

ACTIVITE ...

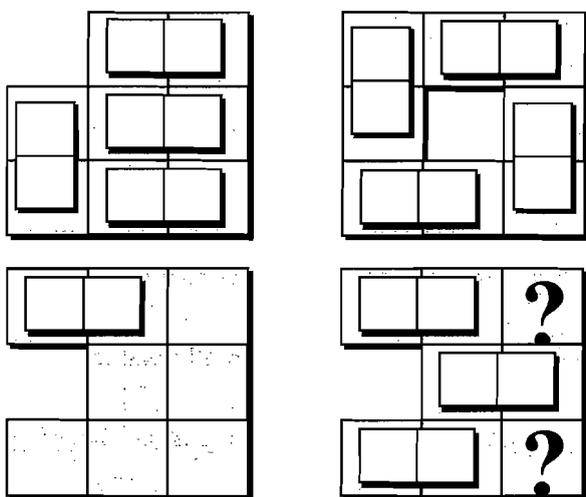
JEUX ET RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES

de l'équipe
m. ths à modeler

Fiche n° 1 Un problème de pavage : Eléments de résolution

Pavage des polyminos carrés avec un seul trou.

La recherche peut commencer par une phase d'expérimentation sur des petits cas.



Sur le carré 3x3, suivant la position du trou il est possible ou non de paver.

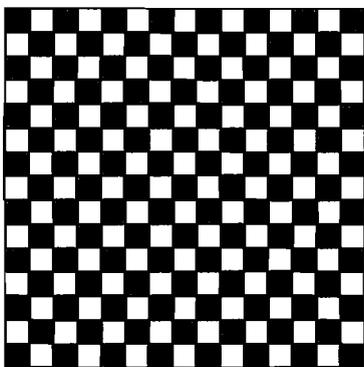
Les preuves de possibilité se font en exhibant un pavage.

Les preuves d'impossibilité se font par « forçage » : pour couvrir certaines cases on n'a pas le choix.

Le carré 5x5 se traite de façon analogue.

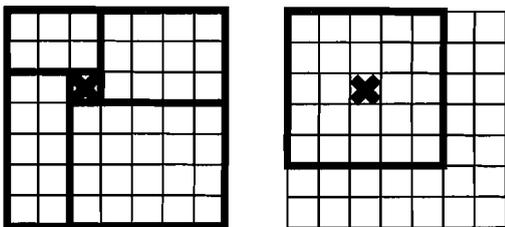
Les résultats sur ces petits cas conduisent à formuler les

conjectures suivantes (on colorie les cases comme ci-contre) :

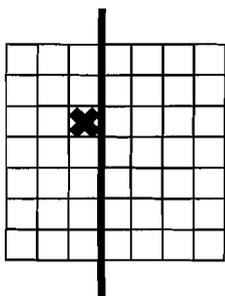


C1 «lorsqu'on enlève une case noire, il est possible de paver un carré de côté impair par des dominos»

C2 «lorsqu'on enlève une case blanche, il est impossible de paver»



La première conjecture C1 peut se démontrer en découpant en rectangles pairs (preuve par décomposition/recomposition) ou bien en une zone pavable et un carré impair plus petit avec un trou (preuve par induction).

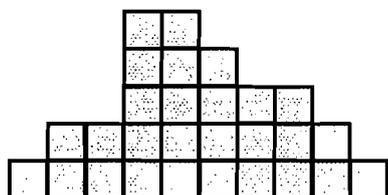


Un découpage plus simple suggère de généraliser la propriété aux rectangles : la preuve par induction devient plus simple.

Deuxième conjecture C2 : Le fait qu'un domino couvre deux cases permet de démontrer que pour qu'un polymino soit pavable il est nécessaire que son nombre de cases soit **pair**. Or

un domino ne recouvre pas deux cases quelconques, mais deux cases **voisines**, c'est-à-dire une noire et une blanche. Pour qu'un polymino soit pavable, il est donc **nécessaire** qu'il ait autant de cases noires que de cases blanches (polymino *équilibré*).

Cette condition d'*équilibre*, nécessaire et suffisante pour les rectangles pleins et les

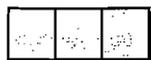


rectangles avec un trou, est-elle toujours **suffisante**? Cherchez des contre-exemples, des plus petits contre-exemples. Cherchez des conditions pour qu'un polymino équilibré soit pavable.

On vous suggère de regarder les polyminos en forme de trapèze.

Suite possible

Pavage par des triminos :



Cherchez une coloration (sans doute en trois couleurs...) qui permette de démontrer des conditions nécessaires de pavage. Regardez à nouveau les rectangles, les rectangles avec un trou.

Quelques remarques

Cette situation, issue de la recherche professionnelle, a été expérimentée à divers niveaux (du CE1 à l'Université...). Elle doit être présentée de façon « ouverte ». Laissez les élèves chercher. Repérez ce qui dans leurs idées est intéressant. Par exemple, le concept de récurrence, considéré à tort comme difficile, est souvent mis en œuvre par les élèves, dès la fin du primaire. L'idée qui fait marcher la preuve pour la condition nécessaire n'apparaît que très rarement de façon spontanée. Une manière de faire avancer la recherche est de proposer de jouer sur le polymino coloré (il a été précédemment coloré par les « bonnes » et les « mauvaises » cases).

Cette activité permet de revisiter des notions comme la conservation de l'aire, la parité. Elle met en évidence la différenciation « condition nécessaire/condition suffisante ».

N'hésitez pas à nous envoyer vos questions, réflexions, solutions..., vous pouvez nous les proposer à :

Denise.Grenier@imag.fr , Charles.Payan@imag.fr

Rubrique « jeux et raisonnements mathématiques »

Petit x

IREM de Grenoble

BP 41

38402 Saint-Martin-d'Hères