# ACTIVITE … LE FLOCON DE VON KOCH

Eléments de solution

Isabelle BLOCH

La figure de départ est un triangle équilatéral de 18 cm de côté.

**Le périmètre du flocon**

$P_n$ est une suite géométrique de raison 4/3.

En effet, à chaque étape, on remplace chaque segment par quatre autres, de longueur égale au tiers du segment remplacé, donc : $P_n = \frac{4}{3} P_{n-1}$ et $P_n = P_0 \, (4/3)^n$

Les élèves peuvent chercher à la calculatrice si $P_n$ dépasse certaines valeurs ; une preuve de la limite viendra de la recherche de ce que $P_n$ dépasse des puissances de 10, aussi grandes soient-elles. Ainsi on se fixe un entier p, et l'on cherche n tel que $P_n > 10^p$

Si ceci est possible quel que soit p, on admettra (définition !) que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$

Il faut noter que le calcul nécessite l'aide des logarithmes, ce qui est envisageable à partir de la classe de Première.

**L'aire du flocon**

L'aire $A_0$ est celle du triangle équilatéral de côté a: $A_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

A chaque étape, le nombre de triangles supplémentaires est multiplié par 4 et l'aire de chacun des triangles ajoutés est le neuvième de l'aire des triangles précédents : $A_2 = A_1 + 12\frac{A_0}{9^2}$ et $A_n = A_{n-1} + 3\frac{4^{n-1} A_0}{9^n}$ Finalement, en utilisant la somme de la série géométrique, on trouve : $A_n = A_0\left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ et $A_\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \frac{8}{5} A_0$

Au delà de la difficulté du calcul du terme général, la recherche de la limite de $A_n$ est d'autant plus difficile qu'un calcul à la calculatrice montre, très vite, que l'affichage ne change plus. Interpréter ce phénomène suppose de revenir à la forme algébrique et d'avoir d'abord identifié que le terme fonctionnel (celui qui varie lorsqu'on augmente n) est $(4/9)^n$

Il faut donc se demander quelle est la limite de ce terme ; puis lui appliquer un procédé du même type que pour $P_n$ mais avec un changement de sens de l'inégalité :

$(4/9)^n < 10^{-p} \Leftrightarrow n \log 4/9 < -p \Leftrightarrow n > -p / \log 4/9$ étant donné que log 4/9 est négatif.

Cette situation a été expérimentée dans des classes de Première scientifique, où les élèves ont parfaitement pris en charge ces étapes de la recherche.