

# ENSEIGNER L'ENUMERATION EN MOYENNE SECTION\*

Joël BRIAND  
Marie José LACAVE LUCIANI, Michèle HARVOUËT  
Dominique BEDERE, Véronique GOUA DE BAIX

## 1. Introduction : existence d'une connaissance nécessaire au comptage

Avant de décrire une suite de séquences réalisées à l'école maternelle, nous allons étudier le travail d'élèves de cours préparatoire lorsqu'ils doivent compter le nombre d'éléments d'une collection. L'analyse qui suit nous permettra de mettre en perspective les séquences de maternelle que nous proposons, avec ces activités numériques du cours préparatoire.

Les quatre travaux que nous étudions ici font partie d'une étude plus large qui a porté sur 50 élèves de deux cours préparatoires [Briand 1993]. Voici donc des travaux d'élèves de cours préparatoire (mois de mars). Ils disposent d'une feuille de papier sur laquelle sont représentés les arbres. Le professeur demande de trouver combien il y a d'arbres. Afin de répondre à cette question, l'élève peut dessiner librement sur la feuille qui lui est donnée.

(photo 1)  
E1

(photo2)  
E2

(photo 3)  
E3

(Photo 4)  
E4

---

\* Cet article est aussi paru dans le spécial Maternelle Tome 1 (voir page 112)

Pour parvenir au résultat, les élèves développent des stratégies variées :

E1 : construit des sous-ensembles d'arbres, tout en comptant (sans écrire) et en effectuant un marquage différent auprès de chaque arbre pour signifier le sous-ensemble. Il effectue une partition de l'ensemble des arbres. Ensuite, il construit l'écriture 8 8 8 8 8 2. L'erreur vient sans doute de la non prise en compte du sous-ensemble désigné par un rond doublé d'une croix.

E2 : relie quelques arbres pour constituer un sous-ensemble et effectue une partition de l'ensemble des arbres. Il construit en même temps une désignation de chaque sous-ensemble par une lettre. Il construit ensuite le couple : ( nombre, signe du sous-ensemble).

E3 : explore la collection en ligne. Les nombres sont inscrits, mais l'élève s'arrête lors du choix du 36<sup>ième</sup> élément parce que la structure en ligne devient difficile à contrôler. (Dans l'observation, on s'est assuré que l'élève savait énoncer la suite des nombres bien au-delà de 35).

E4 : organise un chemin "en escargot" qui facilitera le comptage. L'élève trouve 44 parce qu'il a compté le nombre de "sauts" et non pas le nombre d'arbres.

On constate que les élèves développent des stratégies différentes [Briand, 1993]. Par exemple, dans les quatre travaux précédents on constate que E1 et E2 structurent la collection en sous-collections, selon des procédures différentes, et que E3 et E4 structurent la collection en y établissant un ordre, là aussi selon des procédures différentes.

## **Conclusion**

Lorsque le professeur commande une action de comptage, l'élève doit mettre en œuvre des connaissances (de nature spatiale) qui permettent d'explorer la collection à dénombrer afin de n'oublier aucun élément et de ne pas repasser deux fois sur le même. Ces connaissances ne font pas habituellement l'objet d'un enseignement. Leur dysfonctionnement entraîne pourtant des échecs dans le comptage.

*Ces connaissances sont-elles mobilisées dans la vie courante ?*

Prenons un exemple bien connu : aller faire des achats au supermarché à l'aide d'une liste préparée à l'avance. La tâche sera simple si la liste préparée correspond parfaitement à l'organisation des rayons du supermarché et aux habitudes du client. La liste elle-même apporte des moyens de contrôle des achats déjà effectués et de ceux qui restent à faire. Mais si la liste n'a pas été conçue en fonction de l'organisation des rayons du supermarché, notre consommateur devra exercer un contrôle, plus difficile, du passage en revue des éléments de sa liste. Il pourra s'aider du marquage s'il dispose d'un stylo, il pourra construire des sous-listes par familles de produits, etc.

*Ces connaissances sont-elles mobilisées à d'autres moments de la scolarité ?*

Que ce soit dans le domaine de la construction des opérations arithmétiques, et plus tard, dans celui de l'analyse combinatoire, la question se pose toujours de contrôler les collections d'objets qu'il faudra dénombrer, mais nous ne pouvons pas, dans le cadre de cet article développer cet aspect.

**Revenons donc à l'activité de comptage elle-même.** Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

- 1- Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.*
- 2- Choisir un élément d'une collection.*
- 3- Enoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres).
- 4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*
- 5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.*
- 6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 fois tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.*
- 7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*
- 8- Enoncer le dernier mot nombre.

Les étapes en italique (1,2,4,5,6,7) constituent une tâche spécifique que nous appelons **inventaire**, au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule. Cette tâche caractérise une connaissance non enseignée que nous appelons énumération, faute d'un autre nom.<sup>1</sup>

**En se référant à la théorie des situations, la question se pose alors de mettre en place une situation fondamentale de l'énumération, c'est à dire une situation dans laquelle l'énumération d'une collection d'objets montrés soit (indépendamment de l'activité numérique) la solution au problème posé.**

Au cours de recherches antérieures, plusieurs dispositifs de mise en œuvre de la situation fondamentale de l'énumération (dans le cadre de collection finies d'objets visibles) ont été mis au point. En particulier une modélisation à l'aide de l'outil informatique a été réalisée [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L., Vinant S.1985 puis 1995]. Les expérimentations ont déjà été rédigées [Briand J. 1985] et, pour le cours préparatoire, [Vinant S.. 1988].

---

<sup>1</sup> PETIT LAROUSSE, Enumérer : Enoncer successivement les parties d'un tout, passer en revue. LAROUSSE, Dictionnaire étymologique 1992 p.267 : du latin enumeratio, action de compter complètement. Dans l'étymologie même du nom, le comptage paraît nécessaire, alors que la définition du petit Larousse ne fait pas référence au comptage.

Nous proposons ici :

- un exemple d'organisation d'une situation d'apprentissage de l'énumération dans le cadre de la classe de moyenne section de l'école maternelle,
- l'étude d'effets produits par de légères modifications du dispositif, souvent à l'insu des enseignants.

Les questionnements restés en suspens, en particulier dans des domaines connexes de savoirs tels que l'argumentation.

## **2. La situation fondamentale de l'énumération et son analyse**

### **2.1. - Présentation du dispositif et analyse a priori**

Le dispositif s'adresse donc à des élèves de 4-5 ans.

Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boîtes d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets sont les allumettes desquelles on a ôté le phosphore. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boîte plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé. Lorsque l'élève estime avoir terminé, il vérifie ou fait vérifier par un autre élève (ou par l'enseignant au début). Pour cela, les élèves assistent à l'ouverture des boîtes. S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi.

Nous avons souhaité intégrer ce dispositif dans une pratique de classe habituelle : en collectif, la maîtresse présente l'activité en l'appelant « jeu des boîtes d'allumettes ». Elle ne fait pas travailler les élèves. Puis, après avoir lancé d'autres ateliers autonomes, la maîtresse appelle trois enfants : un va jouer et deux observent (ils joueront après). Nous verrons plus loin dans le texte comment ce dispositif peut être modifié.

Le rythme de travail choisi est de faire passer environ six élèves par séance, ce qui demande donc quatre à cinq séances pour que les élèves aient effectué le même type de travail. Cette expérimentation s'est déroulée de début novembre 96 à la mi-février 97.

#### **Caractéristiques de cette situation a-didactique**

Nous analysons quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose. Nous prévoyons les champs de comportements possibles.

#### **Variables que nous avons repérées :**

V1- Le type d'espace dans lequel l'élève va travailler. Ici, nous avons choisi de fixer cette variable. Il s'agit du micro-espace du plan de travail de la table. Chaque enfant travaille sur une table 120x80.

V2- Le nombre de boîtes.

V3- Le fait que les objets (boîtes d'allumettes) soient effectivement déplaçables ou non.

V4- La possibilité de déplacer les boîtes dans un espace restreint ou plus large. (liée à V1 et V3)

Remarque : le marquage des boîtes n'est ni suggéré, ni institué.

#### **Analyse de la tâche, familles de stratégies attendues :**

L'élève a devant lui des boîtes. Sa tâche consiste à constituer une collection nouvelle d'éléments « boîte-allumette » en distinguant en permanence cette nouvelle collection de la collection des boîtes « encore » vides.

Les stratégies possibles (gagnantes ou non) peuvent être les suivantes :

- L'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte « à distance » des boîtes non encore remplies.
- L'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte parmi les autres boîtes non encore remplies.
- L'élève associe une allumette à chaque boîte, puis met les allumettes dans chaque boîte. (Cette stratégie a peu de chances d'apparaître.)

#### Variantes prévues de la situation

Première variante : 8 boîtes déplaçables sur une table 120x80.

Deuxième variante : 20 boîtes déplaçables sur une table 120x80

Troisième variante : 20 boîtes fixées sur un support (vinyle blanc). Mise à disposition d'un stylo feutre

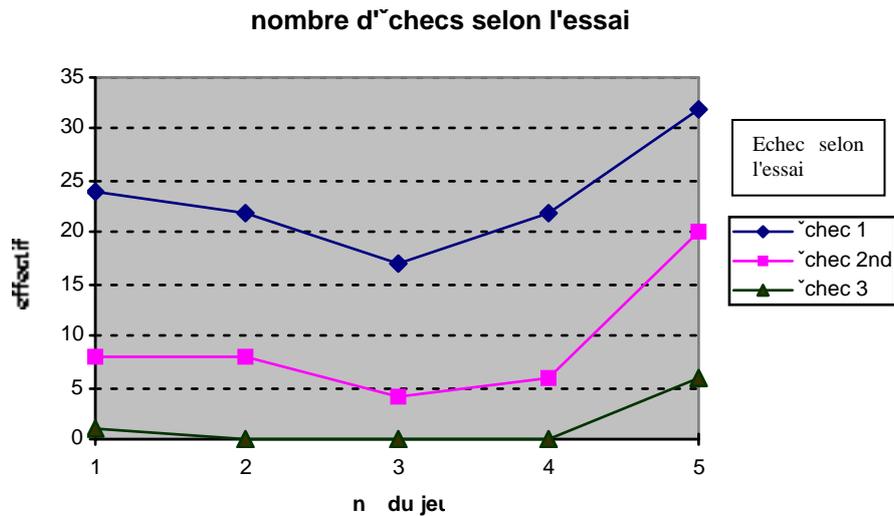
#### Auxquelles nous avons ajouté deux variantes :

- Lors du deuxième jeu, nous avons constaté que les élèves secouaient les boîtes pour contrôler la présence ou l'absence d'allumettes. Nous avons donc décidé de placer une allumette dans les boîtes, la consigne devenant « il faut qu'il y ait deux allumettes par boîte ». Nous allons étudier dans la suite de cet article en quoi cette décision n'était pas utile.

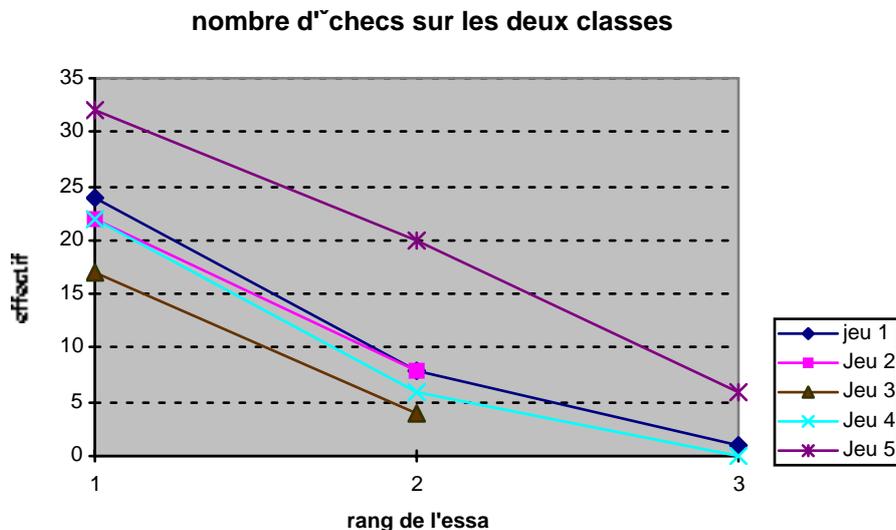
- Une collection de 20 boîtes rend la situation inutilement complexe. Nous l'avons observé dès les premiers élèves. Aussi, nous avons rapidement réduit à 15 le nombre de boîtes

	<b>Configuration matérielle</b>	<b>Raisons des choix</b>	<b>Analyses effectuées après l'expérimentation</b>
<b>JEU 1</b>	8 boîtes déplaçables		- Stratégies pour remplir des boîtes, élaborer une collection. - Etude d'énumérations induites involontairement.
<b>JEU 2</b>	20 boîtes déplaçables	Changement significatif du nombre de boîtes.	- Influence du passage de 8 à 20 sur les résultats et sur les stratégies mises en œuvre.
<b>Première phase collective</b>		Faire formuler les stratégies. Faire anticiper un résultat	- Passage des propositions aux prédicats puis aux calculs sur prédicats. - Traitement des erreurs par l'enseignant.
<b>JEU 3 (2)</b>	20 boîtes déplaçables		
<b>JEU 4</b>	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Le secouage (deux allumettes) 15 car 20 rend trop long la validation	- Etude détaillée du « secouage ».
<b>Deuxième phase collective</b>	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Faire formuler les stratégies Faire anticiper un résultat	- Un savoir et son enseignement possible ou impossible. - Limites de ce type de séances. - Absence d'une situation a-didactique de formulation
<b>JEU 5</b>	15 boîtes non déplaçables. A nouveau une seule allumette.	Enumérer une collection d'objets non déplaçables. Faire des marques.	- Analyse de la complexité de la tâche.

## 2.2. Les résultats observés



Ce schéma montre que, pour chaque situation, les progrès sont évidents. L'enchaînement des jeux 1, 2 et 3 montre qu'à chaque jeu, le nombre d'échecs au premier essai redevient plus important que le nombre d'échecs au dernier essai du jeu précédent, mais en même temps, le progrès réalisé en trois essais par jeu reste très significatif. Le passage à deux allumettes et surtout le blocage des boîtes d'allumettes (jeu 5) vont augmenter le nombre d'échecs à rang d'essai identique.



Ce deuxième schéma montre que, quelque soit le jeu, il y a progrès. Le progrès ne se mesure donc pas uniquement d'une séquence à l'autre, d'un jeu à l'autre, ce qui serait nier l'apport des modifications de variables significatives, mais à l'intérieur d'une même configuration de jeu.

**Remarque :** Peu d'élèves échouent après trois tentatives. Pour ceux-ci, nous prenons pour engagement de ne pas les confronter à l'échec répété. Nous proposons qu'ils demandent de rejouer lorsqu'ils en manifesteront le souhait. C'est un rapport non tendu à la situation qui doit être maintenu afin que l'élève ait envie de réussir, d'y voir un enjeu le concernant.

### 3. Analyse détaillée du jeu 1 : mise en évidence d'effets didactiques

#### 3.1. Les stratégies repérées

Les élèves parviennent à réussir au jeu 1 (24 échecs au premier essai, 7 au deuxième (donc 24-7 réussites) et 1 au dernier essai (donc 7-1 réussites))<sup>2</sup>.

Les stratégies mises en œuvre pour réussir sont :

1- Mise à l'écart des boîtes remplies.

- sur la table
- sur la table et alignées, ou en bordure de table.
- sur la table et alignées et empilées.

2- Repérage visuel d'un cheminement possible, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première.

- l'élève replace alors la boîte remplie à sa place initiale.
- ou bien l'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.

3- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.

#### Remarques :

- Nous mettons le « secouage » à part puisqu'il se greffe sur les stratégies repérées.

- Le rangement préalable des boîtes vides (en ligne) afin de mieux contrôler l'exploration future, n'est jamais apparu.

- La consigne empêche la réalisation de la stratégie qui consisterait à placer les allumettes sur les boîtes (une sur chaque boîte) ou à les enfoncer à moitié.

#### 3.2. Deux effets d'ergonomie avec pour conséquences : une collection non construite et une énumération induite.

Premier effet :

Les résultats décrits sont issus de deux classes que nous nommons GM1 et GM2. Les résultats obtenus en GM1 et GM2 au premier essai sont :

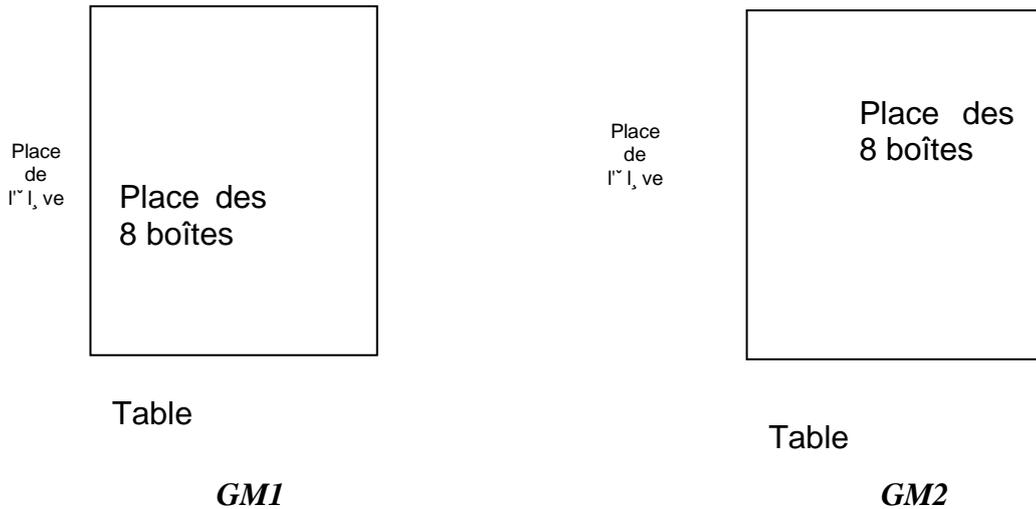
	E	R
GM1	13	11
GM2	11	16

Ils paraissent semblables. Or, nous avons noté, en début d'observation (premiers groupes de 6 élèves) en GM1 puis en GM2, une différence sensible de résultats : 5 échecs sur 6 en GM2, 6 réussites sur 6 en GM1.

Nous nous sommes rendu compte que la situation n'était pas présentée de la même façon aux deux classes, que chaque maîtresse avait travaillé la séquence à sa façon, et que deux interprétations de la séquence s'étaient faites :

- Dans la classe GM2, la maîtresse pose, en vrac, les boîtes d'allumettes loin de l'élève. Pour cela, elle a mis les boîtes dans une grande boîte (à chaussures) qu'elle renverse sur la table. En GM1, les boîtes sont disposées assez près de celui-ci.

<sup>2</sup> Les élèves qui ont réussi ne rejouent pas.



Pour mettre une allumette dans chaque boîte, l'élève doit :

- 1- Se saisir d'une boîte,
- 2- prendre une allumette (*ces deux actions peuvent être permutées*),
- 3- mettre l'allumette dans la boîte,
- 4- poser la boîte remplie en l'écartant des boîtes non encore remplies,
- 5- Recommencer cette séquence.

Dès la deuxième boîte, la réussite impose la constitution de la collection des boîtes remplies.

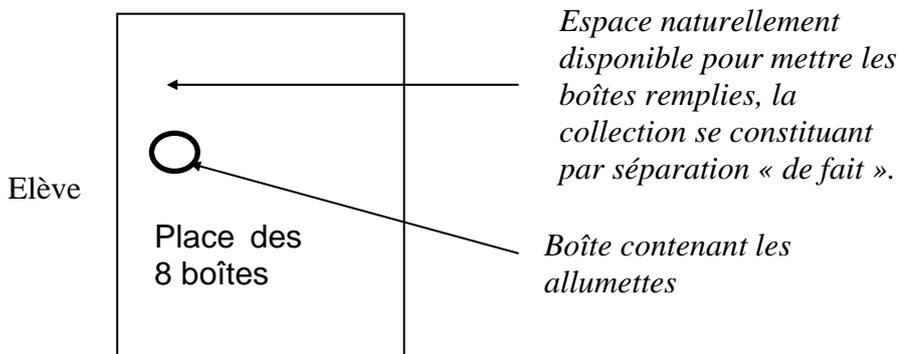
Dans le cas de GM2, l'action 1 impose de tendre la main, se lever un peu de sa chaise. L'action 4 sera réalisée au moindre coût en reposant la boîte devant soi. Il n'y a aucune raison pour que l'élève repose la boîte parmi les boîtes non encore remplies. La réussite à l'activité peut donc être constatée alors que l'élève n'a pas décidé de séparer les deux collections. Dans le cas de GM1, l'action 1 n'impose aucun déplacement, l'action 4 doit alors s'accompagner d'un geste volontaire (coûteux) de mise à l'écart pour constituer les deux collections.

Dans le premier cas, pour des raisons ergonomiques élémentaires, l'élève n'a pas (ou peu) en charge l'énumération. La deuxième collection (boîtes-allumettes) peut se construire totalement à son insu.

On peut donc faire l'hypothèse que la différence de résultats est largement explicable par cette différence d'organisation.

Deuxième effet :

Une autre contrainte ergonomique a joué comme une variable de la situation : la place de la boîte qui contient les allumettes. Selon la place qu'elle occupait sur la table, la boîte constituait, ou non, un moyen (involontaire) mis à disposition des élèves pour qu'ils n'aient pas à confondre les boîtes remplies et les boîtes à remplir, en jouant le rôle de séparateur naturel :



## Table

Remarque : nous n'avons pris conscience de ces phénomènes qu'après la première observation de six élèves dans l'une et l'autre classe. Ensuite, les dispositifs furent identiques : boîtes placées devant l'élève, boîte contenant les allumettes en bord de table.

### 3.3. Etude détaillée de l'effet du secouage

A un moment ou à un autre, les enfants secouent pour savoir s'il y a une allumette dans une boîte.

Exemple 1 : Romain place les boîtes pleines avec les vides. Il perd. Au deuxième essai, il écoute le bruit en secouant. Il reprend toute la collection et trie les vides et les pleines.

Exemple 2 : Damien en GM1 prend une boîte, déjà remplie. Il découvre le bruit de l'allumette dans la boîte. Il secoue une autre, et recommence. Il fait un tri fondé sur le bruit, secoue mais n'organise pas spatialement (ne conçoit pas) la collection des boîtes remplies. Il met alors deux allumettes dans une boîte.

Constats :

- Le bruit est un événement (qui peut avoir un caractère ludique évident).
- Il peut devenir une propriété qui caractérise un nouvel objet : boîte avec allumette.
- Il peut être un moteur de tri de ces objets afin de constituer une nouvelle collection.
- Il peut, en inter-action avec une organisation spatiale, être une aide au contrôle de l'énumération.

L'élève qui ne se fonde que sur le bruit pour trier, sans mettre à l'écart les boîtes remplies (donc sans contrôler la nouvelle collection des boîtes remplies), est devant une tâche très coûteuse et peu fiable. Par exemple, nous avons constaté que plusieurs élèves utilisaient la technique du secouage, mais pas systématiquement. Ils mettaient alors deux (ou plus) allumettes dans une boîte. Enfin, pour décider que la tâche est terminée, il faut être sûr que toutes les boîtes ont eu une allumette, il faut donc les secouer toutes, mais la question se pose à nouveau d'explorer la collection de façon exhaustive !

En conclusion, contrairement à une première analyse qui pourrait en être faite, le « secouage » d'une boîte n'est pas suffisant pour réussir. Il ne constitue pas une stratégie permettant totalement l'évitement de l'acquisition du savoir visé (constitution d'une collection par pratique énumérative). Toutefois, par le contrôle même incomplet qu'il permet, il augmente la probabilité de réussir sans avoir de procédure énumérative bien aboutie.

#### 4. Analyse du passage du jeu 1 au jeu 2 (passage de 8 à 20 boîtes)

Nous faisons l'hypothèse que le passage de 8 à 20 boîtes permettra de mieux expliciter les stratégies de contrôle et de constitution de la collection des boîtes pleines.<sup>3</sup> Les résultats examinés plus haut ont montré qu'il n'y avait pas de différence significative sur les résultats si l'on prenait en compte le travail sur deux essais.

Les résultats en GM2 sur les trois essais du premier jeu et les deux du second sont les suivants :

STRATEGIE	PRECISIONS	Jeu 1	Jeu 2
- Pas de stratégie observée		2	2
- Mise à l'écart des boîtes remplies.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sur la table</li> <li>- Sur la table et alignées, ou en bordure de table.</li> <li>- Sur la table et alignées et/ou empilées</li> </ul>	10 0 8	8 1 11
- Repérage d'un chemin, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première	<ul style="list-style-type: none"> <li>- L'élève replace la boîte remplie à sa place initiale.</li> <li>- L'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.</li> </ul>	2 5	5
- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.			1

6 élèves secouent les boîtes en Jeu1. 12 élèves secouent les boîtes en Jeu2 (à des moments différents de l'activité).

Une cause d'erreur repérée est une rupture dans la suite : (B : boîte ; A : allumette).

B-A, B-A, B-A, B-A,...

ou la suite A-B, A-B, A-B, A-B, ...

Par exemple, la suite :

B-A, B-A, A-B-A, B-A.

<sup>3</sup> Mais nous n'avons pas préparé les élèves à ce projet : les questions « Est-ce que tu saurais faire avec plus de boîtes », de même que « qui est-ce qui pense qu'il peut gagner ? », n'ont pas été proposées aux élèves.

conduit à la mise de deux allumettes dans une boîte ou à l'oubli d'une allumette, selon le moment où se fait la rupture.

Exemple : Tristan organise la deuxième collection par rangées de 4. Il effectue un empilage sur un plancher de 4x2 qui délimite l'espace de la deuxième collection. Mais il regarde ce que fait la maîtresse et, à la troisième boîte, il place une allumette puis une autre.

C'est le couple (allumette, boîte) qui a été rompu, le couple (boîte, allumette) se greffant, d'où deux allumettes dans la boîte.

Nous remarquons que la phase de validation est un moment au cours duquel les élèves :

- pensent qu'il est nécessaire d'ouvrir les boîtes qui restent, même après avoir ouvert une boîte qui ne contenait pas d'allumette ou qui en contenait plus d'une ;
- peuvent signifier les conditions de la réussite ou de l'échec.

Conclusions :

- Le passage de 8 à 20 boîtes ne modifie pas significativement les résultats des élèves, en terme de réussite échec ;
- Les nouvelles contraintes ont permis l'émergence de stratégies d'organisation plus marquées (empilages, mises en ligne, bordure de table) ;
- La phase de validation est très fastidieuse.

## 5. Analyse des phases collectives

### 5.1. Questions de logique

La première phase collective (à la suite du jeu 1) a permis :

- de formuler une stratégie (« il faut mettre de côté »). Cette stratégie est formulée huit fois au cours de l'entretien.
- de prendre conscience de toute la logique en acte qui se développe derrière cette expérience et qui n'a pas été prise en compte au départ ou qui a été sous-estimée. « Perdu », « perdu un peu plus », « gagné », « gagné pour cette boîte ». Les élèves passent de l'énonciation de la valeur de vérité d'une proposition ("il y a une allumette dans cette boîte") à l'élaboration conjointe de prédicats : « s'il existe une boîte sans allumette ... » « il y a une allumette dans cette boîte... », ainsi que d'un calcul sur ceux-ci : « donc il a perdu », « pour l'instant c'est juste ».

Il y a là un travail à poursuivre. Nous pensons que cette construction se fait dialectiquement avec la construction du concept de collection. L'hypothèse étant que la formulation de tels prédicats et des calculs sur ces prédicats participe à la constitution de la collection, que cela « **cimente** » les objets pour en faire une collection.

Dans les moments collectifs, nous avons constaté que les termes employés n'avaient pas de statut très clair. Par exemple, les termes « vérifier », « réussir », « échouer », qualifient tantôt une réussite locale (une allumette dans cette boîte) tantôt la réussite ou l'échec à l'activité (« tu as échoué »). L'enseignant doit alors improviser

un discours qui tourne autour des prédicats sans qu'un contrat précis sur les exigences ait été négocié.

Le tableau suivant fait état des comportements attendus, des savoirs visés du point de vue du travail sur les propositions et les prédicats, et du point de vue des interventions du professeur.

moment étudié	analyse logique	analyse des comportements	savoir qui peut être visé	intervention possible
secoue les boîtes (secouer avant l'action, secouer après l'action)	l'information donnée par le bruit permet de savoir s'il y a une (ou plusieurs) allumettes dans la boîte.	Permet de s'assurer de la présence d'une allumette.	Secouer avant permet de contrôler s'il y a présence d'une allumette. Secouer après ne permet pas de contrôler si la boîte était vide.	
Découvrir une boîte vide.	Signifie l'échec au jeu	Peut signifier échec pour cette boîte. (proposition) Peut signifier échec au jeu. (prédicat)	Il suffit qu'une boîte ne contienne pas d'allumette. Il n'est pas nécessaire de vérifier pour celles qui restent.	« Il suffit » peut être repéré dans l'action (s'interrompt-on lors de la validation au cas où une boîte vidée apparaît ?). Peut être repéré dans le langage.

## 5.2. Questions de contrat didactique

Au cours des observations, nous avons constaté deux difficultés rémanentes pour les enseignantes. Nous décrivons ces difficultés, sans pour cela approfondir l'étude :

- Tout d'abord, le déroulement de ces séquences pose la question de l'enjeu. Quelle forme d'enjeu faut-il maintenir pour que les élèves prennent ce problème à leur compte ? La situation permet à l'enfant de savoir s'il a échoué ou réussi. A la suite de l'ouverture d'une boîte, quelle attitude le maître doit-il avoir ? Il faut que celui-ci montre que réussir et échouer ne sont pas deux issues auxquelles il convient d'attribuer la même valeur. Or les enseignants en maternelle rechignent à tenir ce contrat, pensant décourager l'élève.

- Pour conduire cette phase, nous avons constaté que c'est en l'interrogeant sur ce qu'il compte faire la prochaine fois, et non sur ce qu'il vient de faire, que l'élève prend petit à petit le projet à son compte. Cela suppose chez l'enseignant qu'il envisage l'apprentissage se faisant non seulement dans les séquences elles-mêmes, mais aussi d'une séquence à l'autre, y compris chez de jeunes enfants. L'anticipation d'une séance à l'autre nous semble être un élément du contrat didactique.

- La négociation du contrat n'est pas simple : l'enseignant est gêné lorsqu'il s'agit de trancher dans certaines circonstances. Par exemple : l'enseignant n'ose pas dire à T. qu'il a une bonne méthode mais qu'il s'est trompé parce qu'il a été distrait à tel moment.

- L'enseignant est souvent gêné lorsqu'une réponse juste a été donnée : le silence est interprété comme une annonce d'erreur.

- Le traitement des erreurs dans la relation didactique est aussi un point délicat ; certaines erreurs que les élèves font peuvent être traitées en classe, d'autres non. Telle erreur d'un élève peut être difficile à traiter en public. Les niveaux d'explication n'étant

pas les mêmes d'un niveau de savoir à l'autre, une explication aisée à donner à un élève s'avérera intenable à entendre pour un autre élève. Le risque, pour l'enseignant, est de se contenter d'une interprétation scolaire, de se ramener au projet scolaire, alors que bien souvent il s'agit de conceptions plus fines en jeu. Il y a donc des erreurs que l'on a intérêt à corriger en public, d'autres qui se règlent avec un seul élève, et d'autres qui ne peuvent même pas être débattues (savoirs absents).

## **6. Analyse du jeu 4 : vers une situation a-didactique de formulation**

Pour des raisons déjà évoquées, nous avons ramené le nombre de boîtes à 15. Les résultats ne sont pas significativement différents des précédentes séances. Le secouage est devenu un rite, certains élèves sourient, d'autres essaient de reconnaître le bruit de deux allumettes par rapport au bruit d'une allumette.

La phase de débat ne provoque pas de formulation interne à la situation : dans notre dispositif, un enfant regardait un autre effectuer le travail. *Etait-ce utile?* Il nous semble que l'on se fait beaucoup d'illusions à ce sujet. Plusieurs rôles sont possibles pour l'élève observateur. Prenons deux rôles possibles courants : un élève regarde un autre travailler en vue de faire la même tâche, ou bien en vue de prévoir si celui que l'on observe a réussi ou non. Dans le premier cas, certains enfants prennent cette place comme une place dans une file d'attente. Ces enfants n'ont pas d'engagement, pas de responsabilité dans l'action ou dans la formulation. Dans le deuxième cas, bien souvent l'élève observateur ne peut pas expliquer les raisons d'un éventuel échec. Il répète alors une phrase toute faite : « il a oublié une boîte » et donne alors une (sa) méthode pour « mieux réussir ». Il est rare qu'un élève puisse analyser ce qui a échoué dans la méthode de l'autre.

Un autre type de rôle, par une organisation du travail à deux, permettrait de rencontrer un nouveau problème dans lequel la connaissance interviendrait obligatoirement sous forme d'un langage. Il faudrait pour cela que l'équipe soit formée pour résoudre une tâche commune. Donnons un exemple de fonctionnement possible. Consigne « *Vous allez travailler à deux. A un moment donné, je demanderai à celui qui a commencé de laisser sa place à l'autre pour qu'il termine. Vous pourrez vous parler. Qui pense pouvoir réussir ?* ». Dans une perspective de travail sur le marquage (jeu 5 : voir ci-après) , l'interruption du jeu pourrait faire intervenir un marquage (un type de marquage, un repérage). Pour cela, il suffirait de préciser dans la consigne si les consignes de passage de relais peuvent s'effectuer par écrit ou oralement.

## **7. Analyse du jeu 5 (boîtes bloquées sur un plateau)**

La construction du dispositif nécessite que l'on prenne en compte plusieurs problèmes :

- les boîtes sont collées sur un tableau blanc ;
- On peut ouvrir les boîtes sans être gêné (en vue de la validation) ;
- La disposition de la collection est choisie sans structure spatiale évidente.

Nous avons choisi quatre stratégies qui, à leur façon, contribuent à mettre en évidence la complexité d'une énumération. Nous définissons comme rupture le moment de l'activité de l'élève pendant lequel il devra abandonner la collection du regard. Pour

réussir l'inventaire de la collection, l'élève doit donc mettre en mémoire la collection déjà constituée (boîtes-allumettes).

Elève	action bouclée	ruptures visuelles	charge mémoire	contrôle
S.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo, Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser la dernière boîte entourée non encore remplie.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N contrôles à effectuer
M.	Ai : entourer n boîtes (ne pose pas le stylo) , (rupture) prendre n allumettes et mettre n allumettes. Ai+1 : entourer n boîtes, mettre n allumettes.	(n=2) 2 ruptures par boucle. N/2 boucles.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser les n (n=2) dernières boîtes entourées non encore remplies.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N/2 contrôles à effectuer.
E.	A1 : mettre une marque au pied de chaque boîte. Ai : mettre une allumette, effacer la marque correspondante. (rupture) Ai+1 : mettre une allumette, effacer la marque correspondante.	Une rupture par boucle	Il n'y a rien à mémoriser.	Aucun contrôle à effectuer.
C.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo, Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle. Autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser (spatialement) la dernière boîte entourée non encore remplie.	Clément laisse la main sur la boîte. Ou bien il garde les yeux dessus.

Selon les démarches adoptées, le nombre de ruptures (qui contribue à la définition de la complexité de la tâche) varie de un à trois par boucle.

**Conséquences sur la complexité, intérêt pour le comptage.** Reprenons la situation fondamentale de l'énumération, cette fois sous la forme proposée par un logiciel [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L., 1995]. Le logiciel propose à l'élève de parcourir visuellement une collection de quelques objets. Le pointage (mémorisé par la machine) de chacun des objets inventoriés une fois et une seule est la solution du problème posé. Il n'est pas nécessaire d'effectuer une autre action que le seul passage d'un objet à l'autre. A la différence du logiciel, la situation des boîtes d'allumettes nécessite que l'enfant prenne, à chaque fois, en un lieu précis, les allumettes. Mais les boîtes sont déplaçables. Les élèves mettent ceci à profit pour dépasser la difficulté de la prise des allumettes. Il reste à ne pas commettre d'erreur dans la suite séquentielle allumette-boîte-allumette-boîte, etc. Par contre, la situation des boîtes fixées va créer les ruptures étudiées précédemment. Le marquage ajoute, provisoirement, une difficulté.

Dans le cas où les boîtes sont déplaçables, le contrôle s'exerce par la force des choses puisque la boîte concernée est le plus souvent tenue en main.

On pourrait donc s'interroger sur l'intérêt à rendre la situation aussi difficile, puisque le but est de construire des situations d'énumération qui favorisent ultérieurement le comptage de petites collections. En effet, cette situation met en œuvre des procédures d'inventaires plus complexes que celles qui seront nécessaires au comptage. Le parcours exhaustif d'une collection montrée n'exige pas que l'on quitte des yeux la collection montrée en passant de l'un à l'autre de ses éléments. Dans le travail que nous venons d'étudier, seule la stratégie de C. permet, par un marquage « au préalable », de diminuer la complexité et de la rendre égale à celle qui est rencontrée lors de l'activité de comptage. Nous pensons toutefois que ce travail d'organisation de la tâche constitue en soi une activité cognitive intéressante.

## 8. Conclusion

Notre souci était de faire fonctionner des situations a-didactiques adaptées à l'enseignement de l'énumération de collections visibles dans le contexte de l'acquisition des premiers nombres, afin de transformer l'énumération en objet de savoir. C'est pour cela que nous avons organisé l'ingénierie que nous venons de décrire. Nous pensons avoir réussi dans ce domaine du pré-numérique et contribué à identifier les savoirs qui peuvent être pris en charge par l'école maternelle, sans pour cela « faire du cours préparatoire avant l'heure ».

Les observations conduites ont montré un champ de recherches à effectuer au niveau de l'école maternelle. Cela concerne l'organisation de situations de formulation provoquant des activités spontanées de logique. Il y a là (au moins) deux aspects : la situation elle-même et les modalités de vérification du résultat qui sont accompagnées d'un discours, difficile à mener parce qu'il fait appel à des questions de logique en acte. Dans ce cas, nous avons repéré trois niveaux de discours<sup>4</sup> : celui de l'action (rapport technique), celui du vocabulaire d'action pour parler de l'action (rapport technologique), celui de l'énonciation de règles de généralités, des déclarations (rapport théorique). Or dans certaines phases, l'enseignant doit agir sur ces différents registres, de façon empirique. Nous sommes persuadés qu'un travail dans ce domaine pourrait contribuer à faire progresser les élèves dans l'apprentissage de l'argumentation fondée sur des situations qu'ils maîtrisent.

---

<sup>4</sup> En nous référant à l'organisation praxéologique décrite par Chevallard Y. [Chevallard Y., 1997]

## Appendice

A la suite de l'étude, décrite plus haut, nous avons décidé d'organiser le travail en moyenne et grande section selon un nouveau plan suivant tenant compte des résultats. Voici le nouveau plan de travail actuel :

	Configuration	Raison des choix.
<b>JEU 1</b>	8 boîtes déplaçables	
<b>JEU 2</b>	8 boîtes déplaçables. 2 élèves. Un qui observe. Tâche interrompue.	Modifier le rôle de l'observateur.
<b>Première phase collective</b>	Simuler des phases de validation dans le but de faire formuler plus précisément.	Faire formuler les stratégies, Faire anticiper un résultat
<b>JEU 3</b>	15 boîtes déplaçables. 2 élèves. Le deuxième n'observe pas. Consigne orale du premier au deuxième au moment de la passation de rôle.	Faire formuler sur l'énumération et la constitution des collections.
<b>JEU 4</b>	15 boîtes déplaçables constituées de boîtes de différentes formes et de couleurs différentes.	Faire travailler sur les classifications croisées.
<b>JEU 5</b>	15 boîtes non déplaçables. Le deuxième n'observe pas. Traces écrites sur tableau pour le récepteur au moment de la passation de rôle.	Faire formuler, instituer des résultats sur l'énumération et les procédures de marquage.

## Bibliographie

BRIAND J. (1985) « *Logiciels d'enseignement et situations didactiques* ». Mémoire de DEA Bordeaux I.

BRIAND J. (1993) "*L'énumération dans le mesurage des collections* ». Thèse Bordeaux I

BRIAND J., BROUSSEAU G., OYALLON J.L., VINANT S. (1995) : logiciel « *A nous les nombres* » Profil ed. PARIS.

BRIAND J. (1999) "Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques" *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 19-1. la pensée sauvage Grenoble.

BRISSIAUD R. (1989) "*Comment les enfants apprennent à calculer ?*" RETZ, Paris.

BROUSSEAU G (1984) "*L'enseignement de l'énumération*" Congrès C.I.A.E.M. Adélaïde.

BROUSSEAU G. (1986) "*Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*". Thèse d'état Bordeaux I.

BRUN J. (1994) « Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques ».in "*Vingt ans de didactique des mathématiques en France*" (Artigue, Gras, Laborde, Tavignot). La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1997) "Familière et problématique la figure du professeur". *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 17- 3. la pensée sauvage Grenoble.

CONNE F. (1993) "Savoir et connaissance" *Recherches en Didactique des Mathématiques* : RDM vol 12/2.3 la pensée sauvage Grenoble.

DIGNEAU J.M. (1985) "*Le saut informationnel*". Mémoire de DEA Université Bordeaux I.

PIAGET J. (1955) "*De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*" PARIS.

VINANT S. (1988) "*Les nombres au CP avec ou sans logiciel, tome 1* ", IREM de Bordeaux.