CALCULS DE MESURES SANS LES DECIMAUX

Annie RODRIGUEZ.
IUFM CRETEIL, Groupe « Epistémologie des Mathématiques »

Ce groupe de recherche travaille depuis 1995 à l'introduction de perspectives historiques dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ; il a publié un ouvrage en 1997 chez Hachette Education « Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3 ».
Il s'agit, ici, de renforcer la prise de conscience que « la division par dix » est liée à notre écriture décimale usuelle et d'approfondir la compréhension de l'écriture « à virgule » dans une situation de calculs de mesures, comme à la Renaissance.
La séquence s'est déroulée dans un CM2, dans la classe de Jean-Michel BRAULT, à La Croix en Brie (77).

Le concept de mesure

Universel, le concept de mesure repose sur des expériences nombreuses, anciennes, de mesurages. Les choix d'unités de mesures de longueurs ont été divers et variés selon les époques, régions, cultures, mais il s'agit toujours de reporter des étalons, de dénombrer les reports, de communiquer les résultats, de dégager des principes, de réaliser des calculs.

Le souci de réduire les approximations des activités de mesurage conduit inévitablement au fractionnement des unités de référence, et au codage de ces différentes sous-unités.

Nous faisons le pari que la démarche évoquant l'histoire des notions, les problèmes rencontrés, les techniques utilisées enclenche des interrogations sur nos pratiques mathématiques actuelles et permet la construction et/ ou la rectification de savoirs et de savoir-faire pour les élèves d'aujourd'hui.

Les anciennes mesures, utilisées au Moyen âge et les calculs effectués à partir de celles-ci vont être le support des activités décrites dans cet article.

Références historiques

Les systèmes d'unités et de sous-unités de mesures utilisés au Moyen âge fonctionnent sur des rapports numériques très distincts de la base dix :
12 points pour une ligne ; 12 lignes pour un pouce ; 12 pouces pour un pied ; 6 pieds pour une toise ; 18 pieds pour la perche de Paris ; 2000 toises pour une « *petite* lieue ou lieue de poste » illustrent les mesures de longueur.

L'usage des pieds – pouces - toises travaillé ici avec les élèves, se situe historiquement avant la généralisation du système décimal à la Révolution Française. Il fait découvrir la pertinence de la base dix, dans la gestion des calculs de mesures de grandeurs.

Le *boisseau* est destiné aux volumes des « matières sèches » ; 3 boisseaux font 1 *minot*, 2 minots font une *mine* ; 2 mines font 1 *setier* ; 12 setiers font un *muid* !

Pour les masses il y a le « *grain* », 24 grains pour 1 « *denier ou scrupule* », 3 scrupules pour 1 *« gros* », 8 gros pour 1 « *once* », 4 onces pour 1 « *quarteron* », 2 quarterons pour 1 « *marc* » ; 2 marcs pour 1 « *livre* », 100 livres pour 1 « *quintal* » 20 quintaux pour 1 « *tonneau* ».
Le choix d'unification et de valorisation des rapports de dix est justifié par quelques mathématiciens dont Simon STEVIN dans son livre « la Disme » (1634).

Ce n'est qu'à la REVOLUTION française que de nouveaux étalons sont définis et les correspondances numériques précisées :

« *Le mètre est la dix-millionième partie de l'arc de méridien compris entre le pôle et l'équateur ; le décimètre est la dixième partie du mètre ; le centimètre est la centième partie du mètre …Le décamètre est une longueur de dix mètres ; l'hectomètre vaut cent mètres* ».
Des tableaux de mesures, poids et monnaies de la REPUBLIQUE FRANCAISE sont édités « *contenant le système méthodique de leur nomenclature* » à savoir :

« on appelle ***décimales*** *les parties d'un tout divisé en* 10^n *,*100^n *.(…)dans le système décimal, les unités deviennent de 10 en 10 fois plus petites à mesure que l'on avance de gauche à droite (…) la virgule décimale détermine la place des unités* (…)»

Usages actuels

La vie quotidienne de nos élèves rend coutumier l'usage d'écritures décimales pour exprimer des mesures : prix (3,50 F par exemple) ; longueur (1,52 m) ; capacité (1,5 l) ; masse (2,357 kg), même avant que le concept de nombre décimal soit abordé en CM1. La virgule est alors interprétée comme un marqueur de changement d'unités : 3,50 F pour 3 francs 50 centimes ; 1,52 m pour 1 mètre 52 centimètres ... Le signifié « base dix » est masqué.
En CM2, les élèves ont vu que les « nombres à virgules » sont issus de fractions décimales : 3,50 F signifie alors $(3+\frac{50}{100})$ F.

1,52 m représente $(3+\frac{52}{100})$ m.

Intentions didactiques et situation

Dans le champ des savoirs « MESURE », nous retenons le problème de l'expression et du codage des mesures, des équivalences entre unités en vue d'une anticipation réfléchie sollicitant des calculs : il s'agit de comparer des mesures de longueurs « Renaissance » et d'évaluer leur écart dans un système non décimal. Cette tâche permet de redécouvrir l'usage décimal de la virgule.

Les obstacles sont techniques : maîtriser les changements d'unités (base douze) nécessaires à la comparaison des mesures pour le calcul d'une différence.
Le **problème posé** conduit à soustraire « 2 pieds 23 pouces » de « 4 pieds 8 pouces ».

Avant cette séance, nos élèves ont été d'abord familiarisés aux unités de longueurs « pieds - pouces - toises » ; ils reproduisent notamment « le pied » de Charlemagne avec ses graduations en pouces, et effectuent des mesures dans la classe, avec ce nouvel outil.
Les équivalences entre ces unités anciennes sont explicitées, affichées et mémorisées.
La classe, niveau CM 2, est ainsi amenée à résoudre le problème suivant :
« Imaginez que vous ayez à recouvrir d'une nappe rectangulaire une de ces tables, trouvez alors, si la longueur donnée convient ; déterminez la mesure de la longueur « en plus » qui permet les retombées de la nappe ».
Les mesures trouvées par les élèves avec leurs outils anciens pour les dimensions des tables sont redonnées.

Longueur de la nappe : 4 pieds 8 pouces
Longueur de la table : 2 pieds 23 pouces

Les élèves se mettent en recherche individuelle sur un temps court de 6 à 8 minutes.
Le maître organise alors une mise en commun des résultats : deux réponses distinctes émergent : 7 pouces pour la majorité d'entre eux, 9 pouces pour quelques autres. L'obstacle à surmonter est celui de savoir qui a raison, et d'où provient l'erreur sur l'un des résultats. Les élèves sont amenés à s'intéresser aux questions suivantes :

Comment avez-vous fait, les uns et les autres ?
Plusieurs procédés sont présentés :

Pour l'écriture des nombres-mesures : 4. 8 ou 4. 8 ou 4P 8p ou 4P 08p puis 2,23 ou 3,11 ou 3P 11p

On remarque donc que la virgule sert à séparer des pieds et des pouces ou que P désigne l'unité PIED et p l'unité POUCE.
Le nombre 3,11 est obtenu en utilisant l'équivalence 12 pouces pour 1 pied, donc 23 pouces font 1 pied et 11 pouces.

Pour le choix d'une opération :

- des soustractions sont proposées comme ci-dessous :

```
   4,8         4 ,  8           4 ,  8          4P  8p
 - 2,23     -  2 ,23         -   3, 11      -  3P 11p
  -------     ---------         -------        --------
```

Une difficulté apparaît déjà : comment écrire 4,8 et respecter un alignement vertical avec 2,23 ou 3,11 ? Quelques élèves laissent un espace (équivalent à un zéro) avant le 8.

- des additions à trous sont également retranscrites ; la difficulté précédente est levée pour la majorité des élèves :

2,23	3,11	2P 23p	3P 11p
+	+	+	+
--------	---------------	-------------------	--------------------
4,8	4,8	4P 8p	4P 8p

Pour le choix d'une autre procédure : le calcul mental

« 4P 8p – 4P = 8p »

puis deux propositions distinctes « 8p-1p » ou « 8p+1p » .

3 pieds 11 pouces est voisin de 4 pieds : il n'en diffère que d'1 pouce .

Les élèves s'interrogent sur la conservation des écarts : a-t-on trop retiré ou pas assez en utilisant 4 pieds ?

Devant la variété des propositions des élèves, l'enseignant propose de déterminer un codage pertinent, sans ambiguïté et invite les élèves à donner leur avis :

« *la virgule sépare les pieds des pouces* »

« *on ne sait pas bien où écrire le 8, après la virgule ; pour la soustraction des pouces il faut 2 chiffres ; ça serait plutôt 08* »

« *avec les lettres P (pieds) et p (pouces), il faut aussi aligner les chiffres* »

Au MOYEN AGE la virgule n'était pas utilisée, donc le codage P p est conservé.

<u>*Qui peut expliquer 3P 11p ?*</u>

Un élève énonce :

« *c'est pour remplacer 2P 23p ; avec 23 pouces on peut faire 1 pied qui vaut 12 pouces ; il reste 23 - 12 = 11 pouces ; ça fait, en tout, 3P 11p* »

<u>*Comment peut-on écrire ce que tu viens de dire ?*</u>

2P 23p
\- 12p
3P 11p

2P 23p = 3P11p

<u>*Qui vient faire une des soustractions proposées ?*</u>

Une élève dit et écrit :

« 8 pouces moins 11 pouces ne se peut pas ; j'écris les retenues (4P <u>**1**</u> 8p
3P<u>**1**</u> 11p)

<u>1</u>8 pouces moins 11pouces font 7 pouces ; 3 pieds plus <u>**1**</u> *de retenue font 4 pieds ; il reste 0 pied. La réponse est 7 pouces* ».

Aucune réaction dans la classe : tous semblent approuver le calcul.

Un autre élève souhaite, cependant, utiliser une « addition à trou » pour vérifier :

« *je vais de 3P 11p à 4P 8p : j'ajoute d'abord 1 pouce pour faire 12 pouces ou 1 pied, j'en suis à 4 pieds, je rajoute les 8 pouces ; en tout j'ai ajouté 1+8=9 pouces. Je trouve 9 pouces et pas 7 pouces !* »

<u>*Voyez-vous des erreurs dans ces calculs qui donnent deux résultats distincts* ?</u>
Les élèves paraissent perplexes !

Le maître propose alors de tester les deux valeurs dans les additions « preuves » des soustractions. Les élèves ont donc à calculer :

```
3P 11p          3P 11p
+    7p         +    9p
----------      ---------
3P 18p          3P 20p
```

Les échanges pouces-pieds (12 pour 1) sont maîtrisés et appliqués sans difficulté :
3P18p = 4P 6p ; 3P20p = 4P 8p.
Le bon résultat s'impose en comparant avec la donnée d'origine 4P8p !
Une conclusion en est tirée : la soustraction posée est donc fausse. Le maître va guider la recherche d'erreurs.

<u>*Que signifient les retenues écrites dans l'opération ?*</u>

> *« elle vaut 10 pouces sur la première ligne, elle compte pour 1 pied sur la deuxième ligne* »
> « *mais 1 pied vaut 12 pouces !* » ;

les élèves en déduisent que les calculs avec retenues ne conviennent donc pas si l'on mesure avec les pieds-pouces (le rapport entre les unités n'étant pas de 10).

Un approfondissement des techniques mentales proposées par quelques élèves est intéressant à mener :
certains d'entre vous ont essayé de simplifier le calcul en augmentant la deuxième mesure de 1 pouce : <u>quelle est la nouvelle soustraction à faire pour trouver la bonne réponse ?</u>
La recherche conduit à 4P 9p - 4p ; chaque membre de la soustraction subit la même augmentation de 1 pouce (on aurait pu dire qu'il y a conservation des écarts).
Il est donc possible de transformer une différence en une autre équivalente (qui donne la même réponse mais est plus simple à trouver) : c'est ce qui permet un calcul mental.

Une autre technique de calcul peut être mise en œuvre avec les élèves consistant à transformer l'écriture de 4P 8p en 3P 20p afin de lever la difficulté de la soustraction
au niveau des pouces :

4P= 3P 12p
4P 8p= 3P 20p

il suffit de calculer :

```
 3P 20p
-3P11p
---------
```

Il y a alors eu préparation du calcul pour lever la difficulté soustractive, comme l'on procède avec les systèmes de mesures complexes (durées en heures, minutes, secondes).

Analyse

Des obstacles

Les codes retenus pour exprimer le nombre-mesure en pieds-pouces font coexister deux nombres entiers liés ; ici, il est impossible d'effectuer directement deux soustractions de nombres entiers en parallèle, isolant les pieds des pouces. Le traitement technique oblige la prise en compte explicite des relations numériques pieds-pouces. Nous avons constaté beaucoup plus d'aisance pour effectuer des conversions des pouces (en grande quantité) vers les pieds que l'inverse. L'échange 12 pour 1 est disponible « spontanément » ; 12 pouces pour un pied est utilisé comme une simplification numérique ; l'échange réciproque 1 pour 12 doit être sollicité, lors du passage de 4P à 3P12 p : il est ressenti comme coûteux. Néanmoins, c'est bien ce rapport de 12 et non de 10 qui met en difficulté.

Les algorithmes opératoires, rencontrés sur les nombres entiers, ne sont pas définis par une suite de procédés écrits et visuels comme l'écriture d'un 1 « retenue » ; les codages utilisés ont des significations qu'il faut connaître et maîtriser.

Des faux « théorèmes en actes »

Les réponses erronées des élèves donnent à penser qu'ils utilisent quelques définitions ou propriétés abusives que l'on pourrait résumer ainsi selon les formulations des élèves :

- *« la virgule est un caractère qui permet de séparer des unités » 3 F 25 ou 3,25 ; 6m 24 ou 6,24 ; 2kg 500 ou 2,500 donc 4P 8p ou 4,8 !*
- *« il y a conservation du résultat , si j'ajoute 1 à l'un des nombres , en début de calcul puis retire 1 au résultat , en fin de calcul : donc, dans le calcul mental 4P 8p - 3P 11p, si j'ajoute 1 pouce à 3P 11p, je retire 1 pouce en fin de soustraction et on trouve 8p –1p = 7p !* »

Champs de validité

L'usage des retenues dans les additions ou soustractions doit être associé à sa signification : 10 unités pour 1 supérieure ou 1 pour 10 unités inférieures

Son champ de validité est donc celui d'un système de numération en base dix. La virgule désigne un fractionnement décimal de l'unité : elle ne peut être utilisée que dans ce cas. C'est pourquoi il faudra distinguer 4P 8p de 4,8 comme on différencie 4h 8min de 4,8.

Les techniques, les codes mathématiques ne sont pertinents que dans un contexte donné ; ici notre système de numération positionnel et décimal se distingue des autres systèmes dits complexes comme celui de nos mesures avant la Révolution. Les facilités de calculs et d'écritures en base dix sont appréhendées et bien délimitées dans leurs usages cohérents.

Techniques de preuves

La confrontation de résultats distincts conduit à une recherche de vérifications. Celle-ci suppose le recours à de nouvelles procédures ou à la mise à jour d'erreurs. Ici, l'addition « prouve » la soustraction. Les erreurs d'échanges pieds-pouces sont liées au recours des retenues. Enfin, c'est la conservation des écarts par translation qui valide le calcul mental et l'équivalence de deux soustractions (4P 8p - 3P 11p et 4P 9p - 4P).

Cette situation montre qu'il n'y a pas unicité de procédures mais convergences. Une comparaison de ces modes de résolution permet néanmoins de faire émerger un procédé expert - facile, rapide, efficace - adapté au contexte numérique comme le calcul mental.

Les élèves ont pris alors conscience de la liaison de la division par dix et de notre écriture décimale ; les dimensions utilisées dans le problème ont pu être écrites sous formes de fractions (douzièmes) :
4 pieds 8 pouces ou 4 pieds 8 /12
3 pieds 11 pouces ou 3 pieds 11/12
La signification des chiffres, après la virgule (à droite) comme éléments d'une fraction décimale (/10 ; /100 ; /1000) est rappelée.

Conclusion

La situation a révélé des obstacles et l'utilisation de quelques « faux théorèmes ». Elle a aussi permis de définir des champs de validité de savoirs mathématiques, de réinvestir des connaissances techniques pour valider ou apporter des preuves.
Ce travail a permis un questionnement des élèves sur nos pratiques algorithmiques d'écriture de nombres et de calculs ; des fonctionnements différents ont été élucidés, les notions ont pris sens à partir d'une rencontre historique. Calculer dans un autre système que le système décimal, c'est possible, mais la gestion des calculs peut être complexe ; cependant cela s'est pratiqué jusqu'en 1789 !