# MODELISATION ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES EN TS : UTILISATION D'UN MODELE PRAXEOLOGIQUE POUR POSER DES QUESTIONS DIDACTIQUES

Robert Noirfalise
IREM de Clermont-Ferrand

**Résumé :** Partant d'un fait d'apparence anecdotique - le refus par des enseignants de mathématiques d'un exercice conduisant à une équation différentielle- nous nous interrogeons sur les raisons de ce refus. Un examen de ce qui serait nécessaire pour rendre l'exercice incriminé acceptable nous conduit à penser qu'il y a un manque « didactique » du au fait que la justification de la technique de modélisation est en dehors du domaine mathématique (en un sens qu'il convient de préciser). Il y a donc un travail non assumé par les mathématiciens. L'est-il par les physiciens, par les biologistes ? Ce manque peut-il être comblé dans une classe de terminale en mathématiques et si oui, à quelles conditions ? Pour mener l'étude impliquée par les questions posées nous nous servons du modèle praxéologique du didactique proposé par Y. Chevallard.

## I Introduction

Y. Chevallard a proposé en didactique des mathématiques, un modèle praxéologique (logique de la pratique) modélisant une connaissance par un quadruplet (T,t, $\theta$, $\Theta$) avec :
- T : type de tâches
- t : technique pour effectuer la tâche
- $\theta$ : discours technologique justifiant la technique (pas nécessairement rationnel)
- $\Theta$ : théorie justifiant la technologie.

En TS, on va rencontrer comme types de tâches la détermination fonctionnelle de l'évolution d'une quantité en fonction du temps et ce en physique dans des domaines qui sont spécifiés officiellement dans le programme :
- évolution de la charge d'un condensateur
- évolution de l'intensité dans un circuit électrique
- nombre d'atomes radioactifs en fonction du temps
- en mécanique, distance parcourue par un point mobile soumis à une force constante ou à une force variable...

Ces quatre types de problèmes (chacun d'eux pouvant se décliner en plusieurs types de tâches selon les conditions) conduisent tous à des modélisations en termes d'équations différentielles, la plupart du type « y'=ay +b ».

- L'équation différentielle étant posée, le mathématicien produit une technologie relative aux équations différentielles de la forme y'=ay+b. La technique consiste alors banalement à appliquer le résultat d'un théorème donnant la solution de l'équation différentielle : $y= Ce^{at}-b/a$ ($a\neq0$)... la constante C pouvant se déterminer avec une condition initiale.

- Le physicien utilise l'organisation praxéologique produite par le mathématicien , ce qui lui permet de résoudre l'équation différentielle (passage du modèle différentiel au modèle analytique pour reprendre les termes du document d'accompagnement du programme de physique), mais le travail technologique ne s'arrête pas là : le physicien valide ou invalide la fonction « théorique » obtenue par comparaison avec des données expérimentales. L'accent est souvent mis sur cette distinction entre le travail du mathématicien et celui du physicien : le second, ce que ne fait pas le premier, essaie de percevoir la validité, l'adéquation entre valeurs théoriques et valeurs expérimentales, ce qui suppose un travail d'expérimentation qu'on doit aussi pouvoir décrire en terme praxéologique.

En revanche, alors même que les programmes insistent sur l'importance de la modélisation dans la pratique scientifique, s'il est dit dans les documents d'accompagnement qu' « on privilégiera les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première ou seconde [1]» il nous semble que le travail de traduction mathématique propre à l'aspect modélisation n'est pas sans poser problème. Nous faisons l'hypothèse, en utilisant les niveaux de détermination proposés par Y. Chevallard dans son modèle praxéologique du didactique que les mathématiques elles–mêmes peuvent apparaître comme un obstacle pour que travail de modélisation puisse s'épanouir en une classe de TS : à l'aune d'une certaine orthodoxie mathématique, la viabilité d'une organisation praxéologique utile pour le travail de modélisation, pour le travail de traduction mathématique est mal assurée.

Nous voudrions dans ce qui suit montrer ce qui nous conduit à formuler cette hypothèse et aussi par la même montrer l'utilité d'un modèle didactique pour l'observation et l'explication de phénomènes liés à l'enseignement de notre discipline.

## II Un exercice refusé par les mathématiciens de lycées.

Une journée de novembre 2003, une réunion suscitée par les IPR de mathématiques de notre académie, une dizaine de professeurs enseignant les mathématiques en TS, l'objet de la réunion « recenser des exercices possibles pour le baccalauréat sur le thème de la modélisation », ce pour alimenter la banque d'exercices proposés par l'inspection générale sur le site Eduscol.. Les enseignants présents proposent divers exercices et , en particulier, l'un d'entre eux, le suivant :

*« La plupart des produits pharmaceutiques, comme la pénicilline par exemple, s'élimine du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité de produit y rémanente dans le sang (c'est à dire la quantité de produit présent dans le sang à l'instant t). Le*

[1] Accompagnement des programmes : mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, CNDP, (2002) p31

*coefficient de proportionnalité est une constante strictement positive, caractéristique du produit administré.*

*1° Le produit est donné au patient en une seule dose $y_o$ en milligrammes.*

*On note y=f(t) la quantité de produit rémanente dans le sang en fonction du temps t, exprimé en secondes.*

*a.* *Déterminer la fonction f.*

*b.* *Le produit a une demi vie de 2 heures. Déterminer la constante k.*

2° .... ».

Ce problème a été refusé par une majorité des participants à la réunion : ce n'est pas un exercice que l'on peut donner à l'épreuve de mathématiques du baccalauréat. La raison évoquée, c'est le principal argument mis en avant, est que la première question , la question 1°a. n'appartient pas au domaine des mathématiques mais bien plutôt à celui de la physique ou de la biologie[2].

Un premier problème que fait apparaître ce refus est donc le suivant : Quelle est la discipline, s'il y en a une, qui a vocation aujourd'hui, à prendre en charge officiellement, en TS, un tel problème ? On peut voir dans ce problème un prototype d'un problème de mélange conduisant à une équation différentielle du type « -y'=ky. ». Le mathématicien n'assume pas la modélisation. Est-ce au physicien de la prendre en charge, les problèmes de mélanges conduisant à examiner des variations à l'aide de débits ? Est-ce au biologiste lorsqu'il s'agit de produits pharmaceutiques ?

Le terme de « prise en charge » mérite d'être clarifié : il s'agit ici de se demander si une des trois disciplines citées à pour mission d'entraîner les élèves à la résolution de ce type de problèmes. Le refus des mathématiciens signifie que ce n'est pas à eux de le faire, du moins interprètent-ils ainsi leur mission. En revanche, dans un TD ou une activité, on peut rencontrer un tel problème[3] mais cela ne lui donne pas pour autant un statut d'exigible pour le baccalauréat.

Dans ce qui suit nous essayons d'esquisser quelques hypothèses explicatives du refus des *mathématiciens.*

## III Un déficit technologique ?

### A Le travail légitime du mathématicien ?

Ceux ayant refusé le problème arguant que sa résolution met en jeu des compétences non systématiquement entraînées en classe de mathématiques, seraient d'accord pour que soit donnée l'équation différentielle, mais alors la question perd beaucoup de son intérêt : elle devient un bien banal exercice d'application d'un résultat de cours. On voit ici ce qui est clairement à la charge du mathématicien, « la résolution

---

[2] Le document d'accompagnement des programmes de TS leur donne raison . Bien que le concept d'équations différentielles soit important d'après les auteurs du programme, il est dit, p.31, « On choisira avec soin une ou deux situations menant à une équation différentielle. Les élèves seront guidés dans le travail de traduction mathématique. Cette étape est délicate : s'y confronter au moins une fois est indispensable mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet pour l'examen du baccalauréat ».

[3] Un professeur peut le faire dans une classe pour illustrer l'intérêt des équations différentielles , mais un autre pressé par le temps ou pour d'autres raisons, pourra faire d'autres choix sans pour autant faillir à sa mission.

d'une équation différentielle » dès lors que celle-ci est explicitée, du moins bien sûr, celles faisant partie officiellement partie du programme.

Ce qui semble poser problème pour la prise en charge par le mathématicien du travail de modélisation dans le problème proposé est la traduction des termes « *le produit s'élimine à une vitesse proportionnelle à la quantité y de produit rémanente dans le sang* » en « *-y'=ky* ». Certes le terme « rémanent » qui est spécifique d'un domaine de connaissances non mathématiques pouvait poser problème et il convenait comme l'a fait l'auteur de l'exercice d'en préciser le sens.

Il est probable aussi que le sort de l'exercice aurait été bien différent si le libellé avait été « *soit un mobile se déplaçant avec une vitesse proportionnelle à la distance parcourue* » : la vitesse d'un mobile est traditionnellement traduit, en classe mathématique, par la dérivée de la distance parcourue.

De plus, on peut sûrement dire que ce qui fait problème pour le mathématicien, est « la vitesse d'élimination du produit »et sa traduction dans le domaine mathématique : on peut , en effet supposer que « la proportionnalité à la quantité y » est quelque chose dont l'interprétation plus classique en ky, n'est pas le point d'achoppement du problème, mais ce serait peut-être un point à vérifier (les situations de proportionnalité font l'objet d'entraînement au collège).

### B Une technique non entraînée par les mathématiciens ?

On peut comprendre, suite aux déboires suscités par l'épreuve de mathématiques au baccalauréat 2003, section S, que les mathématiciens soient particulièrement sensibles à ce qui peut être demandé lors d'une telle épreuve : nous l'avons vu , il convient de poser des questions qui ont fait l'objet d'un entraînement (on peut imaginer, en fin de problème des questions à la marge, que seuls les meilleurs éléments pourront résoudre, mais de telles questions ne peuvent former l'essentiel de l'épreuve).

On peut donc faire l'hypothèse que la technique consistant à traduire « vitesse d'élimination proportionnelle à la quantité rémanente » en « -y'=ky » ne fait pas l'objet d'un entraînement systématique en classe de mathématiques, ou du moins qu'elle n'est pas officiellement et publiquement assumée en classe de mathématiques.

Formulons une hypothèse (ou une thèse): cette technique n'est pas assumée en classe de mathématiques car le discours technologique permettant de la justifier n'est pas mathématiquement orthodoxe. Les mathématiques, en tant que discipline enseignée, constituent une détermination qui positivement permet les développements que l'on trouve en classe de maths. Ici, au contraire, nous aurions un exemple où elles sont un obstacle pour l'entraînement à une pratique de modélisation .

En effet, soit à justifier la technique associant à une vitesse une dérivée proportionnelle à la valeur de la fonction à un instant donné. On peut le faire avec le discours suivant :

*A un instant t, considérons un instant t+h voisin avec h très petit.*

*Considérons alors la variation y(t) –y (t+h) : considérons que, de façon approchée, elle est proportionnelle, d'une part à la variation du temps (si h double alors la variation doublera) et d'autre part à la quantité rémanente à l'instant t, à savoir y(t) (si y(t) est deux fois plus grande, il en sera de même de la variation). Traduisons cette double proportionnalité avec le symbolisme des physiciens*[4] *:*

---

[4] Il conviendrait certainement d'établir le lien avec ce que fait le physicien, y est une variable dépendant du temps pour ce dernier alors que c'est une fonction pour le mathématicien.

$$\Delta y = k.\Delta t.y \text{ soit encore } \frac{\Delta y}{\Delta t}=k.y$$

*Cette égalité sera d'autant plus légitime que $h=\Delta t$ sera petit, soit en faisant tendre h vers O et en passant à la limite, « $y'=ky$ ».*

On pourrait aussi justifier la démarche en disant que l'on cherche d'abord localement en tout point un modèle approché de la situation, puis qu'en passant à la limite on a une relation fonctionnelle vérifiée en tout point, une équation différentielle dont la résolution donne un modèle global de la situation.

Ce petit discours qui sert à l'obtention de l'équation différentielle peut-être vu avec un certain dédain par des mathématiciens (du bricolage de physicien) : h petit n'est pas « mathématique » : il suffit de faire un zoom pour que h petit devienne grand ! L'égalité $\Delta y=k.\Delta t.y$ n'est pas vraie en toute rigueur.

Bref, ce petit discours est efficace (c'est fonctionnel) mais en même temps, un mathématicien de TS en ce début de 21$^{\text{ième}}$ siècle sera éventuellement mis dans l'embarras si on lui demande d'en user. Il le sera d'autant plus que certaines des situations prévues par les programmes impliquent de plus un passage du discret au continu qu'il conviendrait de justifier : c'est le cas de la désintégration radio-active ; c'est aussi le cas des situations liées à la modélisation des systèmes électriques dès lors que l'on considère des charges électriques comme des quantités d'électrons.

On peut comprendre cet embarras : il y a un partage social du travail, y compris en science : le petit discours ci-dessus est un discours justifiant une technique de modélisation : or, aujourd'hui encore plus qu'autrefois, ce qui fonde le travail du mathématicien dans le domaine technologique c'est la démonstration avec ses contraintes (axiomes, définitions, hypothèses qu'on suppose vraies et ensuite déductions). Le travail de modélisation est autre : cela explique aussi la gêne ressenti par les mathématiciens en probabilités où il y a souvent, avant d'engager des calculs, un petit travail de modélisation à opérer avec parfois des choix multiples pouvant conduire à des résultats différents.

### C. Quelques preuves de l'embarras des mathématiciens de lycée :

On peut avancer quelques éléments allant dans le sens de ce que nous énonçons ci dessus. Tout d'abord, nous donnons l'énoncé d'un exercice, qui lui a été accepté sans aucune réticence, puis nous donnerons deux extraits de textes d'exercices visant à reprendre le petit discours technologique décrit ci-dessus et produit par des mathématiciens.

1. Un exercice accepté :

L'exercice suivant qui met en scène également la présence d'une substance médicamenteuse dans le sang a été accepté, quant à lui, sans problème, comme exercice type pour l'épreuve du baccalauréat : il est représentatif de ce qui peut être demandé à un élève de TS lors de l'épreuve de mathématiques à cet examen.

*On note $Q(t)$ la quantité d'une substance médicamenteuse encore présente dans le sang t heures après l'injection intraveineuse de 1,8 unités du produit.*

*On donne $Q(t)=1,8.e^{-\lambda t}$ avec $\lambda=-Ln0,7$.*

*On réinjecte toutes les heures 1,8 unités du produit. On note $R_n$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$.*

L'exercice, après cette entrée en matière, met en scène l'étude de la suite $R_n$ , suite qui est du type $u_{n+1}=a.u_n+b$.

Le problème de la modélisation conduisant à une représentation fonctionnelle de la quantité de substance médicamenteuse dans le sang en fonction du temps est éludé : il est supposé réalisé, la fonction est donnée.

2. Des essais pour arriver à l'équation différentielle :

♦ Essai dans un manuel de TS :

Le manuel considéré dans un chapitre consacré aux équations différentielles ouvre en TD, une rubrique intitulé : « Situations menant à une équation différentielle »

En cohérence avec les commentaires des programmes, l'objectif déclaré de celle-ci est ainsi formulé par les auteurs[5] :

*« Nous nous contenterons d'envisager des exemples simples issus de la physique ou d'autres sciences appliquées au sens suivant :*

- *Nous saurons facilement obtenir l'équation différentielle*
- *Celle-ci est du type y'=ay ou y'=ay+b »*

Le premier exemple choisi est celui de la désintégration radioactive. L'obtention de l'équation différentielle a été obtenue dans un chapitre antérieur (celui relatif à la présentation de la fonction exponentielle) de la manière suivante à l'aide d'un exercice[6] :

*« Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante : Si N(t) est le nombre de noyaux à l'instant t, pendant la durée $\Delta t$, la variation $\Delta N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à $\Delta t$ et à N(t). Les physiciens [7] écrivent*

$$\Delta N(t)=-kN(t)\Delta t \qquad (k>0)$$

*En supposant que la fonction $t \to N(t)$ est dérivable, expliquer pourquoi on peut écrire*

$$N'(t)=-kN(t) \text{ ».}$$

La méthode de travail est présentée, sans oublier la référence aux physiciens (*les physiciens écrivent*)

Or en toute rigueur, comme pourrait le faire un élève de TS, on peut tenir le discours suivant :

*On a $\Delta N(t)= N(t+\Delta t)-N(t)=-kN(t)\Delta t$ ; Ceci est vrai pour tout t donc pour une valeur particulière $t_0$, on a aussi : $N(t_0+\Delta t)-N(t_o)=-kN(t_0)\Delta t$ et en posant $t-t_0=\Delta t$, on obtient*

$$N(t)= N(t_0)-k.N(t_0)(t-t_0)$$

*Soit encore : $N(t)=)-k.N(t_0).t + N(t_0)(1+k.t_0)$.*

---

[5] Excellent manuel par ailleurs ! Il ne s'agit pas ici de faire une critique de celui-ci mais bien de montrer une difficulté partagée par toute la collectivité de ceux ayant en charge l'enseignement des mathématiques en TS.

[6] Idem . Notons que « en supposant la fonction dérivable » fait qu'il y a un passage essentiel du discret au continu qui fait l'objet de bien peu de commentaires (les mathématiques n'ont pas de discours interne justifiant leur redoutable efficacité !)

[7] Souligné par nous.

La fonction $t \to N(t)$ serait ainsi une fonction affine, ce qui n'est pas le but recherché.

Bref, cela est bien banal, mais ce que nous voudrions souligner, c'est l'embarras didactique que cela peut provoquer comme si nous manquions d'outils ou d'usages pour montrer clairement ce que nous voulons faire ( le recours aux infiniment petits ne serait pas nécessairement d'un grand secours car il faudrait tout autant passer de variations finies à des variations infiniment petites).

♦ Une tentative pour passer d'un modèle discret en terme de suite à un modèle continu à l'aide d'une fonction exponentielle.

Nous reproduisons en Annexe, le texte proposé par un collègue lors de la réunion dont nous avons déjà parlé.

Demandons nous comment un élève peut répondre à certaines questions du texte proposé :

*1-a) Montrer que $t_1=73{,}6°$*

L'unité de temps est la seconde. En une seconde, il est sorti 2litres à 80° et il en est entré 2 litres à 16°. Il reste donc 18 litres à 80° qui se mélangent à 2 litres à 16°, d'où

$$t_1 = \frac{80.18+16.2}{18+2} = 73{,}6°$$

La question *1-b)* peut se faire de façon analogue en remplaçant 80° par $t_n$.

*Ce raisonnement est légitimé par le fait que dans le texte il est dit que « le très grand nombre de points de rafraîchissement permet de considérer que, toutes les secondes, 18 litres du circuit sont mélangés de façon homogène à 2 litres d'eau froide ». Il y a une discrétisation du problème avec l'unité de temps, ici la seconde.*

*II-a) h est un réel non nul* (on ne peut dire que l'on considère h petit en mathématiques, nous l'avons déjà dit.)

Ce qui est attendu est alors probablement ceci.

*Pendant la durée h, après l'instant t, il sort de l'eau à T(t) degré, il en sort 2h litres, il en reste (20-2h) et il en entre autant à 16°, d'où :*

$$T(t+h)=\frac{(20-2h)T(t)+2h.16}{20}$$

On considère que ce qui était admis pour h=1seconde peut se généraliser avec d'autres valeurs de h. On ne peut cependant admettre que ce résultat soit vrai pour tout h car alors, point d'équation différentielle, le problème est résolu en faisant t=0, et en remplaçant h par t, on obtient : $T(t)=(1-0{,}1t)T(0)+1{,}6t$. La fonction T est trouvée ; c'est une fonction affine. On retrouve la difficulté rencontrée déjà ci-dessus.

## IV Une organisation praxéologique non entraînée ?

Notons O.P. l'organisation praxéologique dont les termes seraient les suivants :

- T : type de tâche : traduire mathématiquement la variation relative instantanée d'une quantité lorsque celle-ci est proportionnelle à la quantité considérée.
- $\tau$ : considérer un temps court $\Delta t$, écrire que la variation $\Delta y$ de la quantité pendant le temps $\Delta t$ est à la fois proportionnelle à y et au temps $\Delta t$ : $\Delta y=ky\Delta t$.

*Faire tendre la variation de temps $\Delta t$ vers 0 et obtenir en passant au quotient et à la limite :$y'=ky$.*

- $\theta$ : la technologie paraphrase la description de la technique en y ajoutant des arguments justifiant la double proportionnalité (ce qui le cas échéant permet de trouver le coefficient de proportionnalité) arguments qui peuvent être hors mathématique.
- $\Theta$ les éléments théoriques justifiant $\theta$ seraient à la fois ceux de la proportionnalité, ceux définissant la dérivée d'une fonction auxquels il faudrait sans doute ajouter une pincée de topologie pour justifier l'aspect local du procédé.

Nous avons déjà vu l'embarras des mathématiciens avec une telle organisation. On peut se demander si elle fait l'objet d'un entraînement systématique en classe de physique en TS. Des collègues physiciens interrogés, nous ont répondu négativement : une telle organisation est rencontrée mais ne fait pas l'objet d'un entraînement.

Les élèves la rencontrent, par exemple, à propos de la désintégration radioactive (loi de décroissance radioactive) *à peu près* dans les mêmes termes que ceux extraits du manuel de mathématiques cité ci-dessus.

« ... *On constate expérimentalement que le nombre moyen de désintégrations est proportionnel au nombre de noyaux N(t) présents à l'instant t et au temps d'observation $\Delta t$...*

... $\Delta N=-\lambda N(t)\Delta t$...

*Si l'on considère un intervalle de temps dt très petit (sic),...,* $\frac{dN}{N(t)}=-\lambda dt$...,

*Et par intégration* $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$... »

## EXTRAIT DE « TORDEUX M.F : PHYSIQUE TS ED BREAL P105. »

Nous ne savons pas si un physicien trouve là une pratique orthodoxe dans son champ disciplinaire : en revanche on peut comprendre qu'un mathématicien ne s'y reconnaisse pas vraiment, nous n'en voulons pour preuve que la référence à un temps *très petit* pour introduire l'ostensif *dt* qui à lui seul semble justifier le droit d'intégrer l'équation ainsi obtenue.

Le travail fait n'est plus à faire et la loi de désintégration obtenue, les élèves dans les exercices proposés l'utilisent directement : ainsi ce n'est pas pour eux l'occasion de s'entraîner à un usage de O.P. : ils l'ont rencontré mais ne la pratiquent pas.

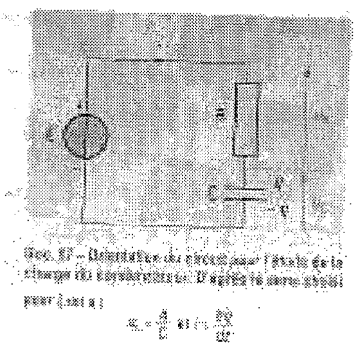
Du côté de l'évolution des systèmes électriques la situation est différente mais encore plus radicale : la rencontre avec O.P. n'est pas nécessaire comme en atteste l'extrait suivant du même manuel à propos de la charge d'un condensateur (p 155)

« *Equation différentielle vérifiée par la tension $U_C$ :*

L'interrupteur fermé en position 1, on oriente le circuit et on étudie le dipôle RC en convention récepteur (→Doc. 17). D'après la loi d'additivité des tensions dans un circuit série, on a l'égalité :

$$U_R+U_C=E \quad (1)$$

*Or* $U_R=Ri=R\frac{dq}{dt}$ *et* $q=CU_C$, *d'où :* $U_R=RC\frac{dU_C}{dt}$



*L'équation (1) s'écrit donc :*

$$RC\frac{dUc}{dt}+Uc=E$$

*On reconnaît une équation différentielle du premier ordre....*

Il y a bien ici un travail de traduction mathématique conduisant à l'écriture d'une équation différentielle et dans ce manuel, on rencontre des exercices où l'on demande à l'élève de mettre en oeuvre ce type de travail. On pourrait cependant utiliser O.P. de la manière suivante. *Soit à étudier le flux d'électrons ou de charges électriques dans la résistance R : La force électromotrice fournit un flux de débit constant et la capacité un flux dont le débit s'oppose au précédent proportionnellement à la charge Q du condensateur ce qui peut alors se mathématiser par :* $R\frac{\Delta Q}{\Delta t}=E-CQ$ *(les constantes sont caractéristiques de la modélisation du système électrique).*

La mise en œuvre de O.P. pourrait ici éclairer davantage que la solution proposée par le manuel, mettre davantage en évidence les raisons d'obtention d'une telle équation.

Il n'en reste pas moins que nous sommes en présence, très certainement d'un phénomène usuel qui jalonne le chemin du travail de modélisation : O.P. est une organisation praxéologique *transitoire*, qui peut être remplacée par d'autres plus rapides, plus économiques mais avec en contrepartie un travail qui se fait davantage en aveugle grâce au formalisme mis en place ( la modélisation algébrique est caractéristique de ce point de vue). On peut remplacer l'ostensif Δ sans grand frais par δ comme le manuel le fait à propos de la désintégration radioactive, puis ayant écrit $i=\frac{dq}{dt}$, O.P. disparaît au profit de la solution donnée ci-dessus où le travail de formulation déjà fait (comme $U_R=Ri$) permet d'obtenir l'équation différentielle.

♦ Peut-on faire exister O.P. en TS ? Peut-on imaginer entraîner les élèves à l'usage d'une organisation praxéologique comme O.P. ?

Il conviendrait que cette organisation praxéologique soit légitimée comme une pratique acceptable par les mathématiciens : l'introduction plus systématique d'un travail de modélisation est peut-être à ce prix.

Sans que cela assure de la viabilité de O.P. on peut donner une situation prototype et fondamentale permettant son entraînement :

Les problèmes de mélange dans un réservoir d'une substance avec de l'eau.

*Un réservoir d'eau ayant un volume $Vm^3$ contient à l'instant $t=0$, $m_0$ kg d'une substance donnée (un sel par exemple).*

*L'eau sort du réservoir avec un débit d (en $m^3/mn$),et de l'eau contenant du sel à raison de b kg par $m^3$ alimente le réservoir avec le débit d. On suppose que l'eau dans le réservoir est continuellement brassée et que la répartition du sel est ainsi toujours homogène dans le réservoir.*

*Déterminer la quantité de sel contenu dans le réservoir en fonction du temps.*

Solution : $\Delta m = -\frac{m}{V}d\Delta t + bd\Delta t$ d'où $m' = -\frac{d}{V}m + bd$ .....

Ce problème pourrait se décliner de diverses façons avec des variantes : le problème initialement refusé par les mathématiciens est de ce type, celui donné en Annexe peut s'y ramener ; nous avons vu que la modélisation de la charge ou décharge d'un condensateur pourrait aussi être considéré comme un problème de flux et de débit.

## V Conclusion:

Comme en toute pratique humaine, un type de tâches T étant donné, il existe des techniques $\tau$ de réalisation des tâches t appartenant à T. Ici, résoudre une équation différentielle , celle-ci étant donnée, est clairement du ressort du mathématicien et pour quelques-unes d'entre elles on en connaît des solutions : pour les résoudre, il suffit d'appliquer un résultat de cours comme c'est le cas pour les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants .

Un autre type de tâches, voisin du précédent mais distinct cependant, est de modéliser un problème par une équation différentielle : le problème de refroidissement, celui de la désintégration radioactive ou encore celui de l'élimination de substances médicamenteuses dans le sang sont des exemples de tels problèmes. Des techniques de modélisation existent (avec des variantes selon les problèmes). Une technique consiste à procéder par étapes : on cherche un modèle local en tout point : pour cela on fait des hypothèses de « régularité ». Cela conduit à une équation avec une différence finie ($\Delta y/\Delta t$), c'est le modèle local cherché. on passe à la limite selon la variable temps et on obtient, avec l'apparition d'une vitesse qui devient une dérivée, une équation différentielle. Notons que la discrétisation du problème, qui conduit à une étude de suite et qui n'est autre que la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle obtenue n'est pas un intermédiaire indispensable pour l'obtention de la solution continue, ce qui importe est l'obtention du modèle local en tout point.

Cette technique, laquelle consiste en un petit discours qui conduit à écrire une équation, puis l'équation différentielle par passage à la limite n'est pas difficile. L'obstacle à son usage en classe de mathématiques est qu'elle n'est pas « très orthodoxe », pour un mathématicien soucieux de rigueur, pour qui les seules justifications technologiques admises sont des démonstrations.

[La technique évoquée avec passage par un modèle local sous forme d'équation aux différences finies pour armer la main et conduire à l'équation différentielle peut-être transitoire : dès qu'on est familiarisé avec celle-ci, on doit pouvoir évoquer directement une vitesse de variation d'une quantité et aller directement à l'équation différentielle.]

Il conviendrait donc, et pour cela il faudrait disposer de temps, réhabiliter ce type de techniques, faire qu'elle puisse être entraînée en ouvrant clairement une rubrique « modélisation de problèmes conduisant à des équations différentielles » comme les problèmes de mélange. Ce serait restaurer des mathématiques que l'on qualifiait autrefois de « mixtes » en ce qu'elles n'étaient pas stricto sensu au sein des mathématiques pures ; : ce ne sont pas des mathématiques appliquées, c'est bien dans une certaine mixité disciplinaire qu'il conviendrait davantage de les situer.

Nous avons utilisé ci-dessus un modèle praxéologique du didactique, lequel nous invite à regarder les mathématiques comme une pratique, les conditions d'exercice et les déterminants de celle-ci. L'usage de ce modèle nous conduit à être sensible aux entraînements effectifs proposés aux élèves, ce qui nous semble-t-il renouvelle quelque peu le regard porté sur l'enseignement de notre discipline.

## Bibliographie :

AUSSEL Gérard, BLOCH Isabelle, LAFONTAINE Jean, BOISSERIE Claudette, PICHAUD Joëlle, SZWED Tadeusz (1986) Petits variations ou l'art de dériver sans le savoir – IREM Paris VII – N°45

JULLIEN Michel, MATHERON Yves, SCHNEIDER Odile (2003) Quelques éléments de réflexion sur le sujet de mathématiques du baccalauréat 2003-SérieS- in Petit x n°62 pp72/77.

Ministère de la Jeunesse, de l'éducation et de la recherche (2002) Accompagnement des programmes : Mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économie et sociale. CNDP

TORDEUX Marie-Françoise, Physique, terminale S Ed Bréal.

WINTHER Jean, COSTE Rémy (2004) les équations différentielles en terminale scientifique. In Bulletin APMEP n°450 pp44/59

Le lecteur intéressé par une présentation du modèle praxéologique pourra se référer aux articles parus sur le sujet dans les deux références suivantes :

NOIRFALISE Robert (éd) (1998) Didactique et analyse des pratiques enseignantes : Actes de l'Université d'été de la Rochelle. Ed IREM de Clermont-Ferrand.

DORIER Jean Luc et all (éds) (2002) Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques, Ed La Pensée sauvage, Grenoble.

## Annexe :

L'embarras d'un collègue mathématicien pour passer du discret au continu.

Le système de refroidissement par eau d'une machine est constitué d'un circuit de contenance 20 litres, rafraîchi en de multiples points par un courant d'eau froide à 16°C dès que l'eau dans le circuit atteint 80°C.

Il entre très rapidement autant d'eau qu'il en sort à raison de 2 litres par seconde et le très grand nombre de points de rafraîchissement permet de considérer que, toutes les secondes, 18 litres du circuit sont mélangés de façon homogène à 2 litres d'eau froide (même température en chaque endroit du circuit).

On considère comme négligeable l'apport de chaleur dans le circuit dû au fonctionnement de la machine pendant le rafraîchissement.

On admet que x litres d'eau à u°,ajoutés et mélangés à y litres d'eau à v° font x+y litres d'eau à une température de $\frac{u^\circ x + v^\circ y}{x+y}$.

Combien de temps, exprimé en secondes, faut-il pour que la température du circuit tombe à 40°C?

I – Une modélisation à l'aide d'une suite.

On note $t_n$ la température du circuit au bout de n secondes de rafraîchissement ( n entier naturel).

Quelle est la valeur de $t_0$ ? Montrer que $t_1 = 73{,}6$°C.

Prouver que, pour tout n de IN, $t_{n+1} = 0{,}9\ t_n + 1{,}6$.

A l'aide de la calculatrice, proposer une réponse au problème posé; argumenter la réponse par des résultats numériques fournis par la calculatrice.

Soit u la suite définie sur IN par $u_n = t_n - 16$.

Montrer que la suite u est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison .

En déduire que pour tout n de IN, $t_n = 64 \times 0{,}9^n + 16$.

e)Répondre par le calcul au problème posé.

II – Une modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle.

On note T(t) la température du circuit à l'instant t, exprimé en secondes, $t \in [0,+\infty[$ .

Soit h un réel non nul .

Calculer T(t + h).

Montrer que $\dfrac{T(t+h)-T(t)}{h}$ = - 0,1 T(t) + 1,6.

En déduire que T est une solution de l'équation différentielle 10 y' + y = 16.

En utilisant la valeur de T(0), montrer que , si $t \in [0,+\infty[$ , $T(t) = 64e^{-\frac{t}{10}} + 16$.

Etudier les variations de T sur $[0, +\infty[$; tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Par lecture graphique, donner une solution approchée au problème posé. Trouver le résultat exact par un calcul.