PREUVE OU DEMONSTRATION, UN THEME POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES : PREMIERE PARTIE

Michèle GANDIT
IUFM de Grenoble

Prouver ou démontrer est l'activité essentielle du mathématicien. C'est le moyen qu'il a de se convaincre, et de convaincre ses pairs, de la vérité d'un résultat, dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques.

Cette fonction de la preuve se révèle-t-elle réellement dans nos classes ?

Démontrer relève d'un apprentissage, qui, d'après les programmes de l'enseignement secondaire, est initié vers la classe de quatrième et se poursuit tout au long de la scolarité. Cet apprentissage, qui ne peut, à notre avis, se faire indépendamment de la résolution d'un problème, se situe au confluent de trois sources d'obstacles : il s'agit d'entrer dans une rationalité différente[1] de celle du quotidien (la rationalité mathématique), il faut que s'enclenche un processus destiné à produire des résultats et à en établir la vérité (la dévolution du problème et la recherche de solutions), cette démarche doit aboutir à une communication, la plupart du temps un texte (l'écriture). Or, qu'ils soient débutants ou expérimentés, les enseignants de mathématiques, rencontrent des difficultés[2] sur la démonstration et son apprentissage au collège.

Dans cette première partie, nous relatons d'abord quelques faits qui nous permettent de faire des hypothèses sur les conceptions[3] des professeurs du secondaire à propos de la démonstration et de son enseignement. Sur ce point se pose en effet la

question de la formation des enseignants, à régler de manière urgente si l'on souhaite amener nos élèves à faire véritablement des mathématiques.

---

[1] Cette rationalité mathématique est cependant nécessaire pour agir dans le quotidien, elle est utile pour comprendre le monde et agir ; on pourrait la considérer comme une modélisation de celle qui régit nos comportements dans la vie de tous les jours.

[2] Cette constation, nous avons pu la faire, animant depuis 1994 un, voire deux, stages de formation continue sur ce sujet et assurant depuis quelques années un module de formation initiale sur ce même thème à l'IUFM de Grenoble.

[3] Conception sera considéré au sens de A. Bessot et D. Grenier soit: « ...un modèle construit par le chercheur pour rendre compte des comportements cognitifs... par rapport à un concept donné. Ce modèle se caractérise par des règles d'action et des pratiques, un système de représentation symbolique et un ensemble de situations-problèmes que les règles d'action et les pratiques permettent de résoudre : cette classe de situations constitue le domaine de validité de la conception. »

Qu'entendons-nous par preuve ou démonstration ? Nous l'explicitons ensuite, la preuve étant considérée à la fois comme processus et comme produit.

I. La preuve requiert-elle une formation spécifique des enseignants ?

1) Quelques photographies sur le thème de la preuve, au collège et au lycée

Première photo : la copie de Farida ou le miracle du « On sait que... or... donc... »

Lors d'un stage de formation continue en 2002, nous entendons un stagiaire confier à son voisin : « Moi, avec « on sait que... or... donc... », j'ai réglé le problème de la démonstration en quatrième, et ça marche bien ! » De quoi s'agit-il ? Pour le comprendre, d'abord un détour du côté des manuels[4] scolaires de la classe de quatrième, édités en 2002.

Certains manuels prônent en effet l'utilisation de « on sait que... or... donc... » comme moyen d'apprentissage de la démonstration, « or » pouvant être, comme nous allons le voir, omis ou remplacé par « on utilise ».

Le manuel de la collection Triangle définit une démonstration en géométrie[5] comme étant

«... une succession de chaînons déductifs qui partent des données et arrivent à la conclusion. Un chaînon déductif est un enchaînement de phrases qui peut se présenter sous la forme :

$$\textit{chaînon}\begin{cases} \textit{On sait que} \ldots \leftarrow \textit{donnée ou conclusion précédente} \\ \textit{Si} \ldots \textit{alors} \ldots \leftarrow \textit{propriété} \\ \textit{Donc} \ldots \leftarrow \textit{conclusion du chaînon} \end{cases}$$

Une démonstration utilise donc des propriétés... »

Ainsi sont clairement mis en évidence le « on sait que » et le « donc », mais l'écriture de « or » devant la propriété utilisée dans le pas, n'est cependant pas imposée.

Le manuel de la collection Diabolo, quant à lui, préconise l'utilisation de « on utilise » pour introduire la propriété qui justifie le pas ; on peut y lire :

« Dans la plupart des cas, une démonstration élémentaire comporte trois parties :
* elle s'appuie sur des données prises dans l'énoncé : « **on sait que...** » ;
* elle utilise une propriété ou une définition déjà connue : « **on utilise...** » ;
* elle aboutit à une conclusion : « **donc...** ». »

Ainsi de ces deux manuels se dégage une règle du contrat didactique usuel[6], qui consiste à réduire la démonstration (il est précisé « en géométrie » dans l'un d'eux) à un

---

[4] Il s'agit du manuel *Maths 4ème* (2002), collection Diabolo, Hachette Education, et du manuel *Mathématiques 4ème* (2002), collection Triangle, Hatier.

[5] Ce manuel distingue « démontrer en géométrie » et « démontrer avec des nombres ».

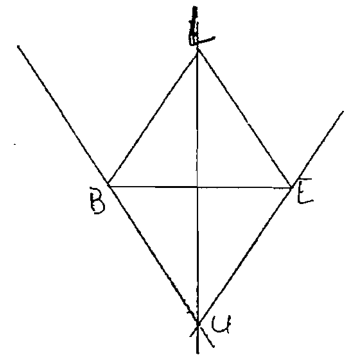
[6] Ce que nous désignons dans toute la suite par « contrat didactique usuel » ou, plus succinctement, par « contrat usuel » est un contrat didactique, qui permet de modéliser les coutumes très répandues dans les

exercice formel de manipulations de propriétés vues en cours, suivant une structure codifiée, en trois phases, la première étant introduite par « on sait que » et la dernière par « donc ». Cette règle, désignée par R_1, pourrait être ainsi formulée :

<u>R_1 ou règle du « on sait que-or-donc »</u> : pour faire une démonstration en géométrie, on articule différents pas ternaires, hypothèse-règle-conclusion, l'hypothèse étant introduite par « on sait que », la conclusion par « donc », la règle[7] justifiant le passage de la première à la seconde étant éventuellement introduite par « or ».

Voyons maintenant une copie[8] d'élève de quatrième, fournie par son professeur de mathématique à l'occasion d'un autre stage de formation continue sur la démonstration en 1995. Il s'agit de la réponse proposée par Farida à la question suivante posée en devoir surveillé :

BLE est un triangle isocèle de sommet principal L. La parallèle à (BL) qui passe par E et la parallèle à (LE) qui passe par B se coupent en U. Démontre que (BE) est perpendiculaire à (LU).



hipotèses { BLE est isocel. La parallèle à (LE) passe par B. La parallèle à (BL) passe par E et se coupent en u.

je veux prouver que (LU) ⊥ (BE) donc conclusion.

hypotèse	or règle	donc conclusion
BLE est un triangl isocel	il a deux côtés de même longueur	donc UB = UE.
La parallèle à (LE) passe par B. La parallèle à (BL) passe par E et elle se coupent en u.	si elle sont parallèles 2 à deux et ont la même longeur	LEUB est un losangle
LEUB est un losange	or un losange a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement.	(LU) ⊥ (BE)

Se révèlent dans cette copie des éléments du contrat didactique relatif à la démonstration en vigueur dans la classe, où s'applique bien la règle R_1, avec toutefois deux variantes : écriture en trois colonnes, « on sait que » remplacé par « hypothèses ». A R_1 s'ajoute une autre règle R_2 de transcription de l'énoncé. Celui-ci est en effet réorganisé à côté de la figure en deux parties : ce qui est qualifié d'hypothèses, d'une

classes de collège, relativement à la démonstration ; il va peu à peu être défini par un certain nombre de ses règles.

[7] Il s'agit d'une règle d'inférence.

[8] Cette copie a fait l'objet d'une autre analyse dans « Faire la figure, écrire les hypothèses, démontrer que… », MC Demongeot, M. Gandit, *Petit x* n°63

part, la conclusion à démontrer, introduite par « je veux prouver que », d'autre part. Ainsi se complète le contrat usuel, par un rituel indépendant du projet de preuve :

R_2 ou règle de « transcription de l'énoncé » : pour faire une démonstration en géométrie, on fait une figure que l'on accompagne des hypothèses (souvent appelées données) et l'on écrit ce que l'on veut démontrer ; ceci est indépendant du projet de preuve.

On remarque que la démonstration elle-même est présentée sous la forme d'un tableau en trois volets, hypothèses-règle-conclusion, chaque ligne correspondant à un pas du raisonnement. Cette organisation semble toutefois transitoire si l'on en juge par la présence des conjonctions « or » et « donc » situées à l'origine des traits de séparation des colonnes : elle est amenée à évoluer sous la forme d'un texte plus classique où, pour chaque pas, le contenu de la colonne du milieu sera introduit par « or » et celui de la colonne de droite par « donc ». Ici la locution « on sait que » n'est pas utilisée. La conception sous laquelle fonctionne son professeur à propos de la démonstration ne constitue-t-elle pas un obstacle[9] à la compréhension par Farida du sens de la preuve ? Emettons quelques hypothèses sur l'origine de ses « erreurs », sur la façon dont elle a pu remplir son tableau.

Comme le montre la première ligne du tableau, Farida a bien compris qu'elle devait écrire une donnée dans la première case : elle recopie donc, pour la deuxième fois d'ailleurs, le début de l'énoncé, « *BLE* est un triangle isocèle ». Elle voit sur la figure que *BUE* est aussi un triangle isocèle, donc que $BU = UE$, mais elle sait que ce n'est ni une hypothèse, ni une « règle », elle n'a donc que le choix de l'écrire dans la colonne de droite, et sur la même ligne que « *BLE* est un triangle isocèle », car c'est bien une des raisons pour lesquelles $BU = UE$. Il lui faut une « règle » à écrire dans la colonne du milieu, qui permette d'obtenir une égalité de longueurs, elle écrit donc « il a deux côtés de même longueur », ceci ayant l'avantage de satisfaire en outre l'hypothèse de la même ligne. Ainsi Farida a bien rempli sa première ligne en s'appuyant sur des indices pertinents, distinguant bien le statut d'hypothèse et celui de conclusion. Or en guise de premier pas l'enseignant attendait : « on sait que *BLE* est un triangle isocèle, or un triangle isocèle a deux côtés de même longueur, donc $LB = LE$. » la « règle » (règle d'inférence) attendue est donc la définition d'un triangle isocèle. Ceci révèle une troisième règle du contrat usuel, désignée par R_3.

R_3 ou règle des « petits pas » : dans une démonstration, il faut écrire les pas qui relèvent d'une définition. Par exemple, si l'on sait que le triangle ABC est isocèle de sommet principal A, il faut justifier que AB=AC, si l'on sait que (AH) est une hauteur du triangle ABC, il faut justifier que (AH) est perpendiculaire à (BC) ou que l'angle AHB est droit…

Deux questions se posent. Contre toute attente du professeur, la règle R_3 ne freine-t-elle pas aussi l'entrée dans le processus de preuve ? Il est clair en effet que la conclusion de cette première ligne n'est qu'une autre façon d'écrire que *BLE* est isocèle, on peut même dire que **cela fait la troisième fois, sans compter celle de l'énoncé, que l'on écrit cette donnée du problème ! Et nous pensons que c'est peut-être cela qui a gêné Farida pour son premier pas** : la conclusion « $LB = LE$ » est porteuse de trop peu d'information par rapport à l'énoncé et elle ne vaut pas la peine d'être écrite ; par contre,

[9] Au sens de Brousseau

« *UB* = *UE* » est un résultat qui semble faire avancer davantage la solution du problème. Or beaucoup d'enseignants pensent qu'il faut être exigeant avec les élèves sur l'écriture de tels « petits pas », surtout au début de l'apprentissage de la démonstration. Notre avis est contraire, d'autant plus que si l'on réfléchit à la construction du triangle « *BLE* », faite avant la démonstration, on utilise nécessairement que *LB* = *LE*. Une autre question : le souci du professeur d'unifier la forme par l'utilisation du seul mot de règle même s'il s'agit d'une définition ne conduit-il pas à une autre difficulté, celle de comprendre le concept de définition ?

En ce qui concerne le deuxième pas, Farida recopie le deuxième bloc d'hypothèses qu'elles a déjà marquées à côté de la figure. Ce qu'elle écrit comme « règle » reprend en partie ces hypothèses, « si elles sont parallèles deux à deux… » : elle a compris que les hypothèses de la « règle » à écrire dans la colonne du milieu devaient correspondre au contenu de la colonne de gauche. Ceci n'est cependant pas suffisant, elle le sait, pour conclure que *LEUB* est un losange, ce qu'elle a bien remarqué sur la figure. Aussi ajoute-t-elle « …et ont la même longueur » dans la colonne centrale, sans se préoccuper du sens mathématique de la proposition conditionnelle toutefois grammaticalement correcte. Emilie a vu en effet que tous les côtés du quadrilatère *BLEU* avaient la même longueur : *BL* = *LE* vient du fait que le triangle *BLE* est isocèle, *BU* = *UE* vient d'être écrit à la ligne précédente du tableau, *LB* = *UE* est implicitement contenu dans « … et ont la même longueur. »

Arrêtons là l'analyse de cette copie. Elle serait d'ailleurs identique dans le cas de l'écriture d'un texte dans le style « on sait que… or… donc… ». Nous faisons en effet l'hypothèse que **satisfaire à R_1, ou sa variante du tableau en trois colonnes, et à R_2 enclenche un processus de reconnaissance de statut d'énoncé[10] qui va à l'opposé de l'entrée dans la preuve**. Ces deux règles de contrat semblent être les mauvais fruits des travaux de R. Duval (1991) qui construit un outil d'**analyse** de la structure d'une démonstration de type raisonnement déductif : il montre la composition des pas et explicite leur articulation. Chacun d'eux a une structure ternaire, constituée de prémisses (appelé hypothèses dans cette classe), d'une conclusion, d'une règle d'inférence (désigné ici par « règle »). Les différents pas s'enchaînent par recyclage de la conclusion de l'un en hypothèse d'un des pas suivants.

Duval donne des pistes pour l'apprentissage de la démonstration, mais en aucun cas, il ne met en avant les règles R_1 et R_2. Lorsqu'il explicite les raisons pour lesquelles l'écriture d'un texte de démonstration doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique, il recommande en effet de ne pas donner de modèle ! Or, comme le professeur de la classe de Farida, c'est justement au modèle, au cadre formel auxquels recourent la plupart des enseignants lorsqu'il s'agit d'enseigner la démonstration, la forme écrasant de fait le sens.

[10] Le mot « énoncé » est à prendre au sens de phrase mathématique qui peut prendre différents statuts, celui d'une hypothèse, celui d'une conclusion, celui d'un théorème, d'une définition… permettant de justifier un pas de déduction.

Deuxième photo : un dialogue en première S ou le désastre du « on sait que... »

Voici un court dialogue, entre deux élèves d'une classe de première S :

« Soit I le point d'intersection des trois droites..., commence Sam.
- Mais tu ne sais pas qu'elles sont concourantes ! répond Marielle.
- Mais si ! Je le sais, qu'elles sont concourantes ! On me demande de le démontrer, c'est que c'est vrai ! »

Tout d'abord cette scène montre qu'il n'y a pas qu'au collège ou en seconde que l'on rencontre des difficultés à propos de la démonstration et que celles-ci sont loin d'être surmontées en classe de première S. Ce dialogue permet aussi de revenir sur l'utilisation de « on sait que » lorsque s'applique R_1 : cette expression introduit une hypothèse du problème ou un résultat démontré dans le cours de la résolution. Comment peuvent résonner ces trois mots dans un esprit qui n'est pas encore entré dans le jeu de la démonstration (et qui est pourtant élève de première S) ? Dira-t-on simplement que Sam ne sait pas raisonner, qu'il prend pour hypothèse ce qu'il veut démontrer ? N'a-t-il pas raison quand il répond à Marielle qu'*il sait que* les droites sont concourantes ? Une méthode pour démontrer que trois droites du plan sont concourantes consiste à démontrer que le point d'intersection de deux d'entre elles (sous réserve de son existence) appartient à la troisième. Sam a peut-être confondu au départ « point d'intersection de deux droites » avec « point d'intersection des trois droites », il n'en demeure pas moins vrai qu'*il est sûr que* les droites sont concourantes, car c'est écrit dans l'énoncé ! Marielle a lu elle aussi l'énoncé du problème à traiter, *elle sait que* les droites sont concourantes, mais elle se dit qu'*on ne le sait pas* ! Elle adhère à certaines règles du jeu de démonstration. Sam n'est peut-être pas encore entré dans ce jeu, mais ce que lui dit Marielle ne peut pas être éclairant pour lui. Ceci pour deux raisons.

Tout d'abord elle utilise « *tu ne sais pas que* » pour signifier à Sam que le fait que les droites sont concourantes est la conclusion à laquelle il s'agit d'aboutir, qu'il faut en faire le but de la démonstration, que ce n'est pas une hypothèse. Elle a retenu, sûrement de son apprentissage de la démonstration dans les classes antérieures, une certaine forme de texte de démonstration, qui impose que l'expression « *on sait que* » soit suivie des hypothèses. **On sait** bien évidemment **aussi** que les droites sont concourantes, mais ce savoir n'a pas le statut d'hypothèse, il a celui de conclusion. La reconnaissance du statut des énoncés, c'est là aussi que se situe une source de difficultés dans l'apprentissage de la démonstration. Or l'utilisation de « *on sait que* » (souvent imposée par le professeur dans les classes de quatrième ou troisième) ne clarifie pas, à notre avis, la différence entre les statuts des énoncés qui interviennent dans une démonstration. L'expression « *on sait (que)* » signifie seulement que l'on a une certaine connaissance, sans rien préciser de son statut : on ***sait*** les données du problème à résoudre, ce qui dans la démonstration prend au départ le statut d'hypothèses, ***on sait que*** les droites sont concourantes, ce qui doit prendre finalement le statut de conclusion, ***on sait aussi*** par exemple, que dans un triangle, les hauteurs sont concourantes, ce qui pourrait (on ne connait pas le problème à résoudre) constituer un théorème utile dans la démonstration de Sam et Marielle. De plus, tout en se disant que « *l'on ne sait pas que les droites sont concourantes* », Marielle va sûrement **utiliser ce savoir** pour poursuivre sa démonstration. Le fait de savoir ce que l'on veut démontrer permet en effet, par exemple, de trier les théorèmes du cours qui ont pour conclusion que des droites sont concourantes, c'est aussi utile si l'on adopte une démarche de raisonnement par conditions suffisantes. Que penser de certains conseils qui sont donnés aux élèves, en phase d'apprentissage de la démonstration : « Tu dois démontrer que les droites sont concourantes, eh bien, *tu fais comme si tu ne le savais pas* et tu pars des hypothèses. » ? Sam doit comprendre qu'il doit ne pas savoir que les droites sont concourantes, tout en utilisant ce savoir !

Troisième photo : un corrigé de devoir ou « Faut-il changer le nom des droites ? »

A nouveau lors d'un stage sur la démonstration au collège en 2002, des stagiaires firent part de leur interrogation par rapport au corrigé qu'ils avaient écrit pour leurs élèves de troisième, à propos d'un énoncé tiré des annales du brevet. Ce n'est pas pour l'intérêt qu'il présente par rapport à la preuve que nous avons choisi de parler de ce « problème », c'est seulement parce que les professeurs de l'établissement en avaient écrit, à destination de leurs élèves, un corrigé sur lequel certains d'entre eux se posaient des questions.

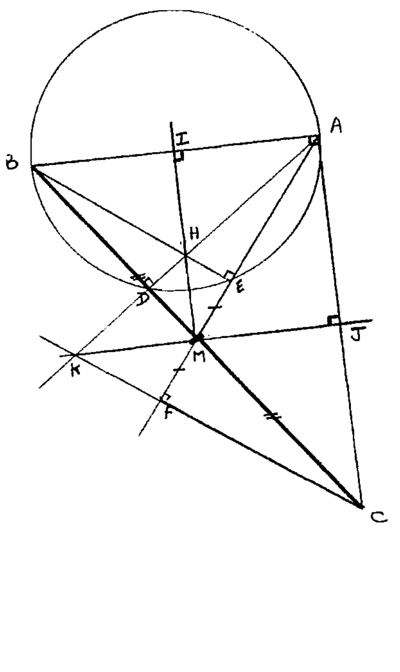
Nous ne reproduisons pas le texte intégral donné aux candidats au brevet, mais voici seulement, dans l'encadré ci-dessous, une des questions de la fin, accompagnée d'une figure d'un élève. Dans les questions précédentes, on demandait de démontrer que *(HM)* était perpendiculaire à *(AB)*, que *(KM)* était perpendiculaire à *(AC)* et que le triangle *ABC* était rectangle en *A*. Nous donnons ci-dessous l'extrait de ce corrigé, relatif à la question et à la figure encadrées.

Question :

On appelle *I* le point d'intersection des droites *(AB)* et *(MH)*. On appelle *J* le point d'intersection des droites *(AC)* et *(KM)*. Démontrer que le quadrilatère *AIMJ* est un rectangle. En déduire que le triangle *HMK* est rectangle.

Le corrigé

« On sait que (HM) ⊥ (AB), I ∈ (AB) et I ∈ (HM) donc (MI) ⊥ (IA),
On sait que (KM) ⊥ (AC), J ∈ (AC) et J ∈ (KM) donc (MJ) ⊥ (JA),
On sait que (AB) ⊥ (AC), I ∈ (AB) et J ∈ (AC) donc (IA) ⊥ (AJ).
Le quadrilatère AIMJ a trois angles droits donc c'est un rectangle.
Son quatrième angle est donc droit, et (IM) ⊥ (MJ).
(IM) ⊥ (MJ), H ∈ (IM) et K ∈ (JM) donc (HM) ⊥ (MK).
Donc le triangle HMK est rectangle en M. »



L'objet de la discussion entre les professeurs de cette équipe résidait essentiellement dans les trois premières et l'avant-dernière ligne de ce corrigé : fallait-il écrire une ligne pour déduire de « *(HM)* ⊥ *(AB)* » que l'angle *AIM* était droit ? Le parti avait en effet été pris de justifier le changement du nom des droites. Il s'agit bien de ce que l'on a déjà appelé un petit pas, mais avec la variante que la « règle d'inférence » n'est pas exigée, à savoir que deux points distincts donnés définissent une droite. Il s'ensuit un complément à la règle de contrat R_3 qui peut s'énoncer ainsi :

Complément à R_3 : si l'on a déjà désigné une droite par (AB) et que l'on sait que le point I appartient à (AB), il faut écrire un pas pour signaler que l'on change le nom de la droite (AB) en (AI).

Suggérons clairement que l'on remplace la première ligne par « *On sait que (MI)* $\perp$ *(AB)* » ! A qui est en train d'apprendre la démonstration (cet apprentissage n'est sûrement pas terminé en fin de troisième !), il est néfaste de masquer l'essentiel sous une accumulation de détails tout à fait secondaires. D'ailleurs si l'on songe à certaines démonstrations de géométrie dans l'espace, elles deviendraient incompréhensibles pour le lecteur, si l'on rédigeait un texte explicitant toutes les hypothèses utilisées. On peut aussi prendre comme exemple la résolution d'inéquations trigonométriques où la figure comprenant un cercle trigonométrique fait totalement partie de la démonstration, sans que sa description soit reprise dans la résolution.

Cette règle de contrat R_3 pose le problème de la pertinence des arguments dans une preuve. Elle relève d'une conception sur la preuve, ou sur l'enseignement de la preuve, que l'on pourrait résumer par : tout doit être explicité, même ce qui est trivial.

2) Des éléments de conceptions d'enseignants à propos de la démonstration

C'est bien d'un contrat didactique aujourd'hui largement répandu dans les classes de collège que sont éléments les trois règles R_1, R_2 et R_3, à savoir la règle du « **on sait que-or-donc** », la règle de « **transcription de l'énoncé** » et la règle des « **petits pas** », contrat qui sera désigné dans la suite par « contrat usuel à propos de la preuve au collège ». Elles sont les indices d'une conception sur la preuve sous laquelle fonctionnent bon nombre d'enseignants expérimentés, y compris des auteurs de manuels scolaires, très décalée par rapport à celle qui prévaut dans la communauté mathématique. On peut par ailleurs compléter ce contrat usuel en reprenant l'analyse de manuels faite par D. Grenier et C. Payan (1998) (les manuels édités en 2002 ou 2003 permettent les mêmes conclusions), montrant ainsi l'absence d'enjeu de vérité : « ... il s'agit pour l'élève d'apprendre à passer d'hypothèses qui sont données et reconnues comme vraies à une conclusion qui est donnée, ou donnée à voir comme évidente (par expérimentation et observation). »

Forçons le trait en disant que, la plupart du temps, la preuve ne vit dans l'enseignement, surtout au collège, **que par un contrat didactique relatif à la forme**. Le professeur se contente souvent de montrer un modèle de démonstration, insistant sur l'organisation linguistique qu'il juge la plus appropriée[11], faisant l'économie de situations où la preuve pourrait apparaître comme un moyen de réduire le doute sur des résultats auparavant conjecturés et d'établir la vérité. A ses débuts au collège ou au lycée, la démonstration ne vivrait, pourrait-on dire, que sous un contrat d'ostension comme le définit G. Brousseau dans sa *Théorie des situations*. Renvoyons à N. Balacheff (1998) qui ajoute : « Du point de vue de l'apprentissage, l'accent mis sur le caractère formel de la démonstration occulte le fait qu'elle puisse être l'aboutissement

[11] Les critères permettant de juger une rédaction préférable à une autre sont tout à fait propres à chaque professeur.

d'un processus de construction qui prendrait sa source dans des moyens de représentation non exclusivement langagiers et relevant d'une démarche articulant conjectures et réfutations. » Cette hypothèse de travail repose sur des faits observés dans des classes d'enseignants expérimentés, répétons-le ; on peut se demander si c'est la nécessité de l'enseigner qui fait évoluer les conceptions sur la démonstration, celles-ci finissant par devenir des obstacles. Cette hypothèse de travail se vérifie-t-elle aussi chez les enseignants débutants ? Voici quelques éléments de réponse.

Qu'est-ce qu'une démonstration pour vous ?

Telle était la question posée, en décembre 2002, à des enseignants débutants[12], à laquelle ils devaient répondre individuellement. Parmi les dix-huit réponses obtenues, sept montrent la démonstration comme un moyen d'établir la vérité, de convaincre d'un résultat, huit signalent la nécessité d'entrer dans la rationalité propre aux mathématiques pour faire une preuve, cinq réponses évoquent un enchaînement de pas déductifs, du type hypothèse-règle-conclusion, enfin, dans onze réponses, la démonstration est montrée comme un moyen de mise en œuvre du cours. Si ces réponses montrent que les conceptions de certains enseignants débutants sur la démonstration intègrent l'enjeu de vérité et l'entrée dans une rationalité propre aux mathématiques, il reste cependant 11 réponses (18 – 7) qui n'évoquent pas qu'une démonstration doit convaincre et établir la vérité et 10 (18 – 8) qui ne donnent aucun indice de l'entrée dans la rationalité mathématique. Enfin onze réponses attachent étroitement la démonstration au cours. On complète ainsi le contrat usuel par la règle R_4 :

<u>Règle R_4 ou règle du « fichier »</u> : dans une démonstration, on ne doit utiliser que les connaissances vues en cours ou celle d'une liste donnée.

Deux autres remarques : d'une part, démontrer, c'est prouver, sept stagiaires sur dix-huit l'affirment ; d'autre part, la démonstration vit surtout dans le cadre de la géométrie, c'est ce qui ressort de trois réponses. Pour terminer, voici intégralement deux réponses, révélatrices de conceptions différentes sur la démonstration :

<u>Réponse 1</u> : « Une démonstration est un texte qui part des hypothèses, des données. Par un enchaînement de pas (hypothèse, propriété, conclusion), elle permet d'aboutir à la conclusion finale, c'est-à-dire la question posée. Elle doit être indépendante de toute figure, c'est-à-dire le texte doit se suffire à lui-même pour la compréhension. »

<u>Réponse 2</u> : « Démonstration : agencement logique de faits connus pour être vrais permettant de conclure à des vérités nouvelles, que l'on pouvait ou non supputer auparavant, mais sans pouvoir trancher sur leur véracité ou non-véracité. »

De la réponse 1 se dégagent trois éléments relatifs à la conception de l'auteur sur la démonstration : nous les désignons par P, T et G.

<u>Elément de conception P (pas)</u> : une démonstration est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle d'inférence-conclusion.

[12] Il s'agit de professeurs de mathématiques stagiaires en deuxième année d'IUFM. Un bon nombre d'entre eux participeront à l'expérimentation qui sera présentée ultérieurement.

Le domaine de validité de *P* se restreint à certains types de démonstrations construites sur le mode du raisonnement déductif. Cet élément *P* crée un contexte favorable à la règle de contrat du « on sait que-or-donc ».

Elément de conception T (tout est écrit) : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.
Cet élément *T* n'est valide que pour certaines démonstrations simples, dans le cadre de la géométrie plane et engendre facilement la règle de contrat « des petits pas ». Une preuve en géométrie dans l'espace, par exemple, est incompréhensible si certains éléments ne sont pas lus sur une figure.

Elément de conception G (géométrie) : la démonstration s'apprend dans le cadre de la géométrie plane.
C'est l'évocation d'une figure dans la réponse 1 qui nous permet d'évoquer cet élément, conforté par les pratiques répandues dans la plupart des manuels.

La réponse 2 nous permet de revenir sur deux éléments de conception sur la démonstration, notés *V* et *R*, tout à fait compatibles, quant à eux, avec une conception dominante dans la communauté mathématique :

Elément de conception V (vérité) : une démonstration est destinée à établir la vérité d'un résultat, elle a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute.

Elément de conception R (rationalité) : une démonstration répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.

3) Pourquoi former les enseignants à propos de la démonstration ?

Il semble donc que les enseignants de mathématiques, expérimentés ou débutants, fonctionnent sous des conceptions sur la preuve, éloignées de celles des mathématiciens. Quelques éléments en ont été explicités. Il s'agit de les compléter et de voir quels sont ceux qui se constituent en obstacles à l'entrée dans une démarche de preuve. Ce sont des obstacles épistémologico-didactiques au sens de Brousseau (1978). Ce sont en effet des conceptions à propos de la démonstration qui résistent au temps et qui produisent des réponses adaptées, des preuves acceptées au collège. Cependant elles empêchent d'accéder au sens de la preuve en tant que moyen d'établir la vérité de résultats qui ne sont pas évidents a priori et nient l'heuristique. Elles détournent aussi de l'écriture d'une démonstration où les arguments seraient organisés en fonction de leur pertinence et de leur force par rapport à un niveau de preuve fixé.

Ainsi si certaines difficultés d'élèves sont inhérentes à l'apprentissage de la preuve, ou, en amont à l'entrée dans l'activité mathématique, d'autres, par contre, sont, nous semble-t-il, **générées par certaines pratiques[13] des enseignants eux-mêmes**, par suite par les conceptions qui les sous-tendent. Celles-ci, il faut l'ajouter, sont complètement liées au fait que la preuve ne vit au collège que dans le cadre de la

[13] Ces pratiques englobent les choix que font les enseignants sur la nature des problèmes qu'ils soumettent aux élèves.

géométrie[14], elles sont fortement influencées par la nature des objets géométriques et par les types de problèmes qui relèvent de ce cadre.

Comment faire en sorte que les enseignants en prennent conscience et changent leur rapport à la preuve ?

Nous faisons évidemment l'hypothèse que la prise de conscience d'une *contradiction* entre la preuve telle que nous allons la faire apparaître et ce qui est demandé aux élèves à l'école en guise de démonstration, dans le contrat usuel, rend nécessaire l'évolution des conceptions des enseignants relativement à son enseignement. Cette hypothèse se place dans le modèle constructiviste d'acquisition des connaissances, selon lequel la contradiction engendre un déséquilibre dont la compensation conduit à un apprentissage. Cependant, le fait de la contradiction est complexe. Tout d'abord « une contradiction n'existe pas en soi mais relativement à un système cognitif. » (N. Balacheff, 1987). Ainsi une contradiction avérée pour un individu peut être inexistante ou niée pour un autre. Par ailleurs, même si nous parvenons à faire identifier par les enseignants les représentations qu'ils ont de la preuve et de son enseignement, une autre question se pose : quels sont les critères qui vont nous permettre de décider de l'existence d'une contradiction entre la preuve, telle qu'elle est explicitée et vécue par les enseignants, la preuve telle qu'elle vit sous le contrat usuel dans la classe et ce que nous allons considérer comme savoir de référence sur la preuve en mathématiques ?

Peut-on créer une situation fondamentale (Brousseau, 1998) de formation pour la preuve, à destination des enseignants, débutants ou expérimentés ?
Voyons tout d'abord ce que nous entendons par preuve.

II. La preuve, en tant que processus et en tant que produit

Preuve et démonstration sont synonymes[15] dans la communauté mathématique, celle des mathématiciens, passés ou contemporains, qui produisent des mathématiques. Il s'agit là de leur outil pour construire les mathématiques et de leur moyen de communication : c'est au travers des preuves ou démonstrations que naissent et vivent les objets mathématiques. Et si l'un des rôles de la démonstration est d'assurer la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique, de légitimer la connaissance, de « dire le vrai », un autre de ses attributs est d'expliquer pourquoi ce résultat est valide, de dire « les raisons du vrai », la connaissance ainsi prouvée devenant de ce fait nécessaire, au sens qu'il est impossible qu'elle ne soit pas vraie. Ce deuxième aspect est ce que D. Grenier et C. Payan (1998) appellent la fonction explicative de la preuve, le premier est sa fonction de validation, sa fonction réductrice du doute. Toute démonstration est reconnue comme telle par cette communauté mathématique si elle satisfait à certaines exigences de rigueur, bien que reposant sur des vérités premières. Ce

[14] Ceci est à remettre en question, nous le verrons plus loin.

[15] Nous adoptons ce point de vue dans cet article. Nous estimons toutefois fort utile pour les débuts de l'apprentissage de la démonstration de distinguer différents types de preuves selon la classification de N. Balacheff (1988), à savoir la preuve relevant de l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'exemple générique et l'expérience mentale, marquant ainsi certains stades dans l'apprentissage de la preuve vers l'étape ultime de la démonstration (nous ne craindrons cependant pas d'englober les deux derniers de ces types de preuve dans la démonstration elle-même).

dernier point soulève ainsi la question de la validité des axiomes[16]. Cependant bien que le niveau de rigueur évolue avec le temps, la rigueur d'Euclide n'est pas la même que celle de Hilbert, il n'en demeure pas moins que l'on considère comme preuves ou démonstrations, celles qui ont été faites par Euclide comme celles que l'on doit à Hilbert. C'est qu'elles comportent des invariants : le caractère de nécessité assuré aux énoncés démontrés et le caractère de suffisance, pourrait-on dire, du discours démonstratif, suffisamment réglé dans son achèvement, pour se détacher de l'expérience.

Toutefois ce point de vue est insuffisant pour aborder l'apprentissage de la preuve ou de la démonstration. Rien n'est dit de la forme, de la façon de construire une preuve, de l'heuristique, de la formulation de conjecture[17].

Nous allons plus loin. Le plus souvent, conformément au contrat usuel, on se borne à considérer comme démonstration un texte, rédigé dans un cadre formel étroitement codifié, qui ne laisse aucune place ni à l'heuristique, ni à la conjecture, et qui ne donne aucune indication sur le cheminement qui a permis d'aboutir à sa production. Cette conception de la démonstration relève ainsi du paradoxe suivant : le texte doit convaincre le lecteur, mais la tâche de compréhension ne doit pas lui être trop facilitée, il doit avoir à sa charge toute une démarche à reconstruire !

En opposition à ce contrat, nous choisissons de considérer la preuve ou la démonstration sous le double aspect du **processus** et du **produit**.

Ce que nous entendons par **processus de preuve** recouvre les différents gestes, attitudes, intentions, opérations mentales, afférents à l'action de prouver dans le cadre de la rationalité mathématique, dont certains sont plus ou moins visibles de l'extérieur suivant que cette action a lieu au sein d'un groupe ou dans le domaine privé de la personne. Il se met en effet en marche[18] sous la triple impulsion qui naît de la recherche d'une conjecture, du désir de combler le doute sur cette conjecture, et du besoin d'explication. N. Balacheff (1987) y ajoute « l'interaction sociale comme moteur du processus de preuve ».

Par certains de ses aspects, ce que nous désignons par processus de preuve rejoint ce qui est souvent nommé argumentation[19] en mathématiques, mais il n'en est, pourrions-nous dire, que la partie visible de l'iceberg.

---

[16] Une conception ancienne de l'axiomatique consiste à faire appel à l'évidence intuitive : on part d'objets suffisamment simples et de propositions suffisamment évidentes pour qu'elles soient acceptables sans démonstration. Les développements mathématiques modernes ont donné le jour à une conception de l'axiomatique selon laquelle le critère de validité est la non-contradiction, conduisant ainsi à mettre systématiquement en doute les vertus de l'intuition et à augmenter le formalisme des démonstrations.

[17] Nous laissons de côté l'aspect de modélisation.

[18] Voir D. Grenier et C. Payan (1998).

[19] Sur les rapports entre argumentation et démonstration, les recherches actuelles se scindent dans deux directions, l'une conduisant à la mise en évidence d'une unité cognitive entre l'argumentation lors de l'éboration d'une conjecture et sa démonstration (Boero, 1999), l'autre visant à une double analyse, fonctionnelle et structurelle, des rapports entre argumentation et démonstration, d'un point de vue cognitif et linguistique (Duval, 1991 ; Balacheff, 1999). Dans sa thèse, B. Pedemonte (2002) tente de répondre à la question de l'existence d'une continuité ou d'un écart entre argumentation et démonstration. Si nous reconnaissons l'intérêt des travaux de Duval relativement à l'écriture d'un texte de démonstration, nous nous plaçons néanmoins suivant le point de vue de Boero, qui, pour faciliter l'approche de la démonstration, propose que soient sélectionnées des situations qui montrent une continuité entre la

Le processus de preuve peut s'accompagner d'un écrit, constitué d'indications heuristiques, d'exemples, de résultats, de conjectures, de contre-exemples, de théorèmes, de définitions, ces éléments étant disposés chronologiquement, dans le but de rendre les idées plus claires, de permettre l'émergence de liens entre elles..., mais cet écrit n'est pas nécessairement organisé pour être communiqué à autrui. C'est justement ce dernier point qui le distingue du texte que nous désignons par le **produit** du processus de preuve (ou plus simplement **le produit de la preuve**), l'autre aspect évoqué pour parler de la preuve, écrit qui résulte du processus et qui, lui, est **destiné à être communiqué à l'extérieur**. Il est certes constitué en « une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées » comme le propose N. Balacheff (1987) pour ce qu'il nomme la démonstration, mais **il peut aussi** contenir des indications heuristiques, s'autoriser des remarques qui permettent au lecteur de comprendre le sens profond des arguments en jeu, leurs raisons, ne craignant pas de montrer des pistes qui n'ont pas abouti, de donner un contre-exemple pour invalider une conjecture formulée. Insistons cependant, ce produit du processus de preuve n'est pas une narration de recherche[20], il est réorganisé de manière à rendre intelligible au lecteur ou à l'auditeur l'essentiel, l'essence, devrait-on dire, de la preuve : les grandes lignes de la ou des stratégies employées pour établir la vérité sont clairement annoncées, les arguments sont triés suivant leur pertinence, les plus forts sont mis en avant, ceux de moindre importance sont tus, les résultats que l'on ne sait pas prouver sont clairement explicités.

Ces deux derniers points touchent à ce que l'on appelle les « **trous** » d'une preuve. Pour expliciter cette notion de « trou », plaçons-nous du côté du lecteur (ou de l'auditeur) du produit d'une preuve, c'est-à-dire un membre du public auquel s'adresse la preuve. Cet interlocuteur constate qu'un argument est omis, qu'un résultat intermédiaire n'est pas donné. Il se peut que cette omission relève de la volonté de l'auteur de ne pas dire certains arguments ou résultats, qu'il juge élémentaires, pour en mettre en valeur d'autres, qu'il considère comme plus pertinents. Il se peut aussi que l'auteur ne sache pas compléter ces manques constatés ou mésestime l'importance relative des arguments. Ces deux possibilités nous présentent ainsi deux catégories de trous. Il n'est cependant pas toujours facile, pour le lecteur, de classer tel trou dans telle catégorie, surtout s'il ne connaît rien de l'auteur de la preuve. Quant à ce dernier, il organise le produit de sa preuve en fonction du public auquel elle est communiquée : une preuve peut se rédiger à différents niveaux. Ceci est source de difficultés si l'on se place sur le plan de l'enseignement et de l'apprentissage de la preuve. Nous y reviendrons dans la deuxième partie[21] de cet article.

---

production d'une conjecture et l'élaboration de sa preuve. Par rapport à l'argumentation **en mathématiques**, nous reprendrons les caractéristiques fonctionnelles donnée par B. Pedemonte (2002) : c'est une justification rationnelle, convaincante, qui s'adresse à un auditoire universel, elle a toujours pour objectif la recherche de la vérité[19], celle-ci pouvant prendre des détours conduisant à des réfutations de conjectures par contre-exemple, passant ainsi par l'établissement du faux. Ce type d'argumentation ne serait ainsi que la manifestation visible, orale ou écrite, du processus de preuve.

[20] Voir F. Bonafé , R. Brunet , B. Pelouzet 1993), *La narration de recherche : instrument méthodologique d'observations*, Actes du colloque inter-IREM Géométrie.

[21] Cette deuxième partie doit paraître dans le prochain numéro de *Petit x*.

Conclusion de cette première partie

Les épisodes de vie de classe que nous avons choisi de décrire nous ont permis d'expliciter des règles d'un contrat didactique coutumier par rapport à la démonstration, en vigueur au collège, voire au lycée, où la forme du discours l'emporte sur le sens de la preuve. Ce contrat repose sur les représentations qu'ont les enseignants de la preuve, mais aussi de la façon dont on peut l'enseigner. Il induit chez nos élèves des attitudes qui s'opposent à celles qui prévalent dans la communauté mathématique. Ce n'est pas acceptable si l'on a le souci d'assurer une véritable formation mathématique à nos élèves.

Nous envisageons de créer une situation de formation pour la preuve, à destination des enseignants, débutants ou expérimentés.

Une première situation a été proposée à une trentaine d'enseignants débutants[22] dans le cadre d'un module[23] sur la démonstration à l'IUFM de Grenoble et reprise dans le cadre d'un stage de formation continue avec des enseignants expérimentés de collège. Nous vous proposerons, dans la deuxième partie de cet article, l'analyse de cette situation, ainsi que les enseignements que nous tirons de son expérimentation.

[22] Ce sont des stagiaires PLC2 (professeur de lycée-collège deuxième année) de mathématiques.
[23] Ce module a été choisi par les professeurs stagiaires. Il est d'une durée totale de douze heures.