AIDE APPORTEE AUX ENSEIGNANTS PAR LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE
UN EXEMPLE : ENSEIGNER LE COSINUS EN 4EME

Annie BERTE
Joëlle CHAGNEAU
Catherine DESNAVRES
Jean LAFOURCADE
Claire SAGEAUX
Groupe « Didactique des mathématiques »
IREM d'Aquitaine

Résumé : Au travers d'un exemple de leçon sur le cosinus en quatrième au collège, nous montrons comment des concepts de didactique peuvent aider les enseignants à analyser et surtout construire des situations d'apprentissage où les élèves font vraiment des mathématiques. Nous explicitons notamment comment le concept de problématique en géométrie nous a amenés à modifier nos *situations*, pour les adapter à ce que les élèves sont capables de faire en quatrième.

Nous sommes des enseignants de collège qui travaillons au sein de l'IREM d'Aquitaine dans le groupe « Didactique des mathématiques ». Notre activité principale est l'enseignement. Nous utilisons depuis une quinzaine d'années les recherches en didactique pour mieux comprendre les difficultés des élèves et aussi pour analyser et construire des situations d'enseignement. Nous employons ce mot au sens de la théorie des situations de Guy Brousseau.

Dans la première partie de cet article nous expliquons à l'aide d'exemples comment nous utilisons la distinction entre les trois problématiques en géométrie développées par René Berthelot et Marie-Hélène Salin. La deuxième partie de cet article montre, à travers l'exemple de l'introduction de la notion de cosinus en $4^{\text{ème}}$, comment certaines exigences sur les situations didactiques nous ont conduits à analyser *a posteriori* la progression que nous avions construite et à l'enrichir de façon conséquente. La troisième partie montre comment la connaissance des différentes problématiques nous a permis de produire une rédaction des leçons de façon à ce que les consignes données aux élèves et l'organisation de la classe soient précisées. Ce travail est ainsi transmissible à d'autres enseignants.

I. Les trois problématiques en géométrie

I.1. Distinction entre les trois problématiques

Un problème est proposé à l'élève, par exemple le suivant : tracer un polygone donné.

L'élève peut résoudre ce problème:

1. dans une problématique pratique : Le polygone est donné par un tracé effectif sur papier blanc qui représente le résultat attendu. L'élève reproduit ce polygone sur un autre papier blanc en ayant le modèle à portée de vue. Il peut tester son tracé, obtenu même par hasard, en comparant sa production avec le résultat attendu par superposition à 1 mm près. Il peut le *corriger et recommencer sans contraintes sur le nombre d'essais*, la figure étant toujours disponible.

> *L'évaluation de la forme à l'œil et les superpositions successives font partie du processus pour trouver le résultat.*

2. dans une problématique de modélisation : Le polygone est encore donné par un tracé effectif. L'élève le voit quelques instants avant de commencer son propre tracé, puis le polygone est placé hors de sa vue et inaccessible. Selon un scénario organisé par le professeur, l'élève s'est procuré des informations sur des mesures (angles, côtés, diagonales), il doit en utiliser le moins possible. *L'élève ne peut reprendre le polygone à reproduire qu'une seule fois pour vérifier quand il estime avoir fini.* Il vérifie par superposition à 1 mm près mais *cette fois il s'agit d'une validation empirique finale qui ne fait pas partie du processus de résolution.* Pour réussir, l'élève doit avoir recours à *un modèle* de détermination du polygone, modèle plus ou moins implicite , qui peut être juste ou faux, mais qui va lui permettre de prendre le minimum d'informations bien choisies et en nombre suffisant pour *donner une solution du problème en un seul essai.*

> *La superposition finale lui permet de valider ou non son tracé, mais aussi de valider le modèle de détermination du polygone qu'il a conçu par anticipation de l'action.*

3. dans une problématique théorique : Aucun dessin n'est fourni ni montré à l'élève. Un certain nombre de renseignements sur la nature du polygone et les mesures de ses éléments sont fournis, ainsi que les instruments autorisés. *L'élève doit justifier la possibilité ou non de le construire avec ces données et ces instruments.* Il recherche les points qui manquent en déterminant deux lignes qui portent chaque point. Il effectue le tracé et *justifie par les propriétés géométriques* que son tracé répond bien aux conditions requises.

> *Il discute théoriquement l'existence et le nombre de solutions.*

Sur cet exemple la distinction entre les trois problématiques est nette dans la façon de poser le problème et dans les possibles stratégies des élèves.

Les situations proposées aux élèves sont de types différents :

En 1 et 2 le problème et les conditions dans lesquelles les élèves sont mis (l'organisation du milieu) constituent une *situation d'action.*

En 2, cette situation d'action contient une *situation d'auto-communication* (c'est l'élève qui prend lui-même les renseignements sur le polygone en un seul coup). Ce pourrait être une situation de communication entre élèves : un émetteur doit envoyer un minimum de renseignements à un récepteur qui, sans voir le polygone, doit le reproduire. Nous ne parlons pas de situation de communication si les renseignements sont délivrés à la demande de l'élève par l'enseignant ou par un ordinateur. L'écriture des données pour les transmettre ou les conserver n'est plus dans ce cas à la charge des élèves. La communication se réduit à la demande et au décodage.

En 3, il s'agit d'une *situation de preuve* car le but n'est pas de tracer effectivement un polygone avec une précision physique donnée mais de prouver qu'on peut le faire.

La situation 2 est une situation d'apprentissage de maîtrise de l'espace, en d'autres termes il s'agit de construire des modèles par anticipation pour organiser l'espace, s'y repérer.

La situation 3 est une situation d'usage de ses connaissances théoriques relevant de la géométrie.

En jouant sur les variables de la situation l'enseignant modifie les conditions conduisant ainsi l'élève à se placer dans l'une ou l'autre des problématiques.

Dans cet exemple les modifications sont si fortes que le problème lui-même (tracer un polygone donné) en devient différent.

La problématique de modélisation est fondamentale pour la construction du sens de nos leçons par l'élève.

Elle permet d'abord de faciliter la dévolution du problème en donnant du sens à ce problème. En effet si la méthode de validation est énoncée clairement dès le début, les élèves peuvent comprendre ce que l'enseignant attend d'eux, même s'ils ne savent pas encore comment il vont y arriver.

Ensuite cette validation empirique effective permet à l'élève de se rendre compte de la validité de son modèle, éventuellement de le corriger. Ainsi la résolution du problème amène un progrès dans l'apprentissage. Ce modèle que l'élève a utilisé en mobilisant des connaissances va pouvoir servir à nouveau si la phase d'action est suivie de formulation.

La problématique de modélisation permet, dans des situations d'apprentissage d'émettre des conjectures et d'admettre des énoncés.

- Emettre des conjectures

Ceci se produit quand la validation empirique n'est pas décisive. Le professeur provoque la formulation d'une conjecture à partir du modèle utilisé dans la situation d'action et engage les élèves dans la preuve de cette conjecture quand ils possèdent le savoir pour conclure.

Les élèves se trouvent ainsi conduits à entrer dans une problématique théorique, l'objet même de la géométrie.

- Admettre des énoncés.

Par exemple, dans le problème de tracé du polygone de la situation 2, il se peut que l'élève prenne des données insuffisantes pour le tracé, ou surabondantes et incompatibles par suite d'erreurs de mesure. Si le polygone est un triangle, la mise en commun pourra conduire à admettre les cas d'isométries des triangles.

Lorsque les outils nécessaires pour démontrer ne sont pas accessibles, il est possible d'admettre des énoncés.

Ceux-ci deviendront de la sorte assez signifiants pour l'élève, ayant été éprouvés dans un problème, donc disponibles au moment où il en aura besoin pour élaborer des preuves théoriques, le faisant ainsi entrer dans la géométrie.

I.2. Glissements d'une problématique à l'autre : difficultés pour les élèves et pour les enseignants

Les ruptures entre les trois problématiques peuvent être moins nettes que dans l'exemple précédent, mais l'analyse des zones d'ombre est intéressante. Ceci rejoint l'épistémologie de la géométrie qui s'est construite et va se construire pour nos élèves à la fois comme science de modélisation de l'espace physique et en rupture avec cet espace physique.

Nous allons voir sur un autre exemple que si le milieu n'est pas du tout organisé, si aucune variable didactique n'est fixée, si l'élève n'a pas de contraintes, il peut s'engager dans n'importe laquelle de ces problématiques et l'enseignant aura beaucoup de mal à intégrer cela dans un apprentissage.

Nous avons posé le même problème à des élèves de tous niveaux en collège : un cercle leur est donné par un dessin sur lequel le centre n'est pas marqué. La question posée est de retrouver le centre de ce cercle.

Sans aucune contrainte sur les instruments nous avons obtenu des solutions d'élèves qui relèvent des trois problématiques.

- placer le centre à vue, vérifier avec le compas en essayant de retracer le cercle par dessus le cercle donné (sans appuyer), évaluer le décalage, effacer le centre présumé et recommencer autant de fois que nécessaire. Nous pouvons dire que ces élèves sont dans une problématique pratique, le modèle qu'ils utilisent étant tout à fait minimal : le centre du cercle est quelque part au milieu et implicitement il s'agit d'un point équidistant de tous les points du cercle. Avec ce modèle minimal il est normal que plusieurs essais soient nécessaires.

- tracer avec l'équerre un rectangle inscrit dans le cercle et prendre l'intersection des diagonales. L'élève vérifie ensuite avec le compas. Il est dans une problématique de modélisation. Les connaissances qu'il a sur le rectangle n'ont pas le statut de propriétés mathématiques. L'élève prend le risque d'anticiper un modèle pour réaliser sa construction à partir d'une connaissance globale de la figure « rectangle et son cercle circonscrit ». A l'école élémentaire, il a construit des rectangles puis tracé le cercle autour : il inverse le procédé.

- plier le cercle donné deux fois en superposant les deux moitiés par transparence, désigner le centre à l'intersection des deux plis, ou plier une seule fois et prendre le milieu du segment intérieur au cercle. Ces élèves ont recours à un modèle : tout diamètre est axe de symétrie du cercle. Ils sont dans une problématique de modélisation. Ils n'ont presque pas besoin de vérification empirique (avec le compas par exemple) quand leur modèle est si fort qu'il a valeur de théorème pour eux. *L'enseignant pourra évaluer à quel point ils sont dans une problématique théorique à la façon dont il vont formuler la solution.* Si la solution consiste en un pliage sans formulation ou avec une formulation minimale, c'est qu'ils sont toujours dans une problématique de modélisation.

- tracer la médiatrice d'une corde ou un angle droit ayant son sommet sur le cercle et prendre le milieu du segment déterminé ainsi par intersection avec le cercle. *Seule la vérification que l'élève fait ou la justification éventuelle qu'il donne sans besoin de vérifier permettent de savoir dans quelle problématique il se trouve.*

- tracer deux cordes et chercher l'intersection des médiatrices de ces deux cordes, solution encore valable si la donnée n'est pas un cercle entier mais un arc de cercle. *L'élève qui fournit une justification en argumentant sur la place du centre équidistant des extrémités des cordes est dans une problématique théorique.*

Nous avons explicité toutes les solutions à ce problème avec les différentes problématiques au Colloque de la Commission Inter-Irem premier cycle de Montpellier en juin 2001.

Il ne faut pas croire qu'il y a une évolution progressive au cours de l'apprentissage et qu'on passerait d'une problématique pratique à l'école élémentaire (reproduction de figures) à une problématique de modélisation en $6^{ème}$ et $5^{ème}$ (mise en place des propriétés de base) puis progressivement à une problématique théorique (démonstration de théorèmes) plus tard.

Faire de la géométrie c'est passer sans cesse d'une problématique de modélisation (ne serait-ce que pour faire des conjectures) à une problématique théorique (pour les démontrer).

Dans notre travail sur le cosinus, nous allons voir qu'au cours d'une même leçon le professeur passe d'une problématique à l'autre.

Souvent, ce qui constitue une difficulté non exprimable pour l'élève c'est de ne pas savoir dans quelle problématique le professeur attend qu'il se place, alors que celui-ci passe de l'une à l'autre sans le dire, ni même s'en rendre compte lui-même, du fait de son expertise en géométrie.

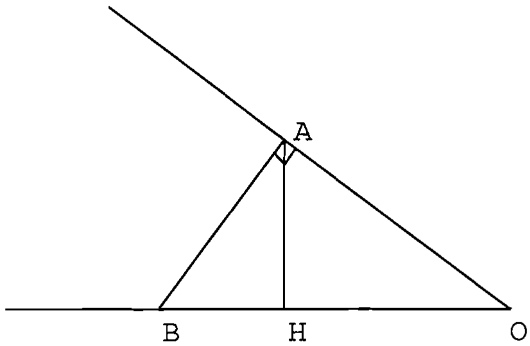
II. Apports de la didactique dans la conception des problèmes posés aux élèves

II.1 Pourquoi le cosinus est-il enseigné comme première ligne trigonométrique en $4^{ème}$?

Dans les programmes de collège actuels, le cosinus doit être enseigné en $4^{ème}$ tandis que la tangente et le sinus ne sont abordés qu'en $3^{ème}$. Ceci résulte des réformes successives de programmes. L'introduction du rapport de projection orthogonale (sans prononcer le mot de cosinus) d'un axe sur un autre a été faite pour la première fois en $3^{ème}$ lors de la réforme dite « des maths modernes » de 69. Il s'agissait d'admettre que le rapport de projection orthogonale d'un axe (D) sur un axe (D') est le même que le rapport de projection orthogonale de (D') sur (D)

En d'autres termes :

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OA}{OB}$$



Sur le plan théorique de la géométrie ainsi construite, le théorème de Thalès admis en $4^{ème}$ permettait de transporter la structure affine d'un axe à l'autre et cet axiome en $3^{ème}$ permettait de transporter la structure métrique. Ce n'était pas évidemment explicité en ces termes aux élèves. Cet axiome de l'égalité du rapport de projection orthogonale permettait de démontrer aux élèves le théorème de Pythagore en $3^{ème}$. Ceci attire l'attention sur le fait qu'en mathématique le cosinus est lié à la définition d'une distance dans le plan.

Au cours des réformes successives la notion de rapport de projection, puis de projection même a disparu des programmes. Le cosinus et le théorème de Pythagore sont appris actuellement en $4^{ème}$ mais sans lien nécessaire entre eux. Le cosinus doit être traité maintenant en prenant un angle dans un triangle rectangle, comme rapport entre un côté de ce triangle et l'hypoténuse.

Des questions se posent : puisque tout lien a été rompu entre le cosinus et l'axiomatique de la géométrie métrique : pourquoi enseigner le seul cosinus en $4^{ème}$? Si on veut enseigner une seule ligne trigonométrique en $4^{ème}$ pourquoi le cosinus plutôt que la tangente ou le sinus ? La tangente est importante car elle est liée à la pente d'une droite donc à l'alignement de points. Le sinus est lié à l'aire du parallélogramme ou à la relation entre la mesure de la corde et celle de l'arc intercepté par un angle au centre.

Cette question de priorité donnée au cosinus n'est pas soulevée dans les programmes actuels. C'est un des acquis de la didactique d'avoir rendu compte de ce phénomène : les réformes successives font que certaines notions continuent à être enseignées alors que sont coupés les liens qui les rattachaient aux autres notions du programme.

Ce n'est pas l'objet de cet article d'en discuter davantage d'autant plus que notre travail, en se plaçant dans le cadre des programmes actuels, pourrait s'adapter pour n'importe quelle première ligne trigonométrique à enseigner.

II.2. Analyse mathématique du contenu dans le cadre des programmes

Voici ce que disent les programmes :

En 4ème : « Utiliser pour un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné et de l'angle aigu dont on connaît le cosinus ».

Il est rajouté en commentaire : « La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueur. » mais aussi : « On peut également le définir comme l'abscisse d'un point sur le quart de cercle trigonométrique situé dans le premier quadrant. ».

1. Première ébauche

Dans la première ébauche de ce travail, l'un de nous avait attiré notre attention sur le fait qu'il y a implicitement dans cette leçon deux théorèmes.

Comme le demande la première phrase du programme, il s'agit de savoir utiliser une fonction linéaire associant côté et hypoténuse dans des triangles rectangles semblables. Mais la seconde phrase demande en fait que les élèves aient vu deux énoncés réciproques l'un de l'autre :

<u>Enoncé 1</u>: Si des triangles rectangles ont un même angle aigu leur hypoténuse et le côté adjacent à cet angle sont proportionnels.

<u>Enoncé 2</u> : Lorsque un côté de l'angle droit et l'hypoténuse sont proportionnels dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle aigu compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même.

Nous avions donc prévu dans une première étape de faire réaliser des triangles avec des rapports égaux et constater l'égalité des angles (énoncé 2) et dans l'étape suivante de faire constater la proportionnalité approximative des côtés dans des triangles rectangles ayant les mêmes angles puis d'en donner une démonstration avec le théorème de Thalès (énoncé 1). Ce projet de leçon nous a d'abord paru satisfaisant car il était déjà différent de ce qui se trouve dans les manuels et donc ce qui se fait d'habitude dans les classes, quand les deux théorèmes arrivent amalgamés dans une leçon réduite à la deuxième partie de la nôtre.

C'est donc l'analyse mathématique qui nous a permis dans un premier temps de distinguer deux étapes dans la progression.

2. Deuxième étape

Il nous a ainsi semblé raisonnable de commencer à faire travailler les élèves dans plusieurs triangles rectangles.

Mais ceci amène une double difficulté :

- un triangle rectangle a deux angles aigus, le cosinus de l'un étant le sinus de l'autre.

- il faudra se dégager des triangles si on veut définir à la fin le cosinus d'un angle comme le demande le programme dès la deuxième phrase, et même implicitement dès la première.

Il s'agit ainsi d'apprendre en se limitant aux angles aigus, que le cosinus caractérise l'angle sans dépendre du triangle rectangle que l'élève devra éventuellement choisir ou tracer de sa propre initiative.

En d'autres termes, le rapport de proportionnalité est lui-même fonction de l'angle. Outre la fonction linéaire précédente, il y a une deuxième fonction sous-jacente, la fonction cosinus qui n'a rien de linéaire.

L'énoncé 1 assure l'existence d'une fonction qui à tout angle aigu fait correspondre un rapport unique. L'énoncé 2 assure qu'elle est bijective.

Les énoncés 1 et 2 précédents peuvent alors être formulés à nouveau sans référence aux triangles rectangles : à un angle correspond un cosinus et réciproquement. C'est très différent pour les élèves.

De plus l'énoncé 2 ne figure sous aucune forme dans les leçons des manuels usuels, bien qu'il soit nécessaire de l'appliquer ensuite dans des exercices.

Outre deux étapes minimales dans la progression, l'analyse mathématique nous a indiqué trois niveaux de formulation pour les traces écrites :

– en terme de proportionnalité,
– en terme de rapport entre deux côtés de triangle,
– en termes de cosinus d'un angle.

II.3. Analyse didactique amenant un enrichissement de progression :

Avec notre progression ainsi construite en deux étapes nos élèves n'avaient pas à résoudre de problème réel mettant en jeu le cosinus. Dans des triangles rectangles semblables, les élèves constataient l'égalité des angles dans la première étape puis l'égalité des rapports dans la seconde. Ce savoir ne fonctionnait que dans les exercices d'application à la fin.

Pour donner un sens au cosinus avant de passer à la définition et aux exercices d'application, nous avons imaginé un problème de reproduction d'un angle – et non d'un triangle - dans une situation de communication entre élèves en imposant l'envoi d'un seul nombre.

C'est la pratique que nous avions des situations de communication qui nous a permis de penser à ce scénario. La pratique de classe d'un professeur isolé ne permet pas d'avoir l'idée de ce type de dispositif qui ne figure pas dans les documents habituellement mis à la disposition des professeurs, c'est à dire essentiellement les manuels.

Mais nous n'avons pas posé ce problème dans nos classes après les leçons déjà prévues car nous étions sûrs que les élèves ne sauraient pas démarrer.

Certes dans nos leçons les élèves étaient « actifs », ils découpaient, superposaient, mesuraient. Les formulations s'obtenaient de façon maïeutique. Mais de simples constats induits par le professeur n'étaient pas assez porteurs de sens pour leur permettre d'imaginer la solution au problème de reproduction d'un angle.

Nous avons testé ce problème avec des professeurs en formation (PE1 ou PLC2). Quand il s'agissait de ne donner qu'un seul nombre, très rares étaient ceux qui pensaient à envoyer un rapport trigonométrique, même parmi les titulaires de licences scientifiques ou même d'une licence de mathématique.

Nous avons décidé de reporter ce problème trop difficile en $3^{ème}$, et nous avons alors recherché d'autres situations.

Nous avons imaginé deux problèmes dans lesquels les élèves doivent prévoir des mesures de côté ou d'angle d'un triangle rectangle détenu par le professeur et ces problèmes intermédiaires sont devenus l'essentiel de nos leçons. Nous avons ajouté un problème de reproduction d'un angle détenu par le professeur, angle non inclus dans un triangle. Ainsi la situation de communication trop difficile est coupée en deux. En $4^{ème}$ c'est le professeur qui donne un rapport, tous les élèves doivent trouver l'angle. En $3^{ème}$ le travail d'émetteur est à la charge de l'élève.

<u>Nos situations en classe sont de ce fait devenues de types suivants :</u>

Situations 1 : Le savoir en jeu est l'énoncé 1

Les élèves mesurent les côtés de plusieurs triangles rectangles ayant un même angle aigu. Dans un nouveau triangle rectangle inaccessible ayant le même angle, ils doivent trouver le côté adjacent à cet angle connaissant l'hypoténuse.

Situations 2 : Le savoir en jeu est l'énoncé 2

Détermination d'éléments de triangles rectangles :

2a-Le professeur détient un triangle rectangle inaccessible aux élèves. Il donne le rapport entre un côté de l'angle droit et l'hypoténuse. Les élèves doivent trouver les angles de ce triangle.

2b-Parmi différents triangles rectangles dessinés, avec indication des mesures de certains côtés, l'élève doit trouver ceux qui ont les mêmes angles

Reproductions d'angles qui ne sont plus inclus dans des triangles rectangles au départ.

2c-Le professeur détient le dessin d'un angle inaccessible dont il annonce le cosinus. Sans calculatrice, l'élève doit reproduire l'angle du professeur avec une seule règle graduée.

2d- Un élève reçoit un angle et il doit écrire un message comportant un seul nombre et aucun dessin, pour permettre à son camarade de reproduire l'angle. Emetteur et récepteur disposent d'une règle graduée et des instruments de dessin géométrique mais pas d'un rapporteur .

III. Apport de la distinction entre les problématiques pour organiser les situations

Après avoir choisi les problèmes le professeur précise dans quelle problématique il va placer les élèves pour les résoudre.

En particulier pour chaque problème, comment l'élève saura-t-il si sa solution convient ? Toutes les validations se feront-elles empiriquement, ou bien y aura-t-il des moments de validations théoriques ? Comment va-t-on conduire l'élève à passer explicitement d'une problématique à l'autre?

Une étude détaillée des situations et de leur enchaînement en classe va permettre de comprendre ce que nous faisons. Tenant compte des analyses précédentes nous avons une étape préliminaire de préparation suivie de 4 étapes dans lesquelles les élèves résoudront les problèmes prévus.

Dans cette progression nous n'allons pas à petits pas de la problématique de modélisation à la problématique théorique. Il y a un aller et retour de l'une à l'autre. En revanche nous introduisons une évolution dans les formulations des énoncés : passer d'une formulation en termes de proportionnalité (étape préliminaire), à une formulation en termes de rapport (étapes 1 et 2) puis à une formulation en termes de cosinus.

Etape préliminaire : figures et conjectures

L'objectif premier de cette étape est de donner un sens à l'expression « rapport entre les longueurs des côtés du triangle rectangle » en faisant construire effectivement des côtés dans un rapport particulier.

Consigne 1 : Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure la moitié de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

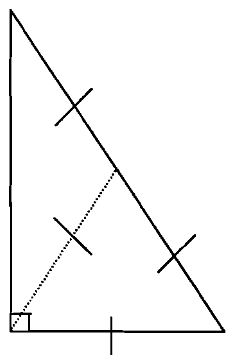
Dans une leçon précédente les élèves ont appris à construire un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit et l'hypoténuse. Il y a deux procédures selon que l'on commence par le côté ou l'hypoténuse. C'est toujours un exercice difficile pour les élèves. La difficulté est accrue ici car aucune mesure n'est donnée. Il faut choisir arbitrairement une longueur et la doubler ou la diviser par deux. Volontairement le professeur utilise le mot « tracer » et non « construire » pour signifier qu'il n'exige pas une justification de la construction, car dans cette leçon ce qui importe ce n'est pas la construction mais la conjecture. L'élève aura réussi son tracé s'il peut vérifier empiriquement avec sa règle graduée que le triangle qu'il a construit répond à la contrainte posée.

Voici quelques réponses d'élèves à la question de la conjecture :

- *1- Ce sont les mêmes triangles mais à une échelle différente*
- *2- Un des angles mesure la moitié de l'autre*
- *3- Il y a un angle de 60° et un autre de 30°*
- *4- C'est le même triangle qu'on agrandit et qu'on rétrécit*

La mesure des angles avec le rapporteur se fait à un degré près. Peut-on être sûr ? Les élèves possèdent à ce moment – là un savoir suffisant pour se convaincre de façon théorique qu'il s'agit bien exactement de 30° et 60°. Ils ont deux façons d'y arriver :

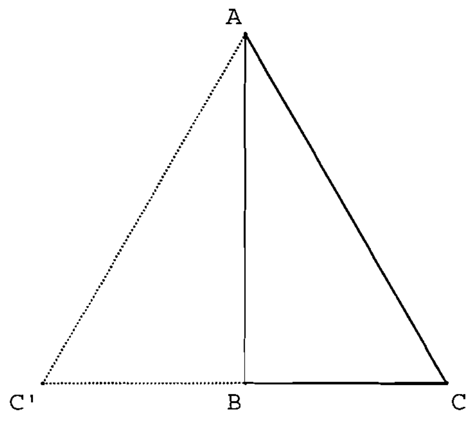
1- Introduire le point I milieu de l'hypoténuse. On a BI = IC = IA d'après le théorème de la médiane déjà vu et comme BC = AC/2 on obtient le triangle équilatéral IBC d'où la valeur des angles



2- On appelle C' le symétrique de C par rapport à la droite (AB) On a alors :

$$C'B = CB = \frac{AC}{2} \text{ donc } AC = CC' = AC'$$

ACC' est équilatéral donc $\widehat{ACB} = 60°$ et $\widehat{CAB} = 30°$.



Dans les deux cas il y a une difficulté pour les élèves car il faut introduire des éléments supplémentaires dans la figure.

La démonstration 1 sera plus facile à trouver car on ne dessine pas à l'extérieur du triangle. En revanche si les élèves n'ont rien trouvé seuls, la seconde est plus facile à comprendre car elle ne repose pas sur un théorème antérieur.

Le professeur ne donne pas les deux démonstrations mais s'adapte à la classe.

Consigne 2 : Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure les $\frac{3}{4}$ de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Les élèves ont plus de mal à réaliser les triangles demandés à cause du rapport $\frac{3}{4}$

Les conjectures 1 et 4 sont les mêmes que précédemment.

Certains élèves ajoutent : *ces triangles font partie d'une même « famille »*.

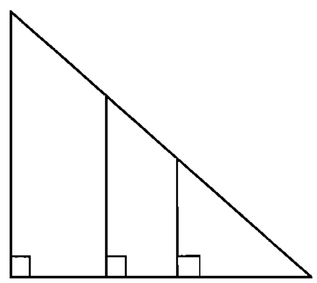
Certains font des mesures et disent que *les angles sont à peu près de 41° et 49° pour les trois triangles*. Ils se mettent par deux pour vérifier avec les triangles du voisin.

Certains élèves disent : « *c'est proportionnel* ».

De quelle proportionnalité s'agit-il ?

A propos de la conjecture sur les angles

Le professeur engage tous les élèves à découper les trois triangles et à les « empiler » pour superposer les angles de même mesure. On réalise ainsi une vérification empirique de la conjecture sur les angles. Contrairement au cas précédent on ne peut pas la prouver théoriquement. Cette étape donne ainsi l'occasion au professeur de faire la distinction entre une conjecture prouvée théoriquement pour les angles de 60° et une conjecture admise quand le rapport est $\frac{3}{4}$.



Vérifier pour un angle suffit car si deux triangles rectangles ont un angle commun, ils ont les mêmes angles, leurs angles aigus étant complémentaires

A propos de la conjecture sur la proportionnalité

Le professeur peut demander à chaque élève d'écrire quelques mesures pour les trois triangles de façon à préciser un rapport de proportionnalité.

Au tableau l'enseignant écrit des mesures de triangles donnés par des élèves différents : sur la même ligne les hypoténuses, et en regard sur la ligne suivante, les côtés mesurant les $3/4$ de ces hypoténuses.

Bilan des échanges sur le tableau :

On passe d'un triangle à l'autre par un rapport variable.
Par contre, il y a un rapport fixe qui est $3/4$ entre hypoténuse et côté.

Par un procédé maïeutique le professeur fait énoncer une phrase qui est écrite sur le cahier:
Il semble que lorsque des triangles rectangles ont un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse dans le même rapport de proportionnalité alors ils ont les mêmes angles.

Importance de cette étape :
1- Cette étape préliminaire permet d'expliciter le fait que si les rapports sont les mêmes les angles sont les mêmes et garde dans l'implicite que si les rapports sont différents ($1/2$ et $3/4$) les angles sont différents.

C'est la contraposée de la réciproque qui arrive en même temps que le théorème.

Ceci est un phénomène très général. Quand le savoir visé est un théorème et sa réciproque, l'organisation d'une situation en classe, même réduite à l'énoncé de simples conjectures comme ici, amène de façon amalgamée le théorème et sa réciproque sous forme de la contraposée de cette réciproque : si telle relation est vérifiée on obtient la propriété attendue, si elle n'est pas vérifiée, la propriété n'est pas vraie.

2- Cette étape donne aux élèves, à partir de deux cas particuliers, l'idée du rapport de proportionnalité pour résoudre le problème qui va suivre où ils doivent faire fonctionner dans l'action la réciproque : si les angles sont les mêmes alors les rapports sont égaux. C'est difficile car il y a plusieurs rapports de proportionnalité et un seul doit être reconnu comme pertinent. Si cette étape manque ils ne peuvent démarrer seuls dans le problème de l'étape suivante.

Etape 1 : problème de détermination d'une longueur dans un triangle rectangle

a- Consigne et dévolution du problème en problématique de modélisation :

Les élèves doivent tracer trois triangles rectangles ayant tous un angle donné de 20° par exemple. Le professeur leur demande de mesurer les hypoténuses et les côtés adjacents à l'angle de 20°. A ce moment le vocabulaire « côté adjacent à un angle » est introduit.

Arrive alors le problème :

Le professeur annonce qu'il possède plusieurs autres triangles rectangles ayant aussi un angle de 20° mais hors d'atteinte des élèves. Un de ces triangles est tracé au tableau et son hypoténuse mesure 98 cm. Il s'agit de prévoir la mesure du côté de l'angle droit adjacent à l'angle de 20° dans ce triangle. Le professeur annonce qu'il posera ensuite le même problème pour les autres triangles en donnant aussi la mesure des hypoténuses.

Les élèves ne peuvent plus rien tracer ni mesurer, mais ils ont le droit de faire tous les calculs qu'ils veulent à partir des mesures qu'ils ont déjà relevées.

Les élèves disposent de deux méthodes pour résoudre ce problème dans une problématique de modélisation:

- soit conjecturer que le rapport de deux hypoténuses entre elles est le même que le rapport de deux côtés de l'angle droit entre eux, éventuellement le vérifier avec les trois triangles tracés et se servir des mesures sur un des triangles tracés pour résoudre le problème

- soit conjecturer que l'angle de 20° étant le même pour tous les triangles il y a un rapport constant entre côté de l'angle droit et hypoténuse, tenter de vérifier cela empiriquement sur les trois triangles tracés et ayant déterminé un rapport « constant » aux erreurs de mesures près s'en servir pour le calcul demandé

b- Quatre remarques sur les variables de la situation:

1- Parmi les triangles dont il faut déterminer le côté, le professeur donne d'abord un grand triangle. En effet si la longueur de l'hypoténuse est voisine d'un mètre, l'erreur absolue sur la mesure du côté risque d'être grande par suite d'un rapport approché, ce qui amène un doute sur le modèle, d'où la nécessité d'une démonstration.

2- Dans la consigne le professeur demande aux élèves de ne plus rien dessiner dès que la question est posée. Pourquoi cette contrainte ? Si les élèves pouvaient tracer un autre triangle ils pourraient avoir l'idée de tracer un triangle ayant un angle de 20° et dont l'hypoténuse mesurerait 9,8 cm par exemple (pour eux, le « même » en réduction). En multipliant la mesure du côté de l'angle droit par 10 ils auraient le côté du triangle cherché. Comme aucun tracé supplémentaire n'est possible, ils ne peuvent utiliser que les triangles tracés au début, donc utiliser un rapport entre hypoténuses qu'ils ne peuvent choisir mais qu'ils doivent calculer. Dans ces conditions ils vont peut-être privilégier les calculs des rapports entre côté et hypoténuse qu'ils viennent de voir dans l'étape précédente. Cependant rien n'est exclu.

3- Le professeur demande le même calcul pour plusieurs triangles (deux ou trois, pas plus). En effet, pour éprouver la fonctionnalité du cosinus il faut que le problème se répète plusieurs fois avec le même angle de 20°. Les élèves verront alors qu'un seul rapport donne tous les résultats, tandis qu'une proportionnalité d'un triangle à l'autre oblige à refaire les calculs à chaque fois puisque le rapport change.

4- Nous avons choisi un grand triangle pour introduire un doute sur le modèle. Il est inutile d'ajoute d'autres sources d'erreurs de mesure. Il est préférable de choisir une mesure d'angle qui tombe sur une grande graduation du rapporteur (éviter des angles de 21° ou 22°). Pour la même raison ne pas prendre un angle trop petit (10°). Inutile d'introduire non plus de difficulté concernant les unités de longueur en proposant une hypoténuse de 1,05 m par exemple comme nous l'avions fait dans un premier temps. Certains élèves de $4^{ème}$ ont encore des problèmes de conversion qu'il vaut mieux traiter ailleurs.

c- Passage à une problématique géométrique

Les élèves doivent d'abord conjecturer le modèle de la proportionnalité pour trouver le résultat demandé.

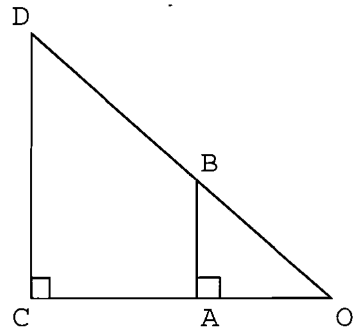
Certains élèves vont calculer les rapports des côtés aux hypoténuses, trouver des nombres sensiblement différents et douter de la proportionnalité. Si le modèle est assez fort pour eux, ils vont passer outre, prendre un rapport moyen et faire le calcul.

La vérification avec le grand triangle va montrer une erreur absolue assez grande : une preuve théorique de cette proportionnalité sera bien venue.

Certains élèves ont l'idée de découper leurs triangles ou de les dessiner à nouveau de façon à obtenir des triangles « empilés » comme cela a été fait dans l'étape précédente à titre de vérification empirique. Ici l'égalité des angles n'est plus une conclusion mais une hypothèse.

Le théorème de Thalès réduit au triangle est au programme de $4^{ème}$ (à savoir que le parallélisme entraîne l'égalité des rapports)

Dans la figure ci-contre , ils savent que,
Les droites(AB) et (CD) étant parallèles :
$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ mais ils ne savent pas que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$
qui est justement la conjecture à démontrer .



Il s'agit d'une simple inversion des moyens dans la proportion, mais ce théorème sur les proportions n'est plus disponible car plus enseigné. Il faut donc le retrouver dans ce cas particulier en passant par

OA x OD = OC x OB.

Pour cette raison il est probable que le professeur soit obligé d'aider les élèves.

La capacité des élèves à prendre une preuve en charge dépend entre autre de la disponibilité de théorèmes antérieurs donc de la cohérence de la progression qui n'est pas toujours bien assurée dans les programmes.
Au moins fait-on sentir aux élèves la nécessité de cette preuve.

d- Situation de réinvestissement ou variante

Le professeur demande de tracer trois triangles rectangles ayant un angle de 35°. Le même problème est posé : calcul du côté adjacent pour d'autres triangles rectangles ayant des angles de 35° dont on connaît seulement l'hypoténuse.

Cette répétition, profitable dans une classe « faible », sera un peu lassante dans une classe « forte ». Dans ce cas le professeur traite en parallèle les deux problèmes : une rangée trace trois triangles ayant un angle de 20° et la rangée voisine trois triangles ayant un angle de 35°.

Si le professeur choisit de répéter avec 35°, il peut ne pas demander au préalable aux élèves de tracer des triangles rectangles ayant tous un angle de 35° et poser le problème d'emblée avec le triangle inconnu. Les élèves auront à leur charge le tracé d'au moins un triangle ayant un angle de 35° . C'est beaucoup plus difficile et c'est aussi un enjeu dans l'étape 2.

Le bilan de l'étape 1 est le suivant :

Enoncé 1 démontré : Si des triangles rectangles ont le même angle aigu, le rapport entre côté adjacent et hypoténuse est le même .

Conjecture : Pour des angles différents les rapports sont différents. (C'est la contraposée de l'énoncé déjà envisagé sous sa forme directe dans l'étape préliminaire)

Etape 2 : problème de détermination d'un angle dans un triangle rectangle

Les élèves doivent utiliser la proportionnalité des côtés des triangles rectangles qui a été conjecturée dans l'étape préliminaire.

Dans l'étape 1 le professeur demandait aux élèves de construire des triangles rectangles de leur choix avec un angle donné avant de poser la question relative au côté du triangle inconnu.

Cette fois la question de l'angle du triangle inconnu est posée d'emblée. Les élèves ont à leur charge la construction d'un triangle rectangle semblable à celui du professeur mais sans doute non superposable, le résultat attendu étant l'angle seulement.

Ce problème est toujours posé dans une problématique de modélisation car le théorème n'est pas encore mobilisable pour une preuve. C'est une conjecture de l'étape préliminaire qui n'a pas été éprouvée lors de la résolution d'un problème. La validation de la solution se fait par superposition.

On considère qu'un énoncé a le statut de théorème et sera valable pour une preuve théorique, s'il a été éprouvé comme modèle dans une situation d'action et qu'il a été clairement formulé puis admis ou bien démontré.

Ici ce n'est pas le cas puisque cette conjecture est restée implicite dans l'étape préliminaire. C'est à la fin de l'étape suivante seulement que l'énoncé 2 en termes de rapport est admis et institutionnalisé.

Le professeur annonce qu'il possède un triangle rectangle inaccessible aux élèves dans lequel le rapport entre un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse est 3/10.

Les élèves doivent trouver la mesure des angles de ce triangle en ayant les instruments de dessin à disposition. Une erreur d'un demi - degré est permise.

La donnée du rapport sous forme de fraction (3/10) permet de faciliter aux élèves le tracé d'un triangle (ils peuvent prendre 3cm pour le côté et 10 cm pour l'hypoténuse). En outre, ils ont déjà fait cet exercice de tracé dans l'étape préliminaire avec 1 /2 et 3/4.

En effet il faut que la difficulté principale soit ici de penser à tracer un triangle rectangle qui ne sera pas celui du professeur mais qui donnera les angles.

Les élèves vont annoncer deux mesures d'angles. Les couples de résultats sont écrits au tableau. Le professeur fait circuler dans la classe plusieurs copies de son triangle sur papier calque pour que les élèves puissent superposer le triangle du professeur avec celui qu'ils ont tracé en faisant coïncider un des angles.

Bilan de l'étape 2 : Quand l'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont dans le rapport 3/10, l'angle compris entre eux est le même pour tous les triangles ainsi tracés. Il mesure environ 72,5°.

On peut prévoir la mesure de l'autre angle en prenant le complémentaire. Ceci ne permet pas d'être sûr du résultat, mais au moins de ne pas donner des mesures en désaccord avec le théorème sur la somme des angles du triangle connu depuis la cinquième. Il faut trouver 17,5° à un demi- degré près.

Les élèves peuvent alors vérifier que le rapport entre le côté adjacent à ce deuxième angle aigu et l'hypoténuse est lui aussi constant dans tous les triangles, en accord avec l'énoncé 1.

Enoncé 2 admis : Lorsque le rapport entre un côté de l'angle droit et l'hypoténuse est le même dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même dans tous les triangles. L'autre angle aigu est aussi le même.

Etape 3 : définition du cosinus et nouveau problème de détermination d'un angle dans un triangle rectangle

a- Définition

Le professeur donne la définition du cosinus de l'angle aigu d'un triangle rectangle comme rapport entre côté adjacent et hypoténuse et fait reformuler l'énoncé 1 en utilisant le mot « cosinus » (la notion étant travaillée depuis l'étape 1):

Si des triangles rectangles ont un même angle aigu, le cosinus de cet angle est le même .

A un angle donné est donc associé un nombre, son cosinus, qui est compris entre 0 et 1.

Ceci introduit l'expression : « cosinus d'un angle » sans référence à un triangle rectangle particulier.

b- Problème

Parmi différents triangles rectangles dessinés, avec indications des mesures de leurs côtés, trouver ceux qui ont les mêmes angles. (voir feuille suivante)

Cette fiche est constituée de trois familles de triangles (dont deux sont assez proches).

La disposition des triangles a été étudiée de façon à ne privilégier aucune direction.

Pour certains triangles, il y a un choix à faire par l'élève parmi les indications données (parfois en surnombre).

La variétés de ces données est aussi un élément à prendre en compte :des nombres, des lettres, le codage des triangles ...

Procédures attendues de l'élève :

- Choix d'un triangle
- Identification de l'angle qu'il va considérer
- Ecriture du rapport entre le coté adjacent et l'hypoténuse pour calculer le cosinus de cet angle.
- Comparaison avec d'autres écritures fractionnaires trouvées pour d'autres triangles de la feuille.

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{1}{2,5}=\frac{3}{7,5}$ ou bien $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$

(Le retour à l'écriture décimale est aussi possible ici avec les nombres choisis)

$\frac{2}{3}=\frac{1}{1,5}=\frac{y}{1,5y}$

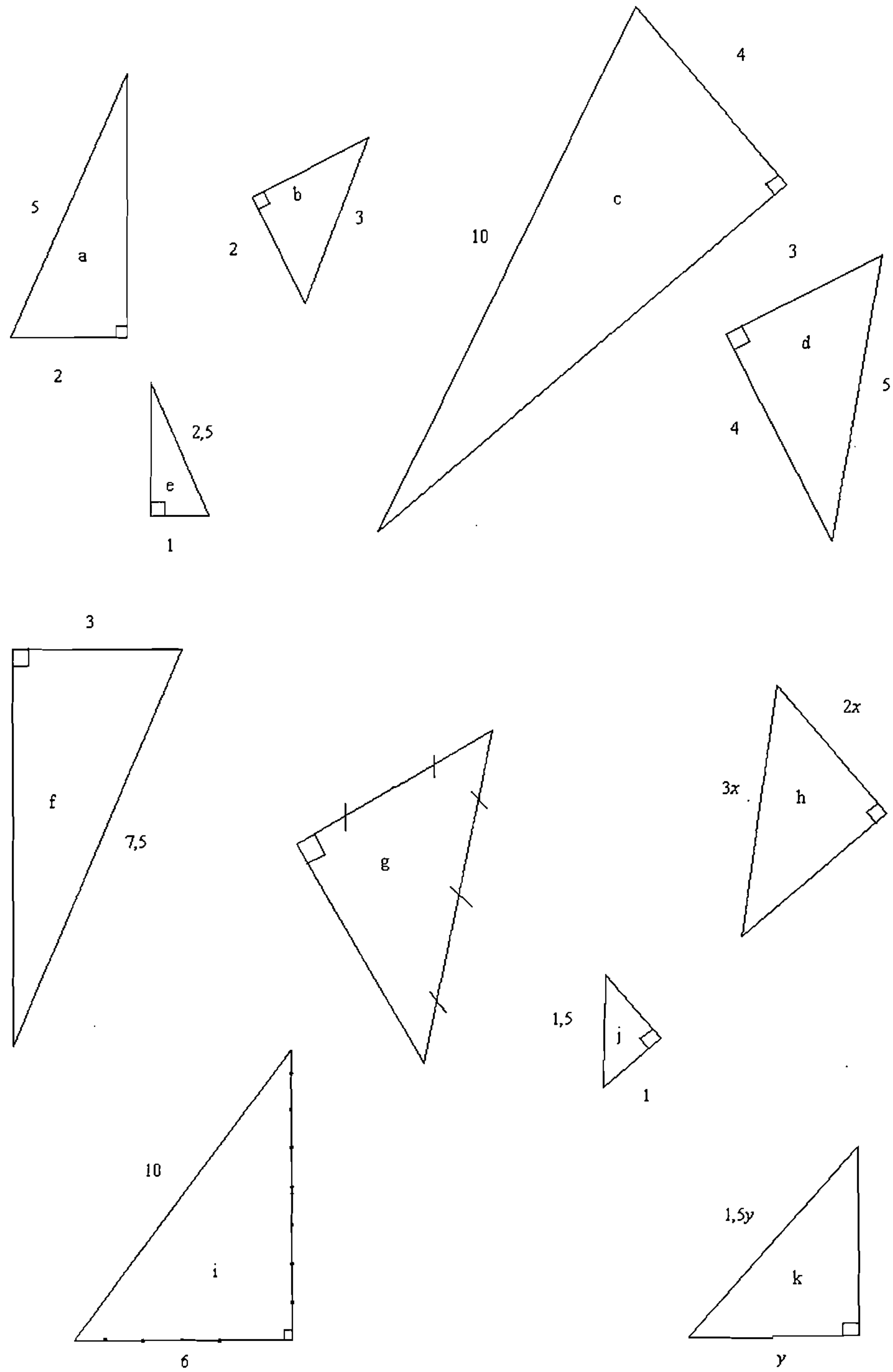
(La difficulté ne doit pas venir des nombres, c'est la raison pour laquelle ils ont été choisis de façon à ce que la comparaison des fractions soit simple)

> *Ce problème est résolu par les élèves dans une problématique théorique en justifiant le résultat par l'énoncé 2 en termes de rapport entre les côtés des triangles rectangles. La justification théorique de leur résultat peut aussi amener les élèves à utiliser le mot « cosinus » et on s'achemine ainsi vers une autre formulation de l'énoncé 2 : « C'est le même angle car c'est le même cosinus ».*

Bilan de l'étape 3 :

Lorsque pour plusieurs triangles rectangles le cosinus d'un angle est le même alors cet angle est le même .

L'autre angle aigu est aussi le même et finalement les triangles rectangles considérés ont les mêmes angles.



5
a
2
b
2
3
4
c
10
3
d
5
4
2,5
e
1
3
f
7,5
g
2x
3x
h
1,5
j
1
10
i
6
1,5y
k
y

Etape 4 : reproduction d'un angle non inclus dans un triangle rectangle

a- Problème posé en 4ème

Le professeur dit qu'il détient un angle et le montre rapidement de loin (plusieurs feuilles pourront circuler dans la classe au moment de la validation). Le professeur fait remarquer que sur son dessin il n'y a pas de triangle rectangle, seulement un angle. Le professeur annonce un cosinus de 0,25 pour cet angle. Les élèves doivent dessiner l'angle du professeur et la validation se fera par superposition. Une erreur un demi - degré est permise. Ils n'ont pas de calculatrice.

Il s'agit ici de trouver un angle qui n'est plus explicitement l'angle d'un triangle rectangle. D'autre part le rapport est décimal au lieu de se présenter sous forme de fraction.

Si l'angle dessiné par l'élève ne coïncide pas à un demi-degré près avec celui du professeur l'élève va devoir être sûr qu'il s'agit de sa part d'une erreur de tracé sans remettre en cause son modèle, et donc trouver cette erreur de tracé.

Pour résoudre le problème les élèves ont dû utiliser implicitement l'énoncé 2 en termes de cosinus car le mot a été fourni par le professeur. Le professeur place les élèves en problématique de modélisation, tout espérant qu'ils vont être assez sûrs du modèle pour ne pas le remettre en doute quel que soit le résultat de la validation. Dès que l'existence de cette fonction cosinus bijective sera certaine, l'élève utilisera une machine qui lui donnera avec toute la précision désirée la valeur de l'angle ou la valeur du cosinus.

Il est très important que le professeur soit conscient de ce qu'il fait en termes de problématique, d'autant plus qu'il y a une ambiguïté ici. Il place les élèves en problématique de modélisation, alors qu'ils ont déjà presque tout appris pour pouvoir se placer en problématique théorique.

En effet, dans le problème de l'étape 3 certains élèves ont pu déjà utiliser le mot cosinus pour une justification de l'égalité de certains angles, même si l'énoncé 2 en termes de triangles rectangles était suffisant pour ce problème. Ces élèves ont ainsi affirmé que la fonction cosinus est bijective entre 0 et 90°, conséquence immédiate de l'énoncé admis. Ils pourraient donc être en problématique théorique dans l'étape suivante. Mais le professeur doit choisir s'il peut ou non l'exiger de tous.

Cette ambiguïté est impossible à éviter, elle est inhérente à l'apprentissage : chaque élève progresse plus ou moins vite vers les formulations adaptées aux problèmes qu'il doit résoudre. Le professeur doit tenir compte de l'hétérogénéité de la classe.

Une nouvelle formulation de l'énoncé 2 est institutionnalisée : « *à tout nombre entre 0 et 1 est associé un seul angle si ce nombre est donné comme le cosinus de l'angle* ». C'est une formulation difficile. Elle arrive à la fin de la progression.

A partir de là tous les problèmes et exercices doivent être résolus dans une problématique théorique. L'élève doit calculer des angles ou des longueurs, démontrer des égalités d'angles ou de longueurs et argumenter sans validation empirique. L'usage de la calculatrice pour résoudre des exercices permet d'associer un angle et son cosinus dans les deux sens, éventuellement de tracer le graphique de la fonction. On peut aussi utiliser l'ordinateur.

b- Problème donné en 3ème :

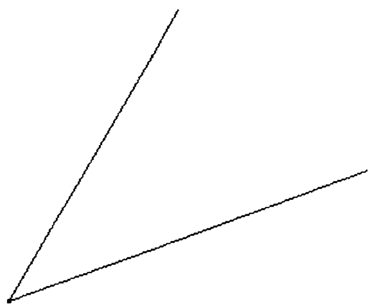
Il s'agit d'écrire un message pour reproduire un angle.

> *Si le but est de permettre aux élèves de réactiver le cosinus, le professeur peut les placer dans une problématique théorique. Mais ils risquent de ne pas s'en souvenir et le professeur peut les amener à imaginer n'importe quelle autre ligne trigonométrique ou son inverse. Les élèves seront alors à nouveau placés dans une problématique de modélisation et la réussite de la reproduction sera vérifiée à 1mm près. Donc selon l'objectif choisi, le professeur pourra placer les élèves dans l'une ou l'autre des problématiques.*

Voici ce que nous avons fait dans une classe de 3ème :

L'objectif est réviser le cosinus. Les élèves risquent de ne pas s'en souvenir. Pour cette raison le professeur n'introduit pas tout de suite la contrainte d'un seul nombre dans le message car ils ne pourraient pas démarrer. De plus, de cette façon, toutes les validations des solutions pourront être théoriques.

Première question



Tu dois téléphoner à un camarade pour qu'il trace un angle égal à celui-ci. Tu as perdu ton rapporteur mais tu as à ta disposition les autres instruments de géométrie et la calculatrice. Ton camarade a tout son matériel et sa calculatrice.

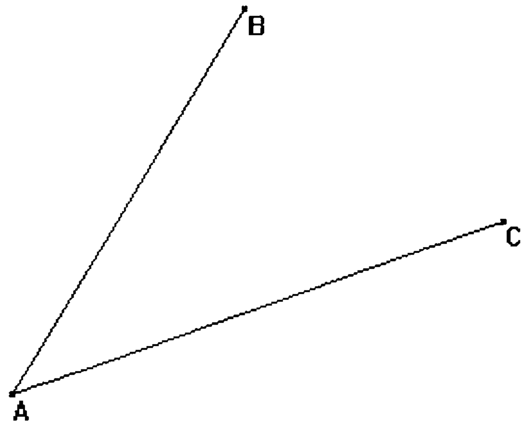
Quel message vas-tu lui dicter?

La réalisation du tracé effectif n'est pas demandée, donc la validation ne sera pas empirique en comparant le modèle et le tracé. La validation sera théorique car, puisqu'il n'y a pas de contraintes sur le message, les élèves vont reproduire un triangle. Ils connaissent alors assez de géométrie en 3ème pour savoir si leur message va donner le même angle.

Comme en 6ème les élèves demandent vite s'ils peuvent nommer la figure...

Désignons par A, B et C les extrémités des segments représentés sur le dessin fourni aux élèves.

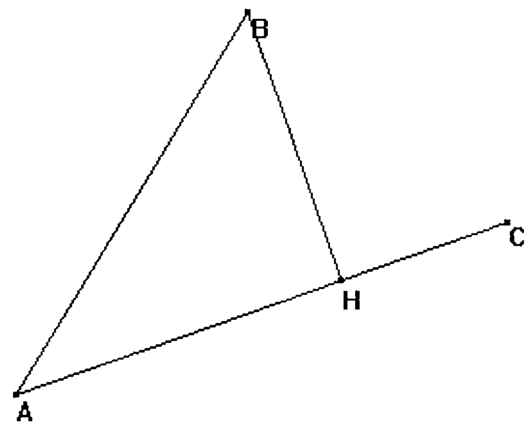
Le professeur doit veiller à ne pas dessiner un triangle ABC particulier (rectangle en B ou isocèle)



Première stratégie : de nombreux élèves tracent le segment [BC], mesurent les longueurs des trois côtés et demandent à leur camarade de construire un triangle connaissant les longueurs des trois côtés.

Le professeur a choisi ici de donner le dessin d'un angle qui suggère un triangle. Une autre possibilité est de donner un angle dont les côtés sont très longs et arrivent jusqu'à la limite de la feuille. Dans ce cas les élèves ne vont pas nommer les extrémités des segments et d'autres stratégies vont apparaître.

Deuxième stratégie : certains autres élèves tracent la perpendiculaire à (AC) passant par B qui coupe (AC) en H. Ils obtiennent ainsi un triangle ABH rectangle en H. Cette stratégie sera favorisée si le professeur a fourni un dessin sur lequel la droite (AC) est horizontale.



Ils envoient souvent un message du type : « Trace un triangle ABH rectangle en H avec HB = 3,9 cm et HA = 4,8 cm ». Très rares sont ceux qui envoient trop d'informations par exemple un triangle rectangle avec les longueurs des trois côtés. Lors de la mise en commun ils sont vite convaincus par leurs camarades que deux côtés suffisent pour un triangle rectangle.

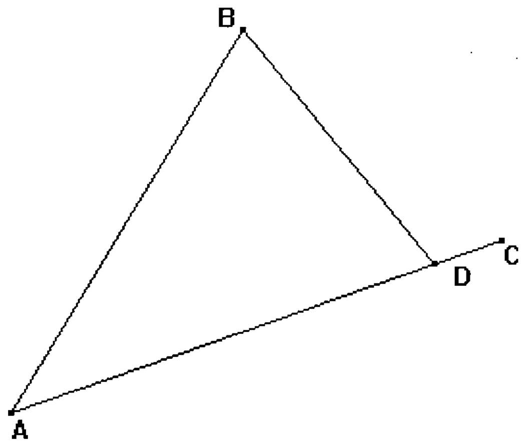
Remarque :

1- Les élèves envoient le plus souvent les deux côtés de l'angle droit. Il est aussi intéressant de savoir si on peut envoyer un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.

2- Dans le cas où les côtés arrivent jusqu'à la limite de la feuille les élèves choisissent un point pour tracer la perpendiculaire et ils envoient en majorité comme précédemment les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle ainsi tracé. Mais comme le choix du triangle est arbitraire ils n'ont pas tous les mêmes mesures. Il est intéressant de remarquer qu'ils n'ont pas tous le même triangle et pourtant ils ont tous trouvé le même angle. Pourquoi ? La proportionnalité des côtés va apparaître.

Troisième stratégie : Quelques élèves moins nombreux tracent la perpendiculaire à (AB) passant par C et procèdent comme précédemment. Cette stratégie n'est pas favorisée par le dessin fourni car il faut prolonger le segment [AB]

Quatrième stratégie : un ou deux élèves tracent un triangle isocèle



Ils envoient un message du genre : « trace un triangle ABD isocèle en A avec AB = 6,2 cm et BD = 4,2 cm ». Ici aussi une discussion est lancée par le professeur sur le nombre d'informations nécessaires et lesquelles.

Validation dans les quatre stratégies :
Un élève moyen de 3ème est tout à fait persuadé sans vérification empirique qu'il obtient le même angle, de sorte que l'organisation d'une situation de communication avec validation par superposition des angles nous a semblé en dessous des capacités des élèves.

Néanmoins s'il s'agit vraiment d'une validation théorique, les élèves devraient formuler qu'ils obtiennent le même angle en vertu d'un cas d'isométrie des triangles identifié : ces cas d'isométrie ne figurent nulle part dans les programmes de collège.

Voici encore un exemple où la cohérence des programmes n'est pas assurée. Ce manque de cohérence ne favorise pas le passage des élèves à la géométrie théorique car ils ne disposent pas des outils nécessaires pour produire eux mêmes les preuves.

Cette leçon sur le cosinus est extraite d'une progression complète que nous faisons en géométrie et dans notre progression les cas d'isométries des triangles sont prévus en $5^{ème}$. Ce n'est pas le cas pour toutes les classes.

Après la première mise en commun qui prend en compte ces différentes stratégies, le professeur choisit comment il va orienter la leçon.

Choix 1 : mettre les élèves sur la voie du cosinus, et poursuivre ensuite par analogie avec tangente et sinus

Choix 2 : leur faire observer les triangles rectangles tracés, remarquer la proportionnalité entre les côtés et poser des problèmes pour l'utiliser. Ce choix suppose plusieurs leçons et un retour en problématique de modélisation pour aboutir aux trois lignes trigonométriques.

Voici la suite de la leçon avec le choix 1 :

Le professeur fait remarquer que ces messages utilisent 2 ou 3 nombres. Il pose alors la deuxième question.

Deuxième question : Envoyez maintenant un message qui ne contient qu'un seul nombre.

Les élèves sont un peu décontenancés et quelques uns proposent : « trace un triangle rectangle avec une hypoténuse de 6,2 cm ».

Une discussion s'instaure pour savoir si on obtient le même angle et il est intéressant de revoir alors les triangles rectangles que l'on peut tracer à partir d'une hypoténuse donnée.

Le professeur demande aux élèves d'essayer de se rappeler ce qu'ils ont vus en $4^{ème}$ qui concernait les angles … quelques uns pensent alors au cosinus et le travail de rédaction de messages est relancé après avoir rappelé la définition du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

De nouvelles interrogations apparaissent :

- si on donne $\frac{4,8}{6,2}$ on donne deux nombres…(de façon générale les élèves conçoivent difficilement une fraction comme une seul nombre alors qu'on l'écrit avec deux)

- si on calcule 4,8 : 6,2 peut- on envoyer une valeur approchée et avec combien de chiffres après la virgule ?

La classe se met alors d'accord sur un message minimum :

- tracer un angle dont le cosinus est égal à $\frac{4,8}{6,2}$ ou

- tracer un angle dont le cosinus est à peu près égal à 0,774.

Ce procédé donne l'angle que l'on veut d'après les leçons de $4^{ème}$. La validation théorique utilise le savoir sur le cosinus.

Troisième question : Maintenant c'est vous qui devez tracer l'angle, à partir du message suivant :

Tracer un angle dont le cosinus est égal à $\frac{5}{7}$

Des stratégies utilisant ou non la calculatrice sont utilisées et sont mises en commun.

Même problème avec le cosinus égal à 0,37.

Remarque : Les élèves ont toujours de la difficulté à voir le rapport des mesures de deux côtés comme un nombre, et cela dépend beaucoup de ce que chaque élève a fait l'année précédente avec le plus souvent un autre professeur. Pour cette raison le professeur de 3ème peut décider de s'orienter vers le choix 2 où le rapport entre les côtés devra être mobilisé plusieurs fois par les élèves dans une problématique de modélisation aussi bien pour le cosinus que la tangente ou le sinus, avant d'être institutionnalisé. Avec le choix 1, le professeur passe au sinus et à la tangente par analogie avec le cosinus, sans reconstruire le savoir de 4ème .

IV. Conclusion : Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique

Dans la rédaction de cet article, nous avons voulu montrer qu'à chaque moment les connaissances en didactique interviennent pour expliciter et justifier nos choix dans le déroulement de notre enseignement du cosinus, notamment l'analyse des situations et la distinction entre les problématiques.

Les notions de didactique nous paraissent utiles pour convaincre de la pertinence des choix ceux qui voudraient utiliser notre travail. D'autre part traduire en termes de problématique permet également au professeur d'être plus clair dans les consignes données aux élèves et dans les traces écrites élaborées en commun.

Ces notions de didactique ne sont pas seulement utiles dans l'exposé du travail fini et dans la réalisation en classe. Elles jouent un rôle fondamental au moment de la conception des leçons comme nous espérons l'avoir montré:

- dans la construction de chaque situation pour prévoir autant que possible une validation de sa réponse par l'élève lui-même, pour identifier les variables didactiques et voir les possibilités de choix du professeur.
- dans la conception d'une progression. Se demander à chaque étape quel réel problème mathématique les élèves ont résolu est indispensable. Cela oblige à imaginer un vrai problème pour lequel le savoir visé fonctionne, et ensuite, pour permettre aux élèves de s'y confronter, d'organiser une progression cohérente avec éventuellement des problèmes intermédiaires.

C'est le passage d'une problématique à l'autre qui permet aux élèves d'avancer et ce passage dépend de la conception des situations. Par exemple dans la détermination de la mesure du côté de l'angle droit adjacent à un angle de 20° dans un triangle rectangle, le choix de la mesure de l'hypoténuse donnée est une variable didactique de cette situation. Choisir un grand nombre entraîne une erreur absolue assez grande et conduit à une situation de preuve géométrique de la proportionnalité des triangles.

Pour nous, enseignants, les connaissances en didactique nous paraissent fondamentales dans notre travail : elles permettent au professeur d'être beaucoup plus exigeant dans ses préparations de leçons en lui donnant une méthode pour imaginer des problèmes porteurs de sens et qui construisent une progression raisonnable.

Dans le cas du cosinus nous pensons avoir ainsi construit une progression qui peut servir à introduire une autre ligne trigonométrique au cas où les programmes changeraient. En d'autres termes les variations des programmes affectent souvent peu une progression et des leçons construites sur les bases solides que nous donne la didactique.

L'éclairage de la didactique doit permettre à chaque enseignant de faire évoluer ses pratiques en mettant en évidence l'activité mathématique des élèves au travers de nombreuses situations analysées et intégrées dans une progression quotidienne. Il serait pour cela souhaitable que des propositions plus nombreuses soient faites au niveau du secondaire.

Sous l'influence des IUFM et de la COPIRELEM, les pratiques ont évolué à l'école élémentaire. Il reste à faire de même dans les collèges et les lycées, avec une formation initiale et continue adaptée.

Bibliographie :

BERTE Annie, *Mathématique dynamique,* Nathan pédagogie, 1993

BERTE Annie, *Mathématique du collège au lycée*, Nathan Pédagogie, 1996

BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène, *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l scolarité obligatoire*, Thèse Université Bordeaux I, 1992.

BROUSSEAU Guy, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de doctorat d'état, Université Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU Guy, *Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie.* La Revue de Didactique de l'IMAG de Grenoble N°45, 1983.

INRP, *Construction de savoirs mathématiques au collège*, Rencontres pédagogiques n° 30, 1991.

IREM d'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège », *Géométrie au cycle central : un enchaînement d'activités*, IREM Université Bordeaux I, 2000.

IREM D'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège », *Evolution ou ruptures dans les problématiques pour l'enseignement de la géométrie au collège*, Actes du colloque de la commission Inter IREM 1er cycle, IREM de Montpellier, 2001.

IREM D'AQUITAINE, Groupe « Didactique des mathématiques au collège », *Des « activités » aux situations d'enseignement en mathématiques au collège*, IREM Université Bordeaux I, 2002.