cas : sa proposition n'est cependant pas reprise. Ce type de raisonnement est en effet peu répandu dans le cursus secondaire, si bien que ses collègues ne parviennent pas à détecter une possibilité de généralisation. Cette absence de reconnaissance d'indices d'une stratégie pertinente, le raisonnement par induction, qui repose sur un partage de l'objet, procède d'une conception selon laquelle une preuve se construit à partir de stratégies bien identifiées, courantes dans le cursus secondaire, nous idenfions ainsi l'élément *FM* :

Elément de conception FM (fichier-méthodes) : une preuve se construit à partir de stratégies courantes dans le cursus secondaire, elle repose sur un corpus de connaissances construit et bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser.

Ensuite nous assistons dans cet épisode à une phase d'argumentation, voire de conversation, où l'unité réside seulement dans le thème du polymino : chacun poursuit suivant son idée, sans écouter les autres. Nul ne s'aperçoit que n'est pas prouvée la nécessité que la case manquante soit une case noire du damier pour que le pavage soit possible.

La situation induit des comportements logiques étranges de la part d'enseignants

« Si on a montré pour cinq, cinq c'est ça, dit Patrice en montrant un dessin du type de la figure 1 (page suivante). Après tu dis, si jamais on rajoute ceux-là (les deux colonnes de droite et les deux lignes du dessous), ça va marcher forcément.
- Ben, oui, répond Emilie.

- Mais les cinq, on peut les placer différemment, on peut les placer comme ça au départ, montra-t-il sur un dessin du type de la figure 2 (page suivante).
- Oui, mais c'est toujours pareil, répond Emilie.
- Donc, on sait aussi, ceux-là, il faudra les paver sur le même mode que ce qu'on a fait. Après les cinq, je peux les placer comme ça, poursuit-il en les désignant sur un schéma du type de la figure 3 (page suivante).
- C'est le même cas que là-haut, répond Emilie.
- Et donc, il suffit de les placer de telle manière que ..., sachant comment tu dois paver pour cinq, après tu recouvres toutes les cases que t'as rajoutées pour sept. Je ne sais pas si tu ...
- Non, dit Agnès.
- Et si tu les prends comme ça ..., suggère Agnès, en montrant la configuration relative à la figure 5 (page suivante), tu es coincé.
- Ah, oui, acquièsce Emilie.
- Mais tu n'as pas envie de le prendre comme ça, répond-il.
- Mais attends, c'est pas une histoire de... j'ai envie, j'ai pas envie, rétorque Agnès.
- Mais si ! Tu sais que ça marche pour cinq. A partir de ton tableau de cinq qui est déjà pavé, tu rajoutes ... tu rajoutes deux lignes, deux colonnes, et donc, après, tu essaies d'étendre le pavage, donc, là, si jamais tu prends ton truc de cinq comme ça, montre Patrice sur la figure 1, tu sais que si jamais tu paves tout ça comme un damier, comme on a dit, c'est bon. Et ces cases-là, ça marche aussi puisqu'on rajoute des paires, dit-il en montrant les deux colonnes situées à droite et les deux lignes situées au-dessous du carré 5x5 (voir figure 1). Donc, après, il reste à savoir comment je vais paver ces cases-là : ces deux colonnes et ces deux lignes.
- Ces cinq-là, je sais déjà comment les paver, commence-t-il en montrant le pavé ❺ de la figure 6. Et donc, après, je mets différemment mon carré, montre-t-il sur la figure 3. Le problème du pavage de ça (il désigne le rectangle ❶ de la figure 6) et de ça (il pointe le rectangle ❷ de cette figure 6), c'est réglé. Ensuite je le mets là (il le place comme sur la figure 2) et le problème du pavage de ça (il montre le rectangle ❸ de la figure 6), c'est réglé. Enfin, je le mets là (comme sur la figure 4) et le problème du pavage de ça (il s'agit du rectangle ❹ de la figure 6), c'est réglé. »

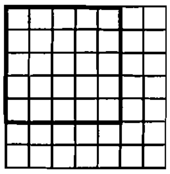


Figure 1

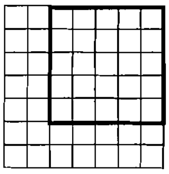


Figure 2

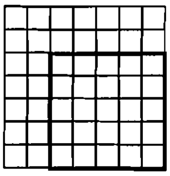


Figure 3

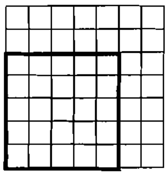


Figure 4

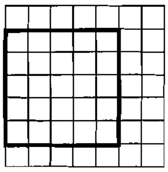


Figure 5

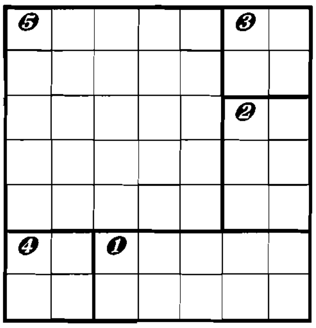
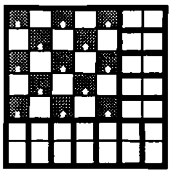


Figure 6

Deux points peuvent être relevés dans ce passage, d'une part, l'intervention d'Agnès qui est décalée par rapport à l'explication de Patrice, d'autre part, le problème soulevé par la preuve proposée par Patrice. Celui-ci veut « traiter » chaque case du polymino 7×7 en la considérant comme élément d'un des quatre polyminos 5×5 qui lui permettent de recouvrir complètement le polymino 7×7. Le raisonnement n'est pas explicité. Quel pourrait-il être ?



Si l'on considère que la case manquante du carré 7×7 se trouve dans la zone marquée ❺ de la figure 6. Elle appartient alors au carré 5×5 colorié en damier ci-dessus. Deux cas seulement peuvent se présenter : ou bien cette case est une case noire du damier, ou bien c'est une case blanche. Dans le premier cas, on sait que l'on peut paver le reste du carré 5×5 (cela a été démontré auparavant) ; on peut aussi recouvrir, par des dominos, les colonnes situées à droite du damier, puis compléter les deux lignes du dessous, comme suggéré sur la figure. Dans le second cas, c'est-à-dire si la case manquante est une case blanche du damier, alors on sait que l'on ne peut pas paver le polymino 5×5, mais pourquoi pourrait-on en déduire que l'on ne peut pas paver le polymino 7×7 ? Le problème se pose dans les mêmes termes pour les quatre autres cas où la case manquante se trouve dans les zones ❶, ❷, ❸ ou ❹ de la figure 6. Ainsi lorsque Patrice affirme plusieurs fois que « le problème est réglé », il s'agit en fait de la faisabilité du pavage lorsque la case manquante est une case noire du damier, mais la réciproque n'est pas du tout prouvée. Le groupe n'en est pas nécessairement conscient à ce stade de la recherche. Ceci est à rapprocher de l'analyse de l'épisode précédent. Nous voyons apparaître, dans l'action, l'idée selon laquelle le problème va pouvoir être traité par récurrence, alors qu'il contient une condition nécessaire et suffisante, la preuve de l'une étant étroitement liée à la preuve de l'autre. Quant à l'intervention d'Agnès, qui se pose le problème du choix de l'emplacement du carré 5 × 5 sur le polymino 7×7 , elle révèle peut-être une confusion de quantificateurs : quelle que soit la position du polymino 5×5 recouvrant le polymino 7×7, puis-je utiliser le pavage du polymino dans le cas où $n = 5$ et l'étendre au cas où $n = 7$? Telle est peut-être la question qu'Agnès se pose. L'insuffisante maîtrise de ce type de raisonnement entraîne une erreur de logique qui se solde par un virage inattendu au cours d'une stratégie pourtant pertinente. On peut y voir la marque d'un nouvel élément de conception sur la preuve :

<u>Elément de conception NTC (nécessité de traiter tous les cas)</u> : pour résoudre un problème, on ne peut pas choisir de traiter certains cas dès lors que l'on estime qu'ils sont suffisants pour les englober tous : il faut traiter tous les cas sans exception, sinon la preuve comporte des trous

Ces deux types de comportements logiques erronés, à savoir l'amalgame entre condition nécessaire et condition suffisante, d'une part, et la déviation de stratégie due à une vision floue des quantificateurs sous-jacents, nous confortent dans notre hypothèse que ce type de situation est suffisamment en rupture avec les situations de preuve habituelles pour mettre à jour ce fonctionnement de la part d'enseignants. On note en fait un comportement assez contradictoire du groupe entre l'épisode de la définition du damier et cette phase d'argumentation autour du déplacement du damier 5×5. Ils consacrent en effet beaucoup de temps à l'élaboration de la définition du damier, pourtant peu utile au débat, alors qu'ils ne prennent pas la peine d'expliciter clairement les expressions du type « ça marche » ou « le problème est réglé », ce qui pourrait mettre en évidence que la déduction proposée dans cette argumentation est sémantiquement fausse. Nous reconnaissons ici, comme le souligne N. Balacheff (1987), l'insuffisance du langage de la familiarité pour permettre l'accès à la démonstration.

Une preuve et une démonstration, ce n'est pas la même chose

Suit un épisode où l'on voit que les degrés de conviction sont différents quant à la preuve suggérée. Les échanges dans le groupe mettent à jour des représentations différentes, d'une part sur le rapport entre preuve et démonstration (ces mots ayant des sens différents pour les enseignants du groupe), d'autre part concernant le format auquel doit obéir une démonstration. Patrice est prêt à transcrire ce qui a été explicité oralement suivant la stratégie qu'il qualifie de « recouvrement », avec quelques aménagements, et considère qu'il s'agit d'une démonstration, tandis que les autres sont plus réticents, mais sur des plans différents. Concernant l'argumentation à propos du passage du cas $n = 3$ au cas $n = 5$, il semble se dégager l'idée qu'elle est convaincante, mais qu'elle ne correspond pas vraiment à quelque chose que l'on peut communiquer à autrui, ce n'est pas une démonstration, mais tout de même, peut-être une preuve, semble-t-il. Ces deux mots ne désignent pas la même chose pour trois des membres du groupe, alors que Patrice y reconnaît volontiers le même objet.

Emilie quant à elle se demande où elle en est : le doute s'installe, sauf pour le cas où $n = 3$ qu'elle considère davantage sur le plan de la vérité que sur le plan de la forme. On peut dire enfin que la conception d'Emmanuelle sur la forme rigide de la démonstration est suffisamment prégnante pour l'empêcher d'avancer tant que tout n'est pas clairement écrit.

Une stratégie de preuve d'une implication doit être utilisable pour la réciproque

Une idée nouvelle se révèle dans l'épisode suivant : Agnès suggère que, parmi les cases blanches du damier, il y en a peut-être qui, si elles étaient la case manquante, permettaient le pavage du damier par des dominos. Le groupe, ne sachant quelle stratégie adopter, se rue sur le calcul du nombre de cases qu'on rajoute pour passer du cas n au cas $n + 2$. Ainsi le groupe s'empresse de faire un calcul de peu d'intérêt qui lui permet de se mettre momentanément à l'abri d'un travail sur la validation. L'interaction sociale détourne à nouveau le groupe d'une stratégie de preuve pertinente, celle qui avait été suggérée par Patrice et nommée « recouvrement » : recouvrir de quatre manières le carré 7×7 par un carré 5×5 .

Emilie considère que c'étaient des « cas particuliers » et affirme « ça me choque, de dire on le déplace, mais seulement comme ça… ». On en revient ainsi à l'élément de conception *NTC* (nécessité de traiter tous les cas) déjà signalé. Le groupe était maintenant convaincu qu'il fallait en passer par là. L'interaction sociale (N. Balacheff, 1987) éloigne les protagonistes d'un processus de preuve adéquat : ils se construisent un système de validation commun, induit par une conception de l'un des partenaires, qui les éloigne de la rationalité mathématique. Patrice, qui ne partage pas tout à fait l'idée « il faut traiter tous les cas », manifeste le désir de se dégager de cette obligation, mais Emmanuelle réaffirme avec force sa conviction. Ce n'est pas un argument de preuve mathématique qui opère ce changement, c'est la force avec laquelle Emmanuelle fait part de sa représentation. Elle pousse chacun des acteurs à chercher à tout prix un déplacement du « petit damier » sur le « grand damier » qui va permettre de traiter le cas des cases blanches comme celui des cases noires ; à aucun moment n'est évoquée l'idée qu'il se pourrait que la stratégie pertinente pour la condition suffisante du pavage ne le soit pas pour la condition nécessaire. Aussi construisons-nous, à partir de cet épisode, l'élément *NS* suivant :

Elément de conception NS (condition nécessaire-condition suffisante) : la preuve d'une condition nécessaire s'inspire de ce qui a été prouvé pour la réciproque ou utilise une stratégie analogue à celle de la condition suffisante.

Une preuve ne doit pas être trop difficile

Le groupe ne prend conscience qu'il n'a pas prouvé l'impossibilité du pavage lorsque la case manquante est sur une case blanche, qu'à la fin du temps accordé à la recherche. Patrice sent la nécessité d'expliciter par écrit les questions qu'il se pose : cela relève d'une certaine conception sur la preuve qui permet l'écriture de questions. On peut ainsi expliciter l'élément de conception *Q* suivant, qui sera repris ultérieurement :

Elément de conception Q (question) : la preuve est facilitée par l'explicitation écrite des questions que l'on se pose, même si l'on n'en trouve pas la réponse. Celles-ci sont écrites dans le texte à communiquer.

Tous ne partagent pas cette idée. Ils persistent à vouloir utiliser la coloration en damier, mais toujours de façon peu pertinente, ce qui brouille les pistes. On note le retour du raisonnement par induction, le « recouvrement ». Encore une fois, le langage de la familiarité et la pauvreté des expressions utilisées sont sources de malentendus et constituent des freins à la preuve. Agnès et Patrice ne parlent pas de la même chose et ne s'en rendent pas compte. Le découragement s'installe. A la question « Avez-vous démontré que l'on ne pouvait pas paver le polymino si la case manquante se trouvait sur le point d'interrogation ? », posée par un observateur du groupe, Patrice répond qu'il ne l'a pas vraiment démontré parce qu'il se peut qu'il existe une autre façon de paver que celles qu'il a évoquées. Emmanuelle manifeste un certain découragement : « « De toute façon, il y a trop de cas ! On est parti sur... Enfin, il doit y avoir plus simple. » On peut ainsi compléter l'image qu'a Emmanuelle de la preuve : elle ne doit pas être trop difficile, une certaine complexité peut être tolérée, mais elle doit rester raisonnable. C'est à relier à l'élément de conception *FM* Comme elle n'entrevoit pas de régularités dans la production des pavages, elle se sent submergée par la multitude des cas à traiter. Cette conception devient un obstacle à la poursuite de la recherche. Ainsi son comportement face à cette situation problématique qui sollicite fortement ses convictions intimes va plutôt dans le sens du rejet, de la méthode et de tout le travail fait, que de celui de l'analyse mathématique des causes du blocage.

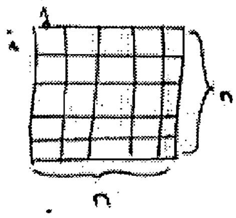
Au bout des deux heures de recherche, le groupe filmé produit le texte suivant, qui est discuté avec les autres groupes. Rappelons la consigne donnée alors vers la fin de la séance : le groupe doit rédiger un texte, la preuve complète ou celle d'un résultat partiel, qui sera communiqué à l'ensemble des enseignants pour être discuté.

2) Le produit de preuve du groupe filmé

Le texte du groupe filmé

ON CONSIDERE UN POLYMINO CARRÉ PRIVÉ D'UNE CASE
EST-IL POSSIBLE DE LE PAVER AVEC DES DOMINOS ?

On considère un carré de dimension $n \times n$
i n° de la ligne
j n° de la colonne
une case repérée par $(i;j)$



Conjecture :

si n impair :
– si $i+j$ est pair alors la case (i,j) peut être manquante et on va pouvoir paver
– si $i+j$ est impair alors la case (i,j) ne peut être manquante et on ne pourra pas paver

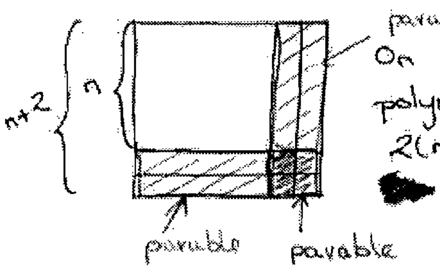
pas démontré

si n pair : on ne pourra jamais paver

CAS n IMPAIR : démonstration par $\boxed{\text{récurrence}}$
hypothèse de rec : " pour n impair, si la case manquante se trouve en (i,j) avec $i+j$ pair, alors le pavage est possible " : $\mathcal{P}(n)$

• $n=3$ (ok, on peut le vérifier sur un shéma)

• on suppose $\mathcal{P}(n)$



On passe du polymino n au polymino $n+2$ en rajoutant $2(n+2)+2n$ cases ie $4n+4$

Toutes les parties rajoutées sont pavables.
Donc le polymino $n+2$ est pavable
Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Quelques éléments d'analyse de ce texte

Il n'est fait aucune allusion au damier, les cases du polymino sont désignées comme les termes d'une matrice, c'est ce qui permet de contourner le problème de l'écriture de la définition du damier que s'est posé le groupe. Mais est-il plus immédiat au lecteur de comprendre de quelles cases il s'agit quand il lit « la case manquante se trouve en (i, j) avec $i + j$ pair » ou « la case manquante est une case noire du damier » ?

La séparation est nette entre les résultats estimés démontrés et ceux qui ne le sont pas. La justification du fait qu'on ne peut pas paver dans le cas où n est pair n'est cependant pas développée : elle était pourtant écrite dans le brouillon d'Emmanuelle, comme on peut le voir ci-dessous.

Demonstration

- pour n pair

il y a alors $n^2 - 1$ cases libres, ie un nbre impair de cases libres

on ne peut de pas paver avec les dominos

La méthode de démonstration utilisée dans le cas où n est impair est clairement annoncée, c'est un raisonnement par récurrence, dont les étapes sont bien distinguées. L'initialisation pour $n = 3$ est mentionnée, mais très succinctement, comme n'étant pas difficile à vérifier : nous avons vu que la question était résolue pour le groupe. L'explicitation de l'hérédité de la propriété, selon laquelle le pavage est possible si la case manquante est une case noire du damier (pour faire plus imagé), nous permet de poser deux questions relativement à la preuve en tant que texte, celle de la pertinence des arguments donnés et celle de la présence de « trous » : en résumé, nous pourrions dire qu'une démonstration ne doit pas tout dire, mais dire l'essentiel, et qu'il ne faut pas y ajouter des arguments inutiles. Ce dernier point trouve deux illustrations dans ce texte : la première dans la présence du nombre de cases que l'on rajoute pour passer du « polymino n » au « polymino $n + 2$ », cet argument est inutile ; la deuxième dans le découpage en trois zones de la bordure ajoutée au carré $n \times n$ pour obtenir le carré $(n + 2) \times (n + 2)$, il suffit de deux zones.

Pour être compréhensible, une preuve doit certes dire l'essentiel, mais aussi taire des arguments de moindre importance, dont le développement risquerait de nuire à sa compréhension globale, mais elle ne doit pas comporter de « trou ». Or, à notre avis, il y en a un dans ce texte : il n'y est pas question de la possibilité que la case manquante soit située dans la bordure ajoutée au carré $n \times n$ citée plus haut.

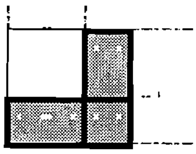
Enfin ce texte ne comporte aucune indication heuristique, ne mentionne aucune des pistes empruntées par le groupe au cours de la recherche, aucune des questions qui restent posées, qui pourraient permettre une avancée dans la preuve relative aux cases blanches du damier. Ces questions avaient pourtant été clairement écrites sur le brouillon de Patrice, dont voici un exemple ci-dessous.

Th. on sait que le pavage de la conjecture convient. Lors du passage de n à n+2, oublie-t-on des cases qui conviendraient en réalisant le pavage de cette façon ? (y a-t-il des cases blanches qui permettent le pavage du polymino si la case manquante se trouvait sur elles ?)

L'avis des autres enseignants sur le texte produit par le groupe filmé

Tout d'abord, la présence dans le texte d'une forme de raisonnement connu constitue, pour les enseignants, un critère de reconnaissance du fait qu'il s'agit d'une preuve ou d'une démonstration. Les formes citées sont le raisonnement par récurrence, le raisonnement par disjonction des cas, l'écriture d'une conjecture suivie d'arguments enchaînés de manière logique. Seize réponses mentionnent ce critère de forme, indépendamment de tout enjeu de vérité. Nous retrouvons ainsi les éléments de conception *R*[18] et *FM*[19].

Les enseignants signalent également la présence de trous dans la preuve du groupe filmé, mais certaines sont contradictoires. Si onze personnes signalent l'absence de démonstration du fait qu'un polymino de côté pair n'est pas pavable, une personne considère que c'est démontré. Ceci nous renvoie à l'élément de conception *T*[20].



Dans le cas du polymino de côté impair, la preuve de l'hérédité dans le raisonnement par récurrence est jugée incomplète, voire fausse. Les raisons avancées sont différentes. L'une, donnée par huit personnes, consiste à dire que n'est pas considéré le cas où la case manquante se trouve dans la bordure grise du schéma ci-dessus, comme nous l'avons signalée. Une deuxième raison est avancée par quatre personnes : à aucun endroit n'apparaît le lieu de la case manquante. Une seule réponse mentionne une troisième raison, selon laquelle il n'est pas expliqué pourquoi les trois morceaux sont pavables. Enfin une quatrième raison, donnée trois fois, consiste à dire que la récurrence ne prend pas en charge la démonstration de l'impossibilité du pavage dans le cas où la case manquante est repérée par (i, j) avec $i + j$ impair. Cette dernière semble relever de l'élément de conception *NS*[21]. La troisième raison est attachée à une

[18] Elément de conception *R* (rationalité) : une démonstration répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.
[19] Elément de conception *FM* (fichier-méthodes) : une preuve se construit à partir de stratégies courantes dans le cursus secondaire, elle repose sur un corpus de connaissances construit et bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser.
[20] Elément de conception *T* (tout est écrit) : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.
[21] Elément de conception *NS* (nécessaire-suffisant) : la preuve d'une condition nécessaire s'inspire de ce qui a été prouvé pour la réciproque ou utilise une stratégie analogue à celle de la condition suffisante.

conception très formaliste de la preuve, elle est à rapprocher des onze réponses qui considèrent que la démonstration n'est pas faite dans le cas d'un polymino de côté pair : les enseignants qui ont donné ces réponses connaissent les arguments qu'ils souhaiteraient voir ajoutés à cette preuve, ils sont convaincus de la vérité des résultats annoncés, mais ils ne conçoivent pas qu'une démonstration taise certains points, même s'ils sont clairs pour tous. Enfin les deux premières raisons touchent davantage à la conception qu'une démonstration doit emporter la conviction du lecteur et ne pas omettre d'arguments pertinents.

IV. Les autres textes : débat de preuve et débat sur la preuve (troisième phase)

Quelques productions des autres groupes sont aussi discutées avec l'ensemble des enseignants. Si elles sont différentes sur le plan de la forme, certaines contiennent beaucoup de dessins contrairement à d'autres qui privilégient le texte, certaines font apparaître la démarche heuristique, l'expérimentation qui conduit à la formulation d'une conjecture, alors que d'autres ne l'évoquent pas du tout. Ces textes proposent seulement des éléments de solution, sauf l'un d'entre eux qui donne une preuve complète.

Le débat fait émerger des représentations, nettement contradictoires sur preuve et démonstration, à l'étonnement des enseignants eux-mêmes :

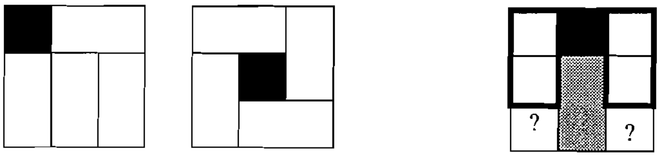
- Une démonstration se soucie du détail - sans se soucier des prérequis ; une équerre suffit à prouver en $6^{ème}$ que deux droites sont perpendiculaires.
- Une preuve est quelque chose de convaincant, de subjectif, alors qu'une démonstration est entre pairs.
- Preuve et démonstration, c'est pareil.
- C'est pas pareil : une preuve est un résultat partiel (exemple : 2+3=5), une démonstration nécessite des étapes.
- Un contre-exemple est une preuve, mais pas une démonstration.
- La preuve est le résultat d'une démonstration.
- La démonstration est une preuve particulière ; elle s'adresse à des mathématiciens, alors que la preuve s'adresse à tout groupe social.
- Une démonstration est juste ou fausse, c'est une argumentation, un raisonnement.
- Une preuve est quelque chose de juste.
- Cela n'a pas de sens de dire qu'une preuve est fausse.

Insistons sur notre point de vue, preuve et démonstration sont synonymes !

Des éléments de conception que l'on construit à partir du premier texte discuté

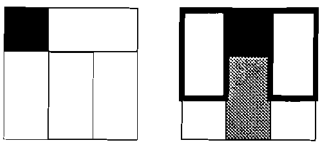
Après ce débat, le premier texte étudié avec l'ensemble du groupe présente la preuve de trois résultats : la nécessité que le polymino soit de côté impair pour que le pavage soit possible, l'étude du polymino 3×3, celle du polymino 5×5.

Dans le cas où $n = 3$, le traitement de l'impossibilité du pavage si la case manquante est sur un bord sans être dans un coin n'est pas explicité par un texte, mais par un dessin (voir ci-contre). On comprend que l'on n'a pas le choix pour recouvrir les cases adjacentes à la case noire : il faut placer les deux dominos tels qu'ils sont suggérés de chaque côté du trou. Ensuite, pour recouvrir la case centrale, on est obligé de placer un troisième domino comme suggéré en gris sur la figure. Il reste donc deux cases qu'il est impossible de recouvrir avec des dominos. Pour beaucoup d'enseignants, la figure ci-dessus ne constitue pas une démonstration car « tout n'est pas bien écrit ». Il est clairement formulé par l'une des enseignantes qu'une preuve doit être constituée de phrases, répondre à un certain critère de forme. Certaines personnes sont convaincues par le schéma, d'autres non : « Ce pavage n'est pas possible, mais est-ce qu'il n'y en aurait pas un autre ? »



Toutefois un consensus s'établit peu à peu : ainsi si on rajoute, dans le texte, que tous les cas se ramènent aux trois figures données, alors la plupart finit par reconnaître que le cas $n = 3$ est démontré. Ainsi il ressort à nouveau du débat l'élément de conception T. Concernant ce point, les professeurs se placent en dehors de l'enjeu de vérité et du désir de convaincre, qui, nous semble-t-il, sont des lignes directrices essentielles de la preuve, leur objectif serait plutôt d'évaluer le raisonnement de celui qui écrit la démonstration. Une règle forte du contrat didactique serait que, si une étape d'un raisonnement n'est pas clairement explicitée, alors le professeur considère que l'élève ne l'a pas comprise, sa démonstration est donc considérée comme incorrecte. Ainsi la conception sous-jacente relèverait davantage de l'évaluation de la compréhension de la preuve que de la démarche de preuve elle-même.

Un autre point important se dégage du débat à partir de cette présentation : il concerne le sens du problème posé. Il semblerait qu'il soit à opposer au respect de la consigne. En effet, la question posée était la suivante : « Est-il possible de paver, avec des dominos, un polymino $n \times n$ privé d'une case ? »



Certains enseignants affirment que, dans le cas où $n = 3$, ils répondent à cette question en montrant un pavage possible, par exemple celui de la figure ci-dessus. Leur réponse est alors « oui ». Certes ils répondent effectivement à cette question, mais ils ne se préoccupent pas du sens du problème posé. D'autres professeurs considèrent que la question est : « Est-il *toujours* possible de paver avec des dominos un polymino $n \times n$ privé d'une case ? ». Leur réponse est « non » et il leur suffit d'exhiber la figure de droite ci-dessus pour montrer que le pavage n'est pas toujours possible. Il est alors utile de **revenir au sens du problème** posé, il est reformulé ainsi : « Vous avez vu qu'il y avait des cases manquantes qui permettaient le pavage, les « bonnes cases », qu'il y en avait d'autres qui ne le permettaient pas, les « mauvaises cases », la question est de caractériser ces différents types de cases. » Le sens du problème n'était donc pas le même pour tous ! Ainsi nous notons un nouvel élément de conception :

<u>Elément de conception RC (respect de la consigne) :</u> la preuve doit répondre strictement à la question posée, éventuellement sans se préoccuper du sens du problème.

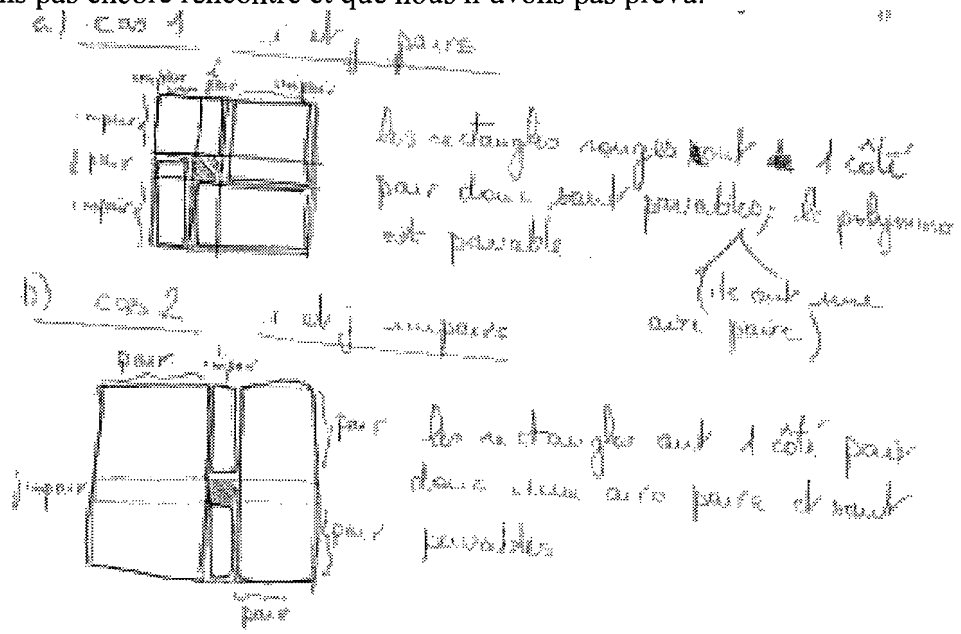
Des éléments de conception que l'on revoit à partir du deuxième texte discuté

Comme dans la production précédente, la coloration en damier ne sert qu'à montrer facilement la position des cases manquantes qui rendent possible le pavage. Ce qui est cependant nouveau, c'est la présence d'un raisonnement par récurrence pour démontrer que le pavage est possible, faisant intervenir un des découpages que nous avions prévus. L'initialisation de la récurrence n'est cependant pas prouvée, elle est simplement affirmée. Un enseignant affirme : « C'est bien une démonstration, puisqu'elle suit le schéma d'une démonstration par récurrence. » **Il semble donc que peu importe la validité de ce qui est écrit, ce sont des indices de forme qui sont mis en avant.** Ceci renvoie à nouveau à l'élément de conception *FM*[22]. Le débat sur ce texte met à nouveau en évidence l'élément de conception *NS*[23] déjà signalé, que la preuve d'une condition suffisante se fait sur le même mode que celle d'une condition nécessaire.

Un stagiaire ajoute la remarque suivante : « **Il faudrait justifier pourquoi le fait qu'il reste un nombre impair de cases empêche le pavage (par des dominos).** » Cette phrase permet d'évoquer la **pertinence** des arguments développés dans une preuve. Le point délicat de cette démonstration ne résidant sûrement pas dans l'absence de la justification demandée, est-il pertinent de répondre à cette demande ? Nous retrouvons l'élément de conception *T*[24].

Un extrait d'un troisième texte qui suscite une discussion assez vive

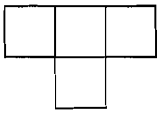
Cet extrait permet d'aborder un élément de conception sur la preuve que nous n'avons pas encore rencontré et que nous n'avons pas prévu.



Le débat porte sur le rajout « ils ont une aire paire » : cela renforce-t-il la preuve ou l'affaiblit-il ? Cet argument, ajouté entre parenthèses, à côté de « pavables », semble

[22] *FM* (fichier-méthode)
[23] *NS* (condition nécessaire-condition suffisante)
[24] *T* (tout est écrit)

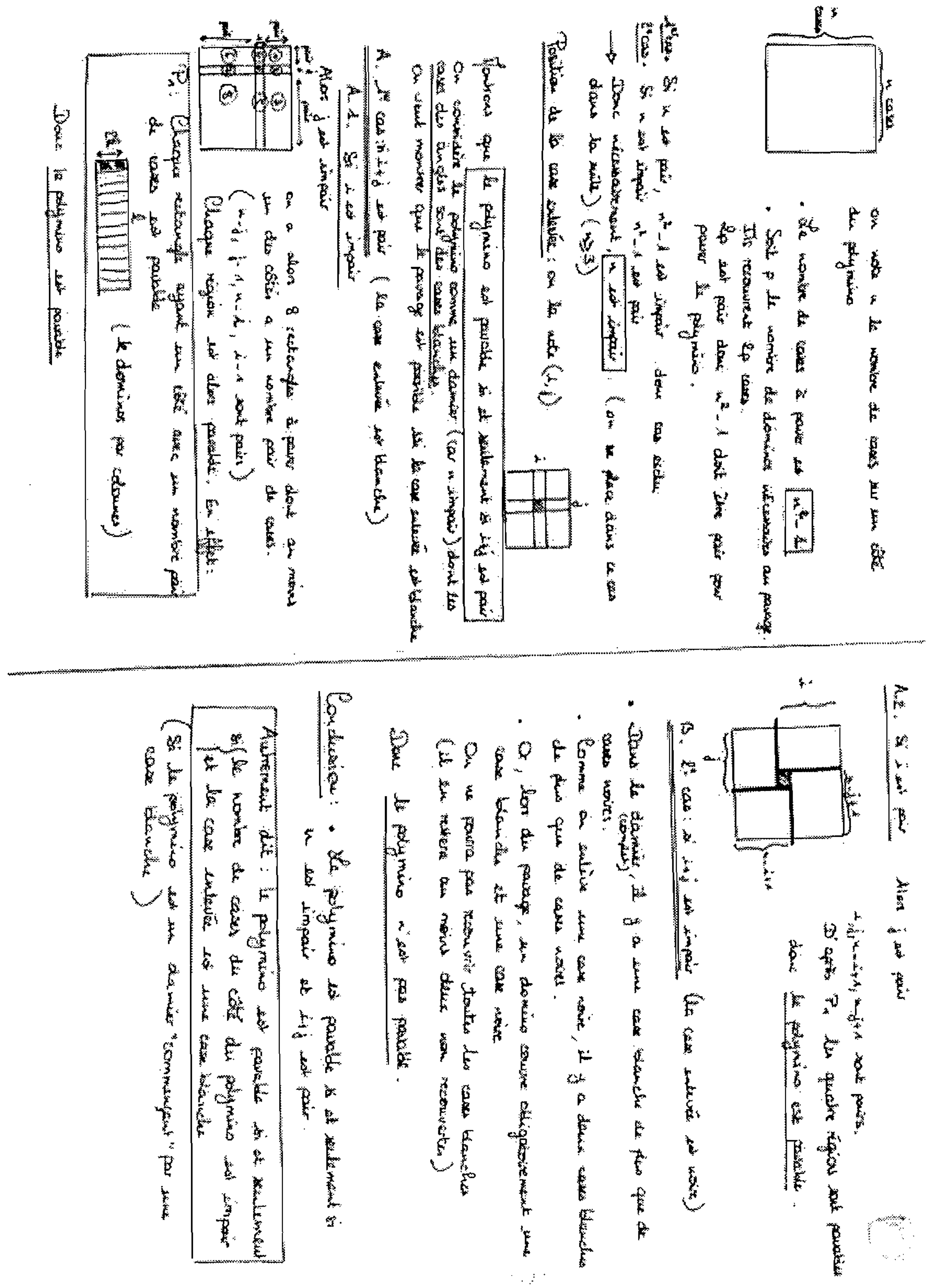
être le critère décisif qui permette de reconnaître qu'un rectangle est pavable, ce qui est écrit relativement au cas 2 nous conforte dans cette hypothèse. Nous pourrions schématiser le raisonnement par la chaîne d'implications suivantes, relatives à des rectangles sans trous : l'implication (1), soit, « a un côté pair » $\Rightarrow$ « a une aire paire », suivie de l'implication (2), soit, « a une aire paire » $\Rightarrow$ « est pavable ». Il est clair que, placées dans l'ensemble des rectangles, les propositions « a un côté pair », « a une aire paire », « est pavable » sont vraies. Les implications (1) et (2) sont donc vraies puisqu'il n'est pas possible de leur trouver un contre-exemple, et on a une preuve !



Si l'on sort de l'ensemble des cas particuliers que constituent les rectangles pour considérer l'ensemble des polyminos, l'implication (2) est fausse comme le montre le contre-exemple ci-dessus. De plus, la parité du nombre de cases à recouvrir n'étant pas une condition suffisante pour qu'un polymino soit pavable, c'est bien seulement l'implication, « a un côté pair » $\Rightarrow$ « est pavable », qui est pertinente : puisque le rectangle a un côté pair, on peut aligner le long de ce côté une rangée de dominos, on peut donc mettre ensuite côte à côte autant de rangées qu'il est utile d'après la longueur de l'autre côté du rectangle. Dans ce raisonnement, on n'utilise pas que l'aire du rectangle est paire. Le débat est alors l'occasion pour un enseignant de formuler lui-même sa croyance que, dans un raisonnement déductif, si toutes les propositions successives qui s'enchaînent sont vraies, alors la preuve est valable. Nous construisons ainsi l'élément de conception *SV* suivant :

Elément de conception SV (suite de vérités) : une preuve, constituée d'une suite d'implications dont les hypothèses et les conclusions sont toutes vraies, est correcte.

Une quatrième présentation : une preuve



On note n le nombre de cases sur un côté du polymino

- Le nombre de cases à paver est $\boxed{n^2-1}$
- Soit p le nombre de dominos nécessaires au pavage. Ils recouvrent $2p$ cases. $2p$ est pair donc n^2-1 doit être pair pour paver le polymino.

1er cas. Si n est pair, n^2-1 est impair donc cas exclu.
2e cas. Si n est impair n^2-1 est pair

→ Donc nécessairement, $\boxed{n \text{ est impair}}$. (on se place dans ce cas dans la suite) ($n \geq 3$)

Position de la case enlevée : on la note (i, j).

Montrons que $\boxed{\text{le polymino est pavable si et seulement si } i+j \text{ est pair}}$

On considère le polymino comme un damier (car n impair) dont les cases des angles sont des cases blanches.

On veut montrer que le pavage est possible ssi la case enlevée est blanche

A. 1er cas : $i+j$ est pair (la case enlevée est blanche)

A.1. Si i est impair

Alors j est impair

on a alors 8 rectangles à paver dont au moins un des côtés a un nombre pair de cases.

($n-j$, $j-1$, $n-i$, $i-1$ sont pairs)

Chaque région est alors pavable. En effet :

P_1 : Chaque rectangle ayant un côté avec un nombre pair de cases est pavable (les dominos par colonnes)

Donc le polymino est pavable

A.2. Si i est pair Alors j est pair

$i, j, n-i+1, n-j+1$ sont pairs.

D'après P_1 les quatre régions sont pavables

donc le polymino est pavable.

B. 2e cas : si $i+j$ est impair (la case enlevée est noire)

- Dans le damier (complet), il y a une case blanche de plus que de cases noires.
- Comme on enlève une case noire, il y a deux cases blanches de plus que de cases noires.
- Or, lors du pavage, un domino couvre obligatoirement une case blanche et une case noire

On ne pourra pas recouvrir toutes les cases blanches (il en restera au moins deux non recouvertes)

Donc le polymino n'est pas pavable.

Conclusion : • Le polymino est pavable si et seulement si n est impair et $i+j$ est pair.

Autrement dit : le polymino est pavable si et seulement si le nombre de cases du côté du polymino est impair et la case enlevée est une case blanche

(Si le polymino est un damier "commençant" par une case blanche)

On note que le groupe juge bon de définir ce qu'il appelle un damier. Mais la coloration en damier n'est pas proposée au départ dans le but de structurer le polymino ; elle est d'abord un moyen de montrer quelles sont les cases qui permettent ou qui ne permettent pas le pavage, ce n'est qu'ensuite que cette coloration est utilisée pour mettre en évidence la relation de voisinage entre deux cases pavables par un domino. L'implication « a un côté pair » $\Rightarrow$ « est pavable », dont nous avons parlé relativement à la présentation précédente, est ici clairement explicitée. On remarque aussi que deux types de découpages sont proposés, alors que celui qui est exhibé pour i pair, convient aussi pour le cas où i est impair.

V. En conclusion

Le film du groupe qui cherche le problème du polymino a permis de mettre à jour des éléments de conception sur la preuve et son enseignement, qui expliquent la raison d'être de ce contrat usuel en vigueur dans les classes. S'il est vrai que certains de ces éléments se manifestent en même temps que leur contraire, ces contradictions ne sont toutefois pas relevées par les enseignants du groupe. Nous renvoyons à N. Balacheff (1987) : « prendre conscience d'une contradiction c'est poser le problème du choix entre deux propositions : une affirmation et sa négation. Quelle que soit l'issue de ce choix, elle suppose que l'affirmation soit disponible et qu'elle soit susceptible d'être niée. » De notre point de vue, plusieurs des éléments de conception que nous signalons ci-dessus ne sont pas disponibles, aussi bien pour les membres du groupe filmé que pour les autres enseignants, qui ne les ont pas clairement identifiés. De ce fait, leur négation non plus. La prise de conscience de contradictions n'a pas lieu dans l'action pour les enseignants filmés. Elle est plus aisée pour un observateur extérieur au groupe, qui note aussi combien sont étroitement imbriqués les éléments de conception qui relèvent de la preuve et ceux qui se rapportent à son enseignement. Il serait illusoire de les séparer en deux groupes. Par contre on pourrait envisager un débat sur les attitudes des enseignants dans cette phase de recherche, pour faire identifier quelques-uns de ces éléments de conception : étudier une partie du film de la recherche du groupe pourrait faire partie de cette situation de formation sur la preuve

Quant à la phase de débat sur les présentations écrites, elle a permis de mettre à jour des indices sur les représentations des enseignants, qui nous ont permis d'identifier d'autres éléments de conception sur la preuve, et plus particulièrement sur le produit de la preuve. Dans cette position où ils devaient critiquer les textes qui leur étaient soumis, les enseignants se retrouvaient davantage dans un rôle qui leur était familier. De ce fait se révélaient beaucoup plus clairement que dans la recherche du problème, des règles du contrat didactique en vigueur dans leurs propres classes. Revenons sur quatre comportements d'enseignants qui freinent ou empêchent l'entrée dans la preuve. Le premier consiste à exiger **que tout soit explicité dans une démonstration, ce qui nous semble contradictoire avec l'argument de pertinence** qui a déjà été développé. Certains enseignants, tout à fait convaincus par ce qui est écrit, capables d'imaginer le non-dit, veulent tout de même que le texte soit complété. La conception sous-jacente est tout à fait décalée par rapport à celle de la preuve qui prévaut dans la communauté mathématique. Elle donne lieu à la règle du contrat suivante : *tous les arguments doivent être clairement explicités dans une démonstration* ; ce qui est illusoire. On la mettra en regard de l'extrait suivant, du document d'accompagnement du programme de seconde (2000) : « La rédaction est l'occasion pour l'élève de réorganiser en démonstration son raisonnement originel, de choisir les notations qui facilitent la pensée et de dégager les arguments essentiels de ceux qui peuvent être considérés comme évidents à son niveau. ». Un deuxième comportement consiste à citer les indices d'une forme de raisonnement reconnue, récurrence, disjonction des cas... comme des éléments de preuve, **quelle que soit la validité de ce qui est avancé**. Il est clair que le raisonnement par induction, la structuration des objets par coloration... ne font pas partie des raisonnements connus de la majorité des enseignants : la présence d'indices relatifs à ces raisonnements dans les productions n'est jamais mentionnée.

Ce comportement engendre la règle de contrat : pour faire une démonstration, on cherche parmi tous les types de raisonnements connus celui que l'on va utiliser et on l'indique (sauf s'il s'agit du raisonnement déductif simple), on rédige un texte suivant une trame spécifique de chacun de ces raisonnements. Reportons-nous à nouveau au document d'accompagnement du programme de seconde qui poursuit dans les termes suivants : « Pour éviter le recours systématique à des rédactions obéissant à un protocole rigide, on variera le type de rédaction (rédiger les grandes idées d'une démonstration, une partie d'une démonstration, rédiger en les justifiant les pistes possibles pour résoudre une question, rédiger une partie d'un cours ou une démonstration expliquée par un voisin). Ce travail de rédaction, amorcé au collège, est à poursuivre tout au long des années de lycée. » Il s'agit bien de combattre cette structuration formelle excessive de la preuve telle qu'elle vit dans le cursus secondaire. Un troisième comportement est lié à l'élément de conception *NS* suivant lequel, si un type de raisonnement permet de démontrer une condition suffisante, la preuve de la condition nécessaire se fera suivant le même type. Il s'agit bien là d'un élément de conception sur la preuve, étroitement lié au type[25] de problèmes traités dans les classes, qui détourne de la démonstration dans ce problème du polymino privé d'une case.

Un tel problème permet un travail approfondi sur les notions de condition nécessaire et de condition suffisante, non seulement parce qu'il permet facilement de comprendre que l'une est distincte de l'autre, mais aussi par le fait que la preuve de l'une relève d'une stratégie différente de celle de l'autre. Nous revenons enfin sur un quatrième comportement, lié à l'élément de conception *SV*, qui consiste à considérer comme systématiquement correcte une preuve constituée d'une suite d'implications dont les hypothèses et les conclusions sont toutes vraies. Avec un enseignant qui fonctionne sous cette conception, les élèves pourraient donc procéder ainsi : « Je regarde la figure, je lis les résultats vrais, j'écris des « donc » entre les résultats, en prenant soin de commencer par une hypothèse et de terminer par ce que l'on me demande de démontrer et ma démonstration est terminée ! ». Ces quatre comportements provoquèrent un débat, qui permit peut-être à quelques-uns un changement de leur rapport à la preuve.

Cette situation didactique devait comporter une quatrième phase, qui devait faire émerger les contradictions et permettre l'institutionnalisation : elle n'a pas eu lieu, faute de temps. Elle est, à notre avis, **indispensable**, car elle pourrait permettre la prise de conscience de ces contradictions, tout d'abord, entre les différents points du vue sur l'activité mathématique des élèves, qui résultent de la question[26] sur les attendus, ensuite, entre les différents énoncés proposés par les enseignants pour l'apprentissage de

[25] D. Grenier et C. Payan (1998) : « les mathématiques discrètes comme une alternative à la géométrie pour l'apprentissage de la démarche de preuve. »

[26] Quelles attitudes, quels comportements souhaiteriez-vous qu'un élève ait quand il fait des mathématiques ?

la démonstration, en réponse à la deuxième question[27], enfin relativement à la confrontation de ces deux séries de réponses. L'organisation de cette confrontation requiert toutefois que la situation soit prévue en deux temps nettement séparés, pour permettre l'identification des éléments de conception sur l'enseignement de la preuve et la classification des réponses.

Un travail spécifique doit, pensons-nous, avoir lieu avec l'ensemble des enseignants sur les énoncés qu'ils proposent pour l'apprentissage de la démonstration, permettant d'aboutir à une catégorisation du même type que celle qui est proposée. Le problème donné à chercher dans la deuxième phase, celui du polymino troué d'une case, doit aussi être analysé relativement aux conceptions sur la preuve qu'il permet de construire. Nous l'avons déjà signalé.

Nous souhaitions une situation fondamentale sur la preuve, donc aussi sur son enseignement, destinée à la formation des enseignants. Le problème du polymino peut en être le ressort ; il nous a en effet clairement permis de construire, à partir de la recherche et à partir de la discussion des productions, des éléments de conceptions sur la preuve et son enseignement. Mais il doit être accompagné d'un travail sur les conceptions, avec les enseignants eux-mêmes, qui ne pourront, pensons-nous, changer leur rapport à la preuve qu'à ce prix.

Aussi proposons-nous une nouvelle organisation de cette situation de formation : en deux temps séparés. Le premier temps comporterait les phases 1 et 2, inchangées ; la troisième phase, à savoir le débat sur les productions des groupes, préparée de la même façon que celle qui était prévue, mais en ne conservant qu'une question, à savoir : « En quoi chacune de ces productions est-elle une preuve (ou démonstration) ? En quoi n'en est-elle pas ? Pourquoi ? Que modifieriez-vous pour qu'elle en soit une ? » Par contre, nous **abandonnons l'idée d'un débat sur les deux mots de preuve et démonstration,** débat trop long lors de notre expérimentation, pour un bénéfice que nous pensons mince. Dans l'idée de reprendre cette expérimentation, nous choisirions d'annoncer clairement que « démonstration et preuve sont synonymes en mathématiques ». Par contre il est impératif que la discussion sur les productions des groupes soit suivie d'un **bilan à propos des éléments de conceptions** sur la preuve qui en ressortent, qui mette en évidence les contradictions. Le deuxième temps de la situation, quelques jours plus tard, comporterait deux phases :

1. lecture des réponses sur les attendus, proposées aux enseignants déjà classées, puis travail sur les énoncés pour l'apprentissage de la preuve aboutissant à une catégorisation, sans oublier l'énoncé relatif au problème du polymino ; ensuite bilan d'une première liste d'éléments de conceptions en jeu à propos de l'enseignement de la preuve, insistant encore sur les contradictions et les obstacles à l'entrée dans une démarche de preuve ;

2. identification d'une deuxième liste d'éléments de conceptions sur la preuve, à partir de la recherche d'un groupe, d'après le film ou le script.

[27] Proposez un énoncé qui, pour vous, est bien adapté au début de l'apprentissage de la démonstration. Expliquez pourquoi.

Bibliographie

ARSAC G. (1998), Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie, *Petit x n°47*, Grenoble, éd. IREM de Grenoble, 5-31.

BALACHEFF N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics 18*, éd. D. Reidel Publishing Company, 147-176.

BALACHEFF N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

BALACHEFF N. (1999), L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat..., *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, http :www-cabri.imag.fr/Preuve.

BARBIN E. (1989), Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie, ?, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Besançon, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 57-79.

BKOUCHE R. (2002), Du raisonnement à la démonstration, *Repères-IREM n°47*, Pont-à-Mousson, éd. Topiques, 41-64.

BOERO P. (1999), Argumentation et démonstration : une relation complexe, productive et inévitable en mathématique et dans l'enseignement des mathématiques, *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, http :www-cabri.imag.fr/Preuve.

BARBIN E., DUVAL R., GIORGIUTTI I., HOUDEBINE J. & LABORDE C. (2001), *Produire et lire des textes de démonstration*, Lonrai, éd. Ellipses.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques (1970-1990)*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage.

DUVAL R. & EGRET M.A. (1989), L'organisation déductive du discours, *Annales de didactique et de Sciences Cognitives 2*, Strasbourg, éd. IREM de Strasbourg, 25-40.

DUVAL R. (1990), Pour une approche cognitive de l'argumentation, *Annales de didactique et de Sciences Cognitives 3*, Strasbourg, éd. IREM de Strasbourg, 195-221.

DUVAL R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics 22*, Netherlands, éd. Kluwer Academic Publishers, 233-261.

DUVAL R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x n°31*, Grenoble, éd. IREM de Grenoble, 37-61.

DUVAL R. (2000), Découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.20/2, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage, 139-169.

GANDIT M & MASSE-DEMONGEOT M.C. (1996, rééd. 2001), *Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée*, Grenoble, éd. IREM de Grenoble.

GRENIER D. & PAYAN C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.18/1, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage.

LEGRAND M. (1996), La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol.16/2, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage, 221-280.

LEGRAND M. (1996), Deux regards sur l'enseignement des mathématiques : la problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique, *Repères-IREM* , Pont-à-Mousson, éd. Topiques.

PEDEMONTE B. (2001), *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

ROUCHE N. (1989), Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Besançon, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 9-38.