LA BILATERALITE DANS LE DISCOURS MATHEMATIQUE : UNE CONTRAINTE INSTITUTIONNELLE EN TUNISIE

Mahdi ABDELJAOUAD
Université de Tunis

Résumé : Le texte mathématique, transcription d'une langue hybride mélangeant la langue naturelle et une langue symbolique, continue à faire l'objet de recherches en didactiques des mathématiques. Une situation originale se présente lorsque la langue naturelle est la langue arabe et la langue symbolique est celle en usage chez tous les mathématiciens; dans cette situation le sens de lecture et d'écriture n'est plus unique: Dans une même phrase mathématique vont cohabiter des occurrences lues de droite à gauche (pour le texte arabe) et des occurrences lues de gauche à droite (pour les formules et autres équations) . Nous avons appelé cette cohabitation des deux sens opposés de lecture et d'écriture : la bilatéralité en mathématiques.

Depuis un an, nous avons entrepris, avec quelques étudiants en didactiques des mathématiques, d'explorer la bilatéralité d'une part dans les situations de l'histoire des mathématiques arabes, et d'autre part dans les classes de transition (du Primaire au Collège). Nous proposons dans cette communication de présenter la méthodologie suivie pour isoler la bilatéralité en tant que contrainte institutionnelle et d'étudier ses effets éventuels sur l'apprentissage des mathématiques.

Introduction

A partir de 1988, la Commission Nationale des Mathématiques de Tunisie, chargée de réformer l'enseignement des mathématiques, a du organiser le cursus de manière à tenir compte de trois contraintes imposées par les autorités de tutelle:

1. La suppression de l'examen de sixième. Cela n'effaçait pas la distinction géographique entre l'école primaire et le collège, ni la différence dans la formation des instituteurs (à Bac+2, dans des ISFM) et celle des professeurs (à Bac+4, en facultés), ni enfin les spécificités des pratiques pédagogiques de chacun de ces cycles de la scolarité obligatoire. Ce qui serait nouveau, c'est la quasi-automaticité du passage de 6^{e} en 7^{e} année de l'école obligatoire et comme conséquence la décrispation de l'apprentissage des mathématiques.
2. L'introduction, pour la première fois depuis l'Indépendance de la Tunisie (en 1956) de l'enseignement en langue arabe des sciences et des mathématiques, l'élève ayant, désormais, à apprendre en langue arabe les mathématiques, non

seulement pendant les six années de l'école primaire, mais aussi pendant les trois années de collège, c'est-à-dire tout au long des neuf années de l'école de base. Ce n'est qu'en entrant au Lycée qu'il apprend en langue française les mathématiques.

3. Les symboles mathématiques utilisés, tant dans les collèges que dans les lycées seront en français.

Décidés à faire enseigner les mathématiques en langue arabe, les responsables d'Algérie, du Maroc et de Tunisie ont choisi des voies différentes pour atteindre cet objectif. En Algérie, le choix s'est porté sur l'arabisation intégrale de la langue d'enseignement des mathématiques, de l'école de base jusqu'à la Terminale, l'écriture symbolique spécifique se lisant de droite à gauche[1]. Au Maroc, la langue d'enseignement est bien l'arabe, mais les symboles sont internationaux, dès la première année primaire, et se lisent de gauche à droite. Enfin en Tunisie, la langue d'enseignement des mathématiques est en arabe jusqu'à la neuvième année de l'école de base, puis en français jusqu'à la Terminale. L'écriture symbolique est spécifique au Primaire, la lecture étant de droite à gauche puis elle devient française, avec lecture de gauche à droite à partir de le 7$^{\text{ème}}$ année.

Le tableau suivant résume la situation dans nos trois pays :

		Algérie	**Maroc**	**Tunisie**
Langue d'enseignement des maths	Ecole primaire	Arabe	Arabe	Arabe
	Collège	Arabe	Arabe	Arabe
	Lycée	Arabe	Arabe	Français
Ecriture symbolique	Ecole primaire	Droite à gauche	Gauche à droite	Droite à gauche
	Collège	Droite à gauche	Gauche à droite	Gauche à droite
	Lycée	Droite à gauche	Gauche à droite	Gauche à droite

Au cours des quinze dernières années aucune évaluation indépendante de cette réforme de l'enseignement des mathématiques n'a été publiée. Dans l'exposé cité plus haut, Abdelkader Khalladi[2] attirait l'attention sur certaines incohérences provoquées par l'utilisation de symboles spécifiques à une culture donnée où la lecture se fait de droite à gauche. Il signalait l'exemple de la représentation de la droite réelle dans les manuels de l'enseignement secondaire algérien, qui à ce titre est exemplaire :

"La droite est orientée de gauche à droite, alors que les intervalles sont représentés avec une orientation implicite de droite à gauche, car les lettres utilisées pour en définir les extrémités sont des lettres de l'alphabet arabe, la plus petite valeur étant à droite et la plus grande à gauche."

L'auteur plaidait en filigrane en faveur de l'utilisation de "la symbolique internationale" dans tout l'enseignement secondaire (collèges et lycées).

La création, en 1998 d'une école doctorale de didactique des mathématiques au sein de l'université de Tunis, soutenue par l'université française, a initié une réflexion

[1] Depuis octore 2003, une réforme a été engagée en Algérie. Elle vise à réintroduire l'utilisation des symboles internationaux dans l'enseignement des mathématiques.

[2] Abdelkader Khalladi, *Symbolisme mathématique dans un environnement linguistique non latino-graphique, ni écrit de droite à gauche*", EM2000, Grenoble 15-17 juillet 2000.

méthodique et approfondie sur les conditions de l'enseignement des mathématiques. Une attention particulière s'est portée sur les situations de transition : Primaire/Collège, Collège/Lycée et Lycée/Université, sources reconnues d'importantes ruptures et a fait l'objet de mémoires de DEA, puis de thèses.

Eux-mêmes enseignants en exercice dans les établissements scolaires, nos étudiants nous rapportant un malaise diffus particulier, tant en première année de collège qu'en première année de lycée, dont une part de responsabilité semblait liée aux langues des mathématiques utilisées dans ces classes. Nous nous sommes alors engagés dans un programme de longue halène d'études des problèmes langagiers en mathématiques[3]: qu'est-ce qui est commun à tous les systèmes scolaires dans le monde et qu'est-ce qui est spécifique à notre propre situation?

De nombreux chercheurs, en particulier des didacticiens des mathématiques, se sont penchés sur la langue mathématique, langue hybride[4] par excellence, composée par la langue naturelle et la langue symbolique. Intéressé aux phénomènes de latéralité, c'est-à-dire le sens de la lecture des textes ou des symboles, nous avons exploré leurs recherches et adopté partiellement leur démarche. Les recherches à caractère ethno-mathématique, sur l'apprentissage des mathématiques par les enfants d'immigrés aux USA ou en Australie, abordant les situations de triglossie (langue d'origine + langue anglaise + langue mathématique) semblaient intéressantes, mais ne répondaient pas à notre questionnement. Par contre, les recherches sur le statut du signe "=", dont l'emploi dissymétrique en situations didactiques est bien corroboré, nous paraissaient beaucoup plus pertinentes, particulièrement en ce qui concerne la transition Primaire/Collège, et susceptibles d'être naturellement intégrées dans notre réflexion théorique.

A l'issue de nombreuses explorations, il nous est apparu que la manière d'enseigner les mathématiques dans les collèges tunisiens (ainsi que dans le système scolaire marocain) contenait une variable qui n'avait pas été étudiée auparavant : **<u>la bilatéralité</u>, c'est-à-dire la lecture dans une même phrase, de certaines séquences de droite à gauche, et d'autres de gauche à droite.** Le lecteur doit ainsi changer, dans une même phrase, plusieurs fois la direction de lecture, l'exemple suivant tiré d'un manuel tunisien en est une illustration :

مساحة المربع EFGH تساوي $49m^2$

⟶ | ⟵ | ⟶ | ⟵

(la surface du carré EFGH est égale à $49m^2$)

Les recherches didactiques, que nous évoquions, attestent que les problèmes de latéralité n'existent pas seulement dans les situations faisant intervenir une langue écrite de droite à gauche et des symboles écrits de gauche à droite, mais partout où langue naturelle et langue symbolique sont mélangées.

[3] Voir par l'exemple les travaux de Imed Ben Kilani, comme par exemple : "La congruence des énoncés universels entre les registres sémiotiques de la langue arabe, la langue française et le langage logico-mathématique", in Actes de EMF 2003, Tozeur (décembre 2003).

[4] Colette Laborde dans *La langue naturelle et l'écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse de doctorat, 1982), étudie cette langue "hybride" dont la syntaxe n'est ni celle de la langue naturelle, ni celle de la langue symbolique.

Cela implique que toute analyse de l'enseignement des mathématiques - du point de vue de la bilatéralité[5] - doit s'insérer dans un cadre théorique qui permettrait de caractériser cette contrainte institutionnelle, donc de l'isoler afin d'en étudier les effets dans les situations didactiques.

Nos recherches personnelles en histoire des mathématiques arabes nous ont amené à poser une première question : *comment les Anciens, confrontés à la traduction et à l'adaptation des œuvres mathématiques étrangères, ont abordé les problèmes de bilatéralité?* Nous montrerons que les Arabes anciens ont tentés d'annuler les effets pervers possibles de la bilatéralité en donnant des solutions appropriées aux types de symboles utilisés.

Notre deuxième question concerne la part prise par les problèmes de bilatéralité dans les difficultés rencontrées par nos élèves dans l'apprentissage des mathématiques, particulièrement lorsque l'usage de l'écriture symbolique devient nécessaire. Cette question fait partie de notre projet de recherche commencé cette année. Nous n'avons pas encore de réponses définitives et nous nous contenterons d'essayer de caractériser les composantes de la situation où cette variable didactique semble jouer un rôle important, ce qui permettra de tenter de définir le cadre théorique de notre étude, d'énoncer une hypothèse concernant le degré d'importance de la bilatéralité en tant que contrainte institutionnelle et d'imaginer pour un prochain travail un dispositif expérimental pour vérifier la validité de cette hypothèse.

Notre communication se fera donc en trois parties :

1. La bilatéralité chez les premiers mathématiciens arabes.
2. La bilatéralité dans les premières semaines du Collège.
3. Caractérisation de la bilatéralité en tant que contrainte institutionnelle.

I. La bilatéralité chez les premiers mathématiciens arabes

Avant d'exposer les solutions trouvées aux problèmes de latéralité par les mathématiciens arabes anciens, commençons par établir une classification des symboles pour pouvoir étudier l'articulation des écritures symboliques dans la langue naturelle.

I.1 Classification des symboles

De nombreux chercheurs ont proposé des classifications des symboles mathématiques. Nous retiendrons une synthèse des nomenclatures proposées par Ahmed Djebbar[6] et par Michel Serfati[7] :

---

[5] Le terme "bilatéralité" nous a été suggéré par une note n°21 page 96 de l'article de Bosch et Chevallard sur *la sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs*, RDM, n°19, 1999. (pp77-124). Les auteurs signalent les difficultés rencontrées par les professeurs lorsqu'on leur proposait d'effectuer une division "à l'anglaise" où le diviseur et le quotient s'écrivent à gauche, le changement de latéralité entraînant une perturbation du gestuel.

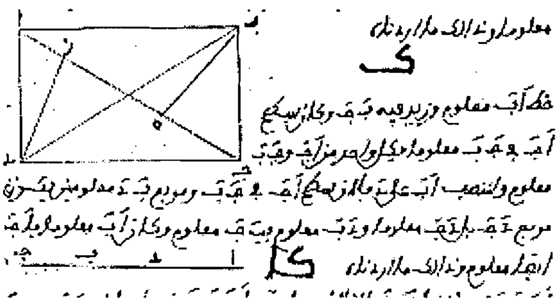
[6] Ahmed Djebbar, (1990), *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe s.); Thèse de doctorat, Nantes.*

[7] Michel Serfati, (1997), *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, thèse de doctorat, Université Paris I.

- Les symboles de désignation : Pour désigner un objet mathématique appelé à être utilisé plusieurs fois dans le texte, on lui assigne une ou plusieurs lettres de l'alphabet courante, a , b , c, D, M, N , P , … , α , β , γ, ... En général, les objets de même nature sont dits homologues et représentés dans la même alphabet, mais par des lettres qui se suivent. C'est ainsi qu'Euclide représentait déjà, dans les *Eléments*, les sommets d'un polygone : il écrivait "*le triangle* $\overline{AB\Gamma}$, *le segment* $\overline{AB}$ *partagé en deux par le point* $\overline{\Delta}$ " ou "*le carré* $\overline{A\Gamma}$."pour un carré dont les sommets successifs sont $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Delta}$. Les premiers traducteurs arabes d'Euclide, tel *al-Hajjāj ibn Yūssef ibn Matr*, (début du IX^{ème} siècle) utilisèrent naturellement l'alphabet arabe à la place de l'alphabet grecque :

"المثلث بأ جـ" و "خط أب قسم قسمين على نقطة د" و "المربع أ جـ"

Pour différencier une lettre de l'alphabet de la langue naturelle d'une lettre utilisée comme notation numérique ou symbole de désignation, les Arabes, eux aussi, la surlignaient dans le texte, comme le montre l'exemple suivant extrait de *Tahrir kitāb al-mafrūdhat* de Thābit ibn Qurra (826-900) :



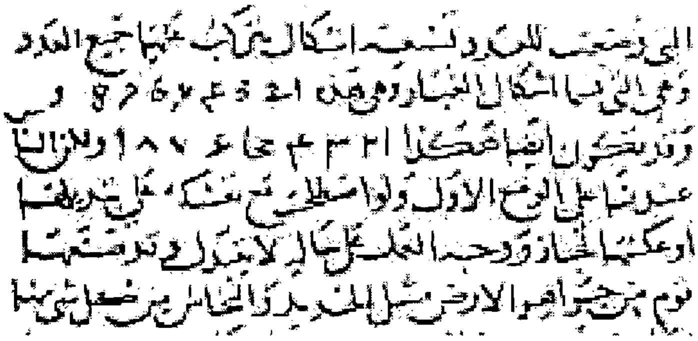
Aujourd'hui, les points successifs d'une droite orientée (même implicitement) ou les sommets d'un polygone sont notés par des lettres majuscules A, B, C, ...; les droites d'un plan, les faces d'un solide, ou des objets géométriques de même nature par des lettres minuscules entre parenthèses (a), (b), (c), ...; les coefficients successifs d'une équation sont représentés depuis Descartes, par des lettres minuscules du début de l'alphabet a, b, c, ... et les inconnues par les lettres minuscules de la fin de l'alphabet, x, y, z, ...).

Les symboles de désignation ne posent pas en principe de problème de latéralité, ils s'intègrent naturellement dans le texte écrit au fil de la ligne. Signalons, qu'en fait, il n'y a pas d'attitude dogmatique à ce sujet puisque Thābit ibn Qurra conserve le sens d'orientation des figures grecques dans la première figure ci-dessus désignant le rectangle et choisit le sens contraire, plus conforme au sens de l'écriture arabe, pour représenter la droite dans le deuxième exemple ci-dessus.

- Les symboles abréviatifs : Le symbole est constitué de l'abréviation d'un mot dans une langue donnée. Il peut représenter un concept mathématique, une opération, un processus ou une instruction.

C'est en général l'initiale du terme utilisé en langue courante, comme شـ pour شيء (la chose[8], c'est-à-dire l'inconnue), comme مـ pour مال (le carré de l'inconnue), m pour le mètre, **N** pour l'ensemble des nombres entiers positifs, $\overline{p}$ pour "più" (symbole de l'addition ainsi notée au Moyen-Age), f pour fonction, d pour la dérivée .... Les symboles abréviatifs sont éphémères car liés à la langue dont ils sont issus. Leur lecture se fait dans le même sens que celui du texte rhétorique où ils s'insèrent. Ils permettent le plus souvent d'éviter les répétitions d'un même mot. Ces symboles fortement connotés culturellement ne se retrouvent que très rarement utilisés par la communauté mathématique internationale. Lorsqu'il apparaît dans une aire culturelle autre que son aire d'origine, il peut être à l'origine d'un problème de latéralité comme nous le verrons par la suite.

- <u>Les symboles conventionnels</u> : Ce sont les symboles utilisés par convention entre des mathématiciens d'une époque donnée[9]. Par exemple, les arithméticiens arabes d'Orient du XII^{ème} siècle ont convenu d'utiliser les chiffres *hindi* d'origine indienne que l'on écrivait sur le *Takht* ou planche à poussière, alors que leurs contemporains andalous et maghrébins ont convenu d'utiliser les chiffres *ghubār,* qui sont de la même origine indienne, mais dont le graphisme est différent. C'est ce que nous explique Ibn al-Yāsamīn (m. 1204) dans son *Kitāb Talqih al-afkār fil 'a^{c}mal bi rushūm al-ghubār* :



(folio 8)

Aujourd'hui, les mathématiciens utilisent, soit par convention, soit par tacite acceptation, les mêmes symboles d'origine indienne. Ce sont les chiffres *ghubār* (dits chiffres arabes) dont l'emploi s'est généralisé en raison de leur efficacité et à la diffusion en Europe des textes arithmétiques imprimés à partir du XVI^{ème} siècle. En général, pour pouvoir s'imposer universellement, le symbole conventionnel doit s'éloigner des alphabets courantes, avoir un graphisme spécifique et avoir été proposé par un mathématicien dont la renommée a transcendé son aire culturelle (on sait par exemple que Leibniz a inventé un grand nombre de symboles qui continuent à être utilisés en calcul intégral et différentiel).

Les symboles arithmétiques ou algébriques suivants : +, -, x, :, $\cap$, $\int$, $\sqrt{}$, $\neq$, $\equiv$, $\leq$, $\sum$, $\prod$ sont devenus universels et leur emploi s'est codifié. Noter que dans une même aire culturelle, des conventions de notation peuvent différer même pour des concepts

---

[8] Il s'agit ici des symboles algébriques en usage au Maghreb, à partir du XIII^{ème} siècle. On y trouve و, جـ, ل, كـ, مـ, ش, في, على, من, لا, إلى . (cf. Mahdi Abdeljaouad, *Le manuscrit de Jerba : Une pratique des symboles alébriques mahrébins en pleine maturité,* in Actes du 7ème Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, Marrakech, 2002.)

[9] L'ouvrage le plus exhaustif sur l'histoire des symboles est "*A History of Mathematical Notations*, publié en 1928 par Florian Cajori et réédité en livre de poche par Dover en 1993.

aussi élémentaires que les nombres décimaux : le nombre 1.539 se lit aux USA : *un et cinq cents trente-neuf millièmes*, alors qu'en France, il se lit : *Mille cinq cents trente-neuf.*

- Les symboles d'illustration accompagnent le texte (écrit en langue naturelle) mais ne lui sont pas indispensables. Dans les manuscrits arabes du XV$^{\text{ème}}$ siècle, de telles représentations sont introduites par l'expression "*Wa sūratuhu hākadha*" (son image se présente ainsi). Ce sont en fait des traductions symboliques du texte rhétorique. Le scribe "ouvre une fenêtre" pour laisser la place à l'écriture symbolique, comme le montre l'exemple suivant extrait d'un ouvrage d'al-Qalasādi (mort en 1486) :

- Les symboles de substitution sont indispensables pour la lecture du texte. Dans l'*Arithmetica* de Diophante, les nombres sont représentés par des lettres de l'alphabet grecque surlignés et l'inconnue (*arithmos*) est carrément remplacée par le symbole ς, alors que son carré (*dynamos*) est remplacé par le signe Δ^{Y}. Le symbole ici se substitue au mot comme, par exemple, dans la phrase

$$\Delta^{Y}\bar{\chi}\bar{\lambda} \quad ς \quad \bar{o}\bar{\lambda} \quad \iota\sigma \quad \dot{M}\bar{\delta}.$$

qui n'est qu'une écriture condensée de l'équation $640x^2 + 73x = 4$.

Ce type de symboles se prête à la traduction aussi facilement que les symboles de désignation. Le traducteur arabe de Diophante, Qusta ibn Luqa (870 - 912), a traduit ces symboles sous une forme complètement rhétorique.

Les chiffres arabes d'origine indienne peuvent jouer le rôle de symboles de substitution pour les nombres entiers (*al-hisāb al-hindi*); pourtant il est très rare de trouver dans les arithmétiques arabes anciennes des nombres écrits en chiffres *hindi* ou *ghubār* se substituant à leur équivalent verbal.

I.2 La bilatéralité chez les mathématiciens arabes

Les mathématiciens anciens ont été confrontés à ce problème chaque fois qu'ils ont eu à intégrer dans leurs travaux des apports étrangers. Montrons quelques solutions trouvées par les mathématiciens arabes en présence des mathématiques grecques et indiennes.

Nous avons vu plus haut que les géomètres arabes, traduisant des traités grecs, remplaçaient les lettres de l'alphabet grecque par son équivalent arabe pour désigner les objets mathématiques, de même Qusta ibn Luqa, considérant que les symboles utilisés par Diophante n'étaient que des abréviations, les a remplacé par les mots qu'ils représentaient. Dans ces deux cas, il n'y pas eu de problème de latéralité.

Rappelons que l'écriture et la lecture en langue arabe des nombres entiers se faisait en commençant par les unités, suivies des dizaines, puis des centaines, etc. C'est ce qu'affirme Abu'l Wafā (940-998) dans son traité de *hisāb al-hawā*, c'est-à-dire l'arithmétique "aérienne" basée sur la mémoire. Cette arithmétique, en usage chez les scribes et les marchands, allait être concurrencée par le *hisāb al-hind*, l'arithmétique décimale d'origine indienne. Abu'l Wafā compare la manière d'écrire les nombres entiers chez les Arabes et chez les Perses. Chez ces derniers, contrairement aux arabes, on commence par l'ordre le plus élevé pour terminer par les unités[10].

Pour lire le nombre 544.013.736 (écrit en notation moderne), à la manière perse, on dira *"cinq cents mille mille et quarante mille mille et quatre mille mille et dix mille et trois mille et sept cents et trente et six"*. En revanche en langue arabe ancienne, on dira "*six et trente et sept cents et trois mille et dix mille et quatre mille mille et quarante mille mille et cinq cents mille mille*".

La tradition arabe s'est perpétuée jusqu'à nos jours pour la lecture des nombres entre 11 et 99, puisque l'on commence toujours par l'unité suivie des dizaines. En revanche, au delà de cent, on commence par les ordres supérieurs; ce qui entraîne une difficulté de lecture des nombres entiers due essentiellement à un problème de latéralité : 23 , 93 et 123 seront énoncés[11] : "trois et vingt" , "sept et quatre-vingt dix" et "cent et trois et vingt".

Le problème de latéralité s'est posé aux mathématiciens arabes adoptant la numération décimale de position indienne et son arithmétique. Deux solutions ont été proposées :

La première, celle d'al-Uqlidisi (vers 950) en est un témoignage éloquent[12] :

"It is said : why is it written from right to left? Why not from right to left as in Rumi? We say : Every letter starts from the right; so all start from the right. (...) Rumi (writing) starts from the left, and so Rumi letters (strat) from the left too. If Hindi letters are started from the left, that would become difficult and slower. The way is easier, and in this kind (of arithmetic) we seek easiness of working and speed."(Traduction de Saydan, page 187)

Al-Uqlidisi a donc conservé le graphisme d'origine indienne, mais a inversé la manière de lire les nombres pour l'aligner sur la manière arabe de le faire. Alors que les Indiens lisent leurs nombres en commençant par la position supérieure, donc de la gauche vers la droite, *Ahl al-hisab al-hindi* préfèrent commencer par les unités. Pour eux 165 se lit "*cinq et soixante et cent*". C'est ainsi que procède al-Qalasadi, comme nous le voyons dans l'exemple cité plus haut où 182628 est lu à partir du 8.

La deuxième solution, adoptée par d'autres arithméticiens arabes, suit littéralement les Indiens, la lecture des nombres se faisant de gauche à droite à l'exception des deux derniers chiffres qui sont inversés :

10

" مثل ما هو موجود في الألفاظ الفارسية، فإنهم لا يتقدمون الآحاد على العشرات ، و لا العدد القليل على الكثير، كتقديم ذلك في اللغة العربية"

11

"ثلاثة و عشرين " ؛ " سبعة و تسعين " ؛ " مائة و ثلاثة و عشرين "

12 A.S. Saydan in *The Arithmetic of al-Uqlidisi*, Reidel, Dordecht/Boston, 1978.

فإن قيل لم إبتدأ فوضع من اليمين إلى الشمال؟

وهلا بدئ من ناحية الشمال إلى اليمين على ما يكتب بالرومي؟

قيل له : لما كان إبتداء كل حرف إنما هو من ناحية اليمين بدئ به من ناحية اليمين ... و لو بدئ بحروف الهند من الشمال ، كان فيه ثقل و إبطاء ، و هو بهذا أخف إذ في النوع نطلب خفة العمل و سرعته "(الفصول في الحساب الهندي ، تحقيق أحمد سعيدان.صفحة 246)

- Kushyar ibn Labban al-Jili (971-1024), énonce 5625 ainsi : "*cinq mille et six cents et cinq et vingt* ";
- de même, pour lire 44370, ibn al-Yāsamīn (mort en 1204), cité plus haut, commence par "*quarante mille et quatre mille et trois cents et soixante et dix*".

En général, les symboles d'illustration sont adoptés tels qu'ils ont été conçus à l'origine, car ce sont les témoins d'une technique importée reconnue comme facilitant un calcul, compactant un raisonnement ou accélérant la résolution d'une famille de problèmes. En adoptant les chiffres *ghubar*, les mathématiciens arabes ont commencé par conserver l'ordre de lecture et de manipulation d'origine, puis ils ont imaginé de nouvelles techniques qui maximisent cet outil en particulier pour la multiplication et la division des entiers.

Les astronomes arabes ont, quant à eux, adopté pour leurs calculs le système sexagésimal complet : la représentation des entiers naturels et des nombres fractionnaires et l'approximation des irrationnels positifs se font en base 60. Ce système utilise des combinaisons de lettres de l'alphabet arabe pour désigner les nombres de 1 à 59, ainsi que le mot "sifr" pour désigner le zéro (médial et terminal). Dans ce système, un nombre sera noté

$$a_{-2}\ a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2$$

où les a_i sont des entiers inférieurs ou égaux à 59. On remarquera que les exposants sont croissants de droite à gauche et que la partie fractionnaire (notée en rouge) est à la gauche de la partie entière.

$$a_{-2}\ a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2 = \frac{a_{-2}}{(60)^2} + \frac{a_{-1}}{60} + a_0 + 60\ a_1 + (60)^2\ a_2$$

$\longleftarrow$

puissances négatives 0 puissances positives

Exemple : Le nombre suivant يه و صفر نا و آحاد يد كو

équivaut au nombre sexagésimal :

$$15x(60)^{-4} + 6x(60)^{-3} + 0x(60)^{-2} + 51x(60)^{-1} + 14 + 26x60$$

Cette numération s'est rapidement adaptée à la numération indienne : A partir du IX$^{\text{ème}}$ siècle, les entiers sont représentés en une numération de position à base 10 (donc en arithmétique indienne), mais pour les parties fractionnaires, les minutes, les secondes et les tierces restent utilisées. C'est ce que l'on appelle *la numération mixte :* La partie entière du nombre est à droite, la partie fractionnaire à gauche.

Ainsi le nombre précédent s'écrit dans cette notation :

1574 نا صفر و يه

c'est-à-dire l'expression :

$$15x(60)^{-4} + 6x(60)^{-3} + 0x(60)^{-2} + 51x(60)^{-1} + 1574$$

lue à partir de la droite,

Dans *Miftah al-hisab* (La ché de l'arithmétique), Jamshid al-Kāshi (mort en 1429), imagine, à partir du système sexagésimal complet, le système décimal de position que nous utilisons aujourd'hui pour représenter les nombres décimaux.

"Nous avons pris pour dénominateur de la fraction de la circonférence 10 000 répété 5 fois. Il s'agit là d'un nombre abstrait : tout se passe comme si on avait divisé l'unité en dix parties égales, chacune de ces parties en dix, et ainsi de suite indéfiniment ; nous avons nommé les premières parties dixièmes, les suivantes dixièmes du 2^e ordre, puis du 3 ^e ordre et ainsi de suite. Les ordres des nombres entiers et les ordres des différentes parties présentent entre eux un rapport constant comme dans le calcul des astronomes. Nous avons dénommé ces parties fractions décimales. Nous devons inscrire les dixièmes ou unités du 1^e ordre <u>à droite</u> des unités (entières), celles du 2 ^e ordre <u>à droite</u> des premières, celle du 3^e ordre <u>à droite</u> de celles du 2^e, et ainsi de suite. <u>La partie entière et la partie décimale forment une seule ligne</u>." (*Miftah al-hisāb*)

Remarquons bien la manière dont al-Kāshi résout le problème de latéralité. Il renverse la tradition des astronomes qui consistait à écrire la partie fractionnaire à gauche de la partie entière et découvre que l'on peut se débarrasser des dénominateurs et écrire le nombre sur une seule ligne, les puissances étant décroissantes de gauche à droite.

$$\longrightarrow$$

puissances positives 0 puissances négatives

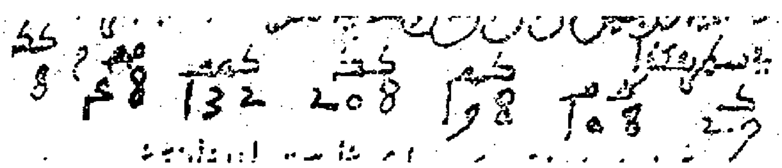
En algèbre, les Arabes d'Orient n'ont pas utilisé de symboles; seul, as-Samaw'al (1130-1174), désigne les polynômes comme étant *les expressions aux images connues* . En fait, les images connues dont il parle sont les coefficients des polynômes, il les écrit en numération décimale arabe d'Orient et les représente dans un tableau. Tous les algorithmes de l'arithmétique indienne peuvent, par analogie, être généralisés aux polynômes. Il énonce, par exemple, le polynôme $3x^3 + 2x^2 - 7x + 14$: « Trois *Ka^cb* plus deux *Māl*, moins sept *Shay*, quatorze *Dirham* et trente-sept parties de *Māl* » puis il le représente ainsi :

Ka^cb	*Māl*	*Shay*	*Dirham*	Partie de *Shay*	Partie de *Māl*
3	2	-7	14	0	37

La première ligne du tableau contient la désignation des puissances de l'inconnue ou de son inverse (*al-Marātib*). La deuxième ligne contient les « images connues » des nombres, c'est-à-dire les coefficients écrits en chiffres *hindi*. On remarquera, que comme pour la représentation en écriture décimale des nombres entiers, les puissances de l'inconnue sont décroissantes de la gauche vers la droite, la colonne des *dirham* correspondant à la puissance zéro pour la constante du polynôme, suivie des puissances négatives.

Lorsque les algébristes maghrébins inventent leur écriture symbolique et qu'ils sont amenés à représenter les polynômes, ils s'adaptent eux aussi à l'écriture décimale de position, l'écriture et la lecture des puissances étant décroissantes de la gauche vers la droite comme le montre l'exemple suivant extrait d'un traité d'al-Qatrawani (XV^{e}) où le polynôme

$8x^9 + 48x^8 + 132x^7 + 208x^6 + 198x^5 + 108x^4 + 27x^3$ est ainsi représenté :



Signalons que le concept d'égalité et le signe qui lui est associé par les maghrébins sont présentés comme symétriques, ainsi, après avoir posé l'équation 6 2 3 ⌋ 3 4 5 , Ibn Qunfudh[13] ajoute: "*la place qui précède ou suit ce signe n'a pas d'importance. Si tu dis* ... 3 4 5⌋ 6 2 3 , *cela revient exactement à la première [image].*"

Les exemples que nous venons de présenter montrent que les mathématiciens arabes ont évité tout dogmatisme et tout choix fermé lorsqu'ils ont eu à utiliser des symboles "importés". La simplicité des symboles retenus, la souplesse des algorithmes choisis et leur aptitude à aider à résoudre les problèmes de la manière la plus efficace possible ont été leurs seuls critères de choix.

II. La bilatéralité dans les premières semaines du collège

Plus de 95% des élèves de la 6^{e} année primaire entrent en 1^{e} année de collège. Ce passage du cycle primaire au cycle collégial engendre des ruptures dues aux changements qui interviennent dans les conditions de travail, la formation des maîtres, la caractérisation des disciplines enseignées et les contrats didactiques. Nous ne développerons pas l'analyse de ces modifications dont les effets sur les élèves sont bien connus; ce qui nous intéresse ici, ce sont les nouvelles règles du jeu linguistique imposées à l'élève tunisien entrant au collège. En effet, pour eux, cette période est "*critique pour l'apprentissage des usages spécifiques du langage en mathématiques pour au moins deux raisons :*

- *les processus d'acquisition du langage se prolongent dans cette période où les élèves sont loin d'avoir acquis une complète maîtrise de leur langue maternelle.*

- *C'est à partir du début de l'enseignement secondaire que les mathématiques enseignées font appel à des usages spécifiques du langage, les mathématiques de*

[13] Voir le traité d'Ibn Qunfudh (mort en 1407) édité par Y. Guergour dans son Magistère de l'ENS d'Alger. (page 167)

l'école primaire, proches de l'action, ne nécessitant que peu de formalisation." (C. Laborde[14] , page 121)

Postulant que les élèves ne peuvent "apprendre par la seule osmose à comprendre et manier de manière adéquate le discours en vigueur en mathématique", Colette Laborde insiste sur la nécessité de mettre en place le plus tôt possible un apprentissage des usages particuliers du langage en mathématiques.

Aux difficultés signalées ci-dessus par Colette Laborde, il faut ajouter, celles spécifiques à la bilatéralité qui intervient en 1e année du collège tunisien. Nous allons donc décrire les caractéristiques de cette nouvelle situation didactique et la comparer à celle que les élèves ont quitté quelques mois plus tôt. Nous étudierons la langue des mathématiques en 6e année et en 7e année et le manuel d'enseignement de 7e année.

II.1 La langue des mathématiques en 6e année et en 7e année

Le passage de 6e année en 7e année fait intervenir – en Tunisie – un changement radical de l'une des composantes de la langue mathématique : l'emploi des symboles. Nous allons énumérer ce qui ne change pas et ce qui change :

a) Ce qui ne change pas :

- La langue naturelle en usage à l'écrit et à l'oral en mathématique est la langue arabe que ce soit au primaire ou au collège, la lecture, pendant les neuf années de l'école obligatoire, se fait donc de droite à gauche.
- Les chiffres arabes sont les mêmes.
- Les signes opératoires "+" , "-" , "x" , ":" , ainsi que le trait de fraction sont les mêmes dans les deux cycles. Viennent s'y ajouter au collège ceux de la puissance et de la racine carrée.
- L'usage des parenthèses et autres crochets est le même.
- Les unités de mesure des grandeurs métriques appartiennent au registre lexical arabe par translitération et sont conformes à la nomenclature internationale. Le mètre se lit *mitr* (متر), l'hectolitre: *hictūlitr* (هكتولتر) et le kilogramme : *kilūghrām* (كيلوغرام).
- Les unités de mesure du temps ou des angles appartiennent à un registre lexical arabe inchangé depuis plus de mille années. Leurs représentants symboliques sont les mêmes au primaire et au collège.
- On utilise dans les deux cycles les mêmes exercices à trous ou à cases carrées à remplir par un nombre manquant.
- Les tableaux de valeurs numériques sont identiques dans les deux cycles, la colonne de droite contenant une liste ordonnée de haut en bas et les colonnes se succédant de droite à gauche.
- Les diagrammes statistiques ont la même allure dans les deux cycles et se lisent de droite à gauche.

[14] Colette Laborde, Occore apprendere e leggere e scrivere in matematica?, in *La Matematica e la sua didattica,* n°2, avril 1995, 121-135.

b) <u>Ce qui change</u> :

- Les symboles de désignation et les étiquettes: constitués en 6^{e} à partir de l'alphabet arabe et en 7^{e} de l'alphabet française. En fait, le répertoire des symboles ne contient plus les lettres alphabétiques arabes, bien que ce ne soit pas dit explicitement.
- La lecture des expressions symboliques, qui se faisait en 6^{e} de droite à gauche, doit se faire en 7^{e} de gauche à droite. Cela affecte en particulier la lecture des formules, des relations et des égalités.
- Les règles syntaxiques régissant l'emploi des signes opératoires "+" , "-" , "x" , ":" introduisent la lecture de gauche à droite.

	6ème année de base	**7ème année de base**
Soustraction	848 = 377 - 1225	1225 - 377 = 848
Multiplication	99 = (54 - 63) x 11	11 x (63 - 54) = 99
Division	168 = 10 : 1680	1680 : 10 = 168
Egalité	إذا علمت أن أ + ب = ج	إذا علمت أن a + b = c

- Les abréviations associées aux unités de mesure des grandeurs métriques appartiennent à deux répertoires différents, le premier utilisant l'alphabet arabe alors que le second utilise l'alphabet française. De plus le sens de la lecture change.

	6ème année de base	**7ème année de base**
Litre	ل 10	10 l
Mètre	م 78	78 m
Kilogramme	كغ 123	123 kg
Centimètre carré	صم² 12	12 cm²
La mesure d'une surface en mètres carrés	قيس المساحة بالم² 2880	قيس المساحة بالمتر المربع 2880

Nous constatons qu'en 6ème, les signes représentant les unités de mesure - essentiellement celles du système métrique - sont des abréviations des termes les désignant et souvent l'initiale de leur translittération arabe. Ils sont utilisés en tant que symboles de substitution et s'intègrent naturellement dans le texte rhétorique sans introduire un problème de bilatéralité.

- Les symboles pour les unités de mesure du temps ou des angles sont placés
  * à gauche du nombre en 6^{e} année : (°15 قيسها [ون ، وه] زاوية)
  * à droite du nombre en 7^{e} année : (15° قيسها [ON , OH] زاوية).

- Les exercices à trous se lisent de manières différentes en 6^{e} et en 7^{e}.
  * de droite à gauche en 6^{e} année : (0,16 = ... : 16 أتمم الكتابة بالعدد المناسب)
  * de gauche à droite en 7^{e} année: (16 : .... = 0,16 أتمم الكتابة بالعدد المناسب)

- Les figures géométriques sont orientées dans le sens des aiguilles d'une montre en 6^e et ont des étiquettes arabes, alors qu'en 7^e elles sont orientées en sens contraire avec des étiquettes françaises.

Les symboles de désignation en géométrie

6ème année de base	7ème année de base
نعتبر الرسم التالي س ج أ ب ص	نعتبر الرسم التالي x C A B y
قطع المستقيم [ب ج]	قطع المستقيم [B C]
المثلث (أ ب ج)	المثلث (ABC)
الزاوية [ب ج , ب د]	الزاوية [BC , BD]
الدائرة (د)	الدائرة (C)
النقطة "أ" . المستقيم (د)	النقطة A المستقيم (d)

II.2 Le manuel d'enseignement de 7^e année.

Le programme officiel de la 7^e année fait figurer parmi les objectifs du calcul sur les nombres entiers naturels la compétence nouvelle qui consiste à lire les formules de gauche à droite. Comment cet objectif explicite s'est traduit dans le manuel scolaire[15] de 7^e année, qui est l'une des plus importantes sources d'information sur les attentes de l'institution tant en terme de connaissances que de méthodes ? Nous avons jugé utile d'analyser minutieusement le premier chapitre de ce manuel pour essayer de connaître la manière dont ses auteurs ont abordé la bilatéralité.

Il faut d'abord noter qu'aucune allusion n'est faite dans la préface du manuel aux nouvelles règles régissant l'emploi des symboles; il est simplement indiqué que l'introduction de toute définition nouvelle ou de tout symbole nouveau se fera dans un encadré dont le fond sera colorée en vert. Les règles du jeu ont changé : désormais formules, relations et égalités sont écrites à partir de symboles issus du répertoire alphabétique français et lues de gauche à droite. Il semblerait que, pour l'institution, la bilatéralité des textes mathématiques est une simple transcription d'un code dans un autre, qu'elle ne constitue pas un problème didactique majeur et qu'en conséquence la charge d'expliquer cette nouvelle pratique est laissée à l'enseignant, qui, lui-même peut se décharger largement sur l'"intelligence" de l'enfant.

Ce constat est corroboré par une lecture plus pointilleuse des six premières pages de la première leçon consacrée à l'associativité et à la commutativité de l'addition (pages 10 à 16) qui contiennent tous les types d'écritures symboliques évoquées plus haut. Les connaissances dont il est fait appel sont supposées faire partie de la mémoire de l'élève: il suffit de deux exercices, le premier modélisant une situation de jeu de flèches pour illustrer l'associativité de l'addition et l'autre demandant à reconstituer des énoncés de problèmes en utilisant des sommes de nombres, pour pouvoir énoncer la propriété recherchée. Ces deux exercices de conversion et de conversion inverse de registres ostensifs ne poseraient pas de problèmes fondamentaux s'il n'y avait cette perturbation

[15] En Tunisie, pour chaque année d'étude, les élèves n'ont à leur disposition qu'un seul manuel scolaire lauréat d'un concours national et dont le contenu et la présentation a été agréé par une commission nationale d'évaluation. Nous avons analysé le manuel de 7^e année publié en septembre 2002.

causée par la nouvelle latéralité de l'écriture des formes. En effet, regardons l'énoncé[16] de l'exercice n°2 :

اكتب نصا لوضعية توافق المجوع المقدم في كل حالة، ثم احسب هذه المجاميع

(513 + 19) + (28 + 11) +17 + 12 ; (18 + 79) + (21 + 12) ; (2 + 51) + 98

Nous remarquons d'abord que cette liste de sommes est implicitement ordonnée de droite à gauche, selon le principe qu'il faut commencer par les situations les moins complexes. Mais comme l'addition est commutative, la latéralité ne joue pas ici un rôle essentiel, l'élève pourra réussir cet exercice en mobilisant - sans ruptures - ses connaissances antérieures. Un enseignant averti pourrait profiter de cet exercice ambigu pour entraîner les élèves aux nouvelles règles de latéralité.

Dans la page suivante, la situation devient plus complexe, l'intention explicite des auteurs étant d'introduire pour la première fois l'énoncé du théorème algébrique : "$a + c = b \Rightarrow a = b - c$" et l'utilisation des formules littérales.

La présentation commence par un exercice de modélisation d'un problème de la vie quotidienne (exercice n°3 : comparer les compteurs kilométriques d'une voiture au départ et à l'arrivée d'une course), suivi d'un exercice à trou (exercice[17] n°4):

انقل ما يلي ثم عوض كل مربع بالعدد المناسب

38 +   = 101 ;   + 17 = 3017 ;   - 16 = 19

Qu'attend-on de l'élève? Qu'il commence la lecture de droite à gauche comme dans l'exercice n°2? Mais il rencontrera alors immédiatement le piège: l'égalité - 16 = 19 ne veut rien dire puisque 16 est plus petit que 19. Nous sommes bien en présence d'une connaissance bien établie dans le Primaire, mais qui ne fonctionne plus. L'arbitraire de la situation didactique est patent. L'intervention du professeur résoudra momentanément la difficulté.

Ces deux exercices sont immédiatement suivis par l'énoncé[18], écrit dans un encadré, du théorème cité plus haut :

إذا كان a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية

حيث b أكبر من c ، فإن

a = b - c يعني a + c = b

Les deux premières lignes de l'encadré sont certes surprenantes en raison du mélange de répertoires orthographiques et à l'utilisation des lettres françaises comme variables (penser à la prononciation peu naturelle de cette phrase), mais la syntaxe

---

16 Traduction : "Pour chacune des sommes suivantes, écris l'énoncé d'une situation qui lui soit compatible, puis calcule cette somme".

17 " Recopie ce qui suit, puis remplace chaque carré par l'entier adéquat".

18 " Si a , b et c sont trois nombres entiers naturels, tels que b est plus grand que c , alors a = b - c veut dire a + c = b."

globale de la phrase reste cohérente : il s'agit bien d'énumérer trois lettres, la première venant à droite de la seconde, etc. La bilatéralité est illustrée par la troisième ligne dans toute sa complexité et avec ses ambiguïtés sémantiques :

$a + c = b$ يعني $a = b - c$

a) Le terme " يعني " (veut dire) ne peut pas être considéré comme une relation symétrique, le sens de lecture de la troisième ligne est donc bien de droite à gauche. Cette phrase est constituée de trois ostensifs : deux égalités séparées par un mot. Les élèves n'ont pas la même perception de ces deux égalités et ne considérent aucune d'entre elles comme symétriques.

b) Pour les élèves, l'appréhension immédiate de chacune de ces égalités, qui expriment l'annonce d'un résultat, est à l'opposée de celle attendue par les auteurs du manuel.

c) De plus, comme le signale Vergnaud[19] : ce théorème à l'allure simple en apparence *"représente la synthèse de plusieurs théorèmes-en-actes arithmétiques différents"* dans lesquels les significations des signes "-" , "+" et "=" sont multiples. Il ajoute "*Qui oserait prétendre que cette synthèse peut être faite aisément par les élèves si elle ne fait pas l'objet d'aucune attention didactique?"*. (page 197)

<u>Les étiquettes en géométrie</u>

Un autre théorème sur les nombres est introduit à la suite d'un exercice (n°7) de modélisation d'un problème de coloration d'une figure géométrique. Il s'agit de calculer de deux manières différentes l'aire de la figure colorée en jaune. Cette figure est désignée par des lettres majuscules de l'alphabet française. Cela donne[20]

ABCD المستطيل . EFGD المربع

Notons que, là aussi, plusieurs règles du jeu ont subitement changé, par rapport au connu de l'élève :

- L'étiquetage en lettres majuscules françaises au lieu des lettres arabes.
- La lecture de l'étiquette se fait de gauche à droite, bien que l'étiquette elle-même se note à gauche de l'objet géométrique.
- La figure est orientée dans le sens des aiguilles de la montre.

Aucune justification ni avertissement ne précèdent ce changement de codes. Une fois de plus, pour l'institution, la bilatéralité semble quelque chose de banal que l'élève doit pouvoir facilement prendre en charge lui-même.

---

[19] Gérard Vergnaud, Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, pp.189-99.

[20] " le carré EFGD ; le rectangle ABCD."

<u>Les symboles pour les unités métriques</u>

Dans l'exercice n°7 signalé ci-dessus, l'aire du carré EFGD mesure 49 m^2. C'est bien cette écriture française qui est utilisée pour la première fois dans le manuel, sans aucun tableau de correspondance mettant face à face les symboles (arabes) adoptés pendant toute la scolarité primaire et ceux (en français) du collège. La substitution de la lettre "m" à la lettre "م" semble suffisamment banale pour ne pas être signalée. Par contre, un encadré vert est réservé à l'introduction du symbole "a" supposé représenter 1 are et à l'égalité "$1a = 100m^2$ ".

De plus, la présence de la bilatéralité dans cette simple phrase géométrique ne fait l'objet d'aucun commentaire de la part des auteurs du manuel :

مساحة المربع EFGD تساوي $49m^2$

III. La bilatéralité comme contrainte institutionnelle

Nous voulons nous intéresser à l'organisation locale intervenant dans la pratique du texte mathématique pendant les premières semaines du collège en Tunisie. Pour cela, nous analyserons la situation en considérant successivement chacune de ses composantes :

III.1 L'approche linguistique

Le texte mathématique est composé de phrases de la langue naturelle dans laquelle viennent s'insérer des termes ou des propositions de la langue symbolique. La phrase de base est appelée <u>phrase matrice</u> par Colette Laborde, car c'est en elle que viennent s'enchâsser des chaînes d'ostensifs écrits appartenant à différents répertoires:

- répertoire de la langue naturelle,
- répertoire de l'alphabet de la langue naturelle,
- répertoire des alphabets de langues étrangères,
- répertoire des chiffres arabo-indiens,
- répertoire des symboles de désignation,
- répertoire des étiquettes géométriques,
- répertoire des signes opératoires,
- répertoire des signes pour les relations,
- répertoire des séparateurs,
- répertoire des formules diverses, plus ou moins complexes.

Tous ces répertoires sont régis par leurs propres règles de fonctionnement qui doivent être compatibles avec la syntaxe de la phrase matrice. Ainsi chaque phrase mathématique doit posséder une cohérence globale de telle manière que chaque objet ostensif qui y intervient puisse être soumis, quels que soient ses propres règles de fonctionnement, à des règles générales implicites du texte mathématique. Le sens de lecture de la phrase est un exemple de caractéristique générale d'un texte, qui devrait être commun à toutes les phrases de ce texte. Lorsque le fonctionnement d'un ostensif requiert une latéralité opposée à celle de la phrase matrice ou carrément la bilatéralité, comme c'est souvent le cas pour les expressions symboliques contenant le signe "=", conçues comme étant symétriques mais perçues par les élèves comme annonçant un résultat, l'insertion de cet ostensif peut devenir problématique. C.Laborde montre qu'il existe divers modes d'insertion de l'écriture symbolique dans la langue naturelle, certaines se faisant sans déformation de la syntaxe de la phrase matrice et certaines avec déformation. En s'appuyant sur les travaux de linguistique de Dubois et Dubois (1970), elle précise, que pour certaines insertions avec déformation,

"le processus d'insertion ne fonctionne pas, [lorsque] la proposition à insérer relève d'un autre langage, de règles syntaxiques différentes." (page 57)

Cette position catégorique devrait fermer la porte à toute tentative d'analyse du fonctionnement effectif du processus d'insertion de symboles appartenant aux répertoires français dans des phrases matrices de la langue mathématique arabe. Nous pensons que, bien que la composante linguistique ne doit pas être négligée, elle doit être replacée dans une problématique de comparaison de registres sémiotiques, telle que l'envisage Duval.

III.2 Les registres ostensifs des classes de 6^e^ année et de 7^e^ année

Nous appelons <u>registre ostensif de la classe</u> tous les ostensifs écrits intervenant dans les textes mathématiques d'une classe donnée ainsi que les règles régissant le fonctionnement de ces ostensifs dans leur répertoire et des relations existant entre eux. Nous serons particulièrement préoccupé par la phrase mathématique considérée comme chaîne d'ostensifs appartenant au registre d'une classe donnée. Dans la situation que nous sommes en train d'étudier, la comparaison au sens de Duval des registres ostensifs de la classe de 6^eA et de celle de 7^eA aidera à déterminer la nature de la transition Primaire/Collège et permettra de mieux évaluer les ressemblances, préciser les articulations et éventuellement focaliser notre attention sur les ruptures afin d'imaginer les remédiations possibles.

Rappelons d'abord les caractéristiques générales des deux registres:

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Registre ostensif de la classe de 6^e Année</th><th>Registre ostensif de la classe de 7^e Année</th></tr>
<tr><td colspan="2">Langue naturelle</td><td colspan="2">Langue arabe</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Ecriture symbolique</td><td>chiffres</td><td colspan="2">Chiffres arabes</td></tr>
<tr><td>étiquettes</td><td>arabes</td><td>françaises</td></tr>
<tr><td>Signes opératoires</td><td colspan="2">identiques</td></tr>
<tr><td>Signes pour les relations</td><td colspan="2">identiques</td></tr>
<tr><td>Séparateurs</td><td colspan="2">identiques</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formule mathématique</td><td>Lecture de droite à gauche</td><td>Lecture de gauche à droite</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phrase mathématique</td><td>Lecture de droite à gauche</td><td>Lecture bilatérale</td></tr>
</table>

Congruence/non congruence des registres

Pour Duval, deux registres sémiotiques sont congruents lorsque trois critères sont vérifiés :

a) Correspondance sémantique entre les unités signifiantes qui les constituent.
b) Même ordre d'appréhension de ces unités dans les deux registres.
c) Correspondance biunivoque entre les unités des deux registres.

Duval précise qu'une non congruence peut être plus ou moins forte. Lorsqu'il y a congruence, un simple traitement suffit pour passer d'un registre à l'autre; inversement plus la non congruence est importante, plus le cloisonnement entre les deux registres devient persistant et difficile à éliminer.

De ce point de vue, les registres ostensifs des classes de fin d'études du Primaire en Tunisie et en France sont congruents, le degré de congruence ne dépend que de certaines spécificités des deux langues naturelles utilisées en Tunisie. En ne tenant compte que de ces critères de comparaison, nous pourrions déclarer que les registres ostensifs des classes de 6^{e}A et de 7^{e}A sont congruents, l'analyse précédente des premières pages du manuel de 7^{e}A confortant cette conclusion.

Il nous semble, cependant, qu'aucun de ces trois critères ne tient compte de la composante linguistique, signalée plus haut. Par exemple, dans toute situation où l'usage de symboles de désignation est requis, on sait que le choix du répertoire de ces symboles est totalement arbitraire; pourtant, il n'est pas indifférent de choisir, le répertoire des étiquettes dans l'alphabet arabe lorsque la langue naturelle est l'arabe, ou dans l'alphabet français lorsque la langue naturelle est le français. Souvenons-nous des difficultés de nos élèves dès qu'il s'agit d'utiliser les lettres de l'alphabet grec.

De même, bien qu'en principe arbitraire, le choix des étiquettes lors de l'énumération d'objets ostensifs ne nous semble pas régis par ces trois critères: la suite des lettres est supposée appartenir à la même alphabet et se suivre dans cet alphabet. C'est ce principe qui nous amène à choisir - depuis Descartes - les coefficients parmi les premières lettres de l'alphabet et les variables parmi les dernières.

Enfin, la bilatéralité ne peut pas être décrite à partir des critères précédents de congruence, puisqu'il y a bien correspondance biunivoque et sémantique entre les différentes unités signifiantes et que ces unités se présentent dans le même ordre. Ce qui n'est pas, d'après nous, couvert par ces critères, c'est le degré de cohérence globale de la phrase mathématique: homogénéité de sa structure et conformité aux usages locaux tant du point de vue lexical, syntaxique que culturel. Nous appellerons ce critère : le critère de cohérence globale.

III.3 Le critère de cohérence globale

Ce critère permet d'apprécier si un ostensif de la chaîne d'ostensifs constituant la phrase mathématique est compatible du point de vue lexical, syntaxique et culturel avec les autres ostensifs. La même composante d'un registre ostensif peut être évaluée à l'aune de ce quatrième critère de congruence de manière différente selon les situations où elle est sollicitée. Ainsi, la bilatéralité dans la lecture des nombres supérieurs à 100 est devenue une composante culturelle en Tunisie (ou dans les pays germaniques), sa présence dans les textes mathématiques est cohérente avec la langue naturelle. Il devrait en être de même pour la bilatéralité des textes mathématiques en classe de 7eA au Maroc puisqu'elle fait partie de la pratique mathématique du Primaire. Par contre, en Tunisie, la bilatéralité du texte mathématique de 7eA est un exemple d'incompatibilité syntaxique que ce quatrième critère sanctionnera.

Les considérations qui précèdent mettent en évidence au moins deux caractéristiques (répertoires alphabétiques des ostensifs insérés dans la phrase matrice et bilatéralité) des registres ostensifs de 6e A et de 7e A qui entraînent leur non congruence. Mais alors quel est le degré de cette non congruence? La réponse à cette question nous importe car elle détermine la nature de l'intervention didactique nécessaire pour éliminer le cloisonnement entre ces deux registres et préciser le niveau technique et technologique des tâches de conversion nécessaires, car "*la conversion des représentations sémiotiques constitue l'activité cognitive la moins spontanée et la plus difficile à acquérir chez la grande majorité des élèves*" (Duval, p.44)

Pour mieux évaluer le degré de non congruence de ces deux registres, nous proposons de mieux préciser le statut mathématique des ostensifs activés.

Le statut mathématique des ostensifs

Si l'on suit Bosch et Chevallard[21], les ostensifs appartenant au registre écrit - en particulier les notations, les symbolismes et certaines expressions verbales - acquièrent un statut mathématique clair et jouent le rôle d'instruments de l'activité mathématique; "*ils sont considérés et traités comme les éléments du savoir mathématique, et non de simples connaissances.*" (page 105). Dans une situation stable comme celle de la 6e A, les ostensifs qui y sont activés ont donc ce statut, leurs valences instrumentales et sémiotiques étant maximales. Par contre, pendant les premières semaines de 7e A, les nouveaux ostensifs ont des valences instrumentales et sémiotiques presque nulles; là où les anciens ostensifs étaient naturalisés et fonctionnaient, en principe, avec efficacité, ils sont remplacés par des ostensifs nouveaux qui n'évoquent rien si ce n'est leur appartenance à un répertoire étranger et peu familier ou qui surprennent par leurs règles de gestion. Ces ostensifs nouveaux sont supposés s'intégrer dans des praxéologies inchangées au niveau des tâches et des techniques. Or, nous disent les auteurs : "*même des petites modifications ostensives, peuvent entraîner de lourds changements au niveau technologique, lorsqu'il faut décrire, organiser, justifier les productions ostensives et non ostensives obtenues.*" (p. 144)

Le changement de registre ostensif de la classe n'est dont pas spontané et nécessite la mise en place d'une praxéologie spécifique pour les tâches de conversion où le discours de justification doit jouer un rôle important pour aider l'enfant à abandonner l'ancien registre et à le remplacer par le nouveau. Paradoxalement, ce discours à caractère disciplinaire (universalité des symboles mathématiques), institutionnel (ces symboles sont utilisés au secondaire et à l'université) et économique (mondialisation) n'a pas d'écho dans le monde culturel local, les journaux et les publications en langue arabe

[21] M. Bosch et Y. Chevallard, (1999), La sensibilité de l'activité mathématiques aux ostensifs, *RDM,* vol. 19, n°1, pp.77-124.

du pays utilisant le registre ostensif du primaire. De plus, cet argumentaire ne peut pas remettre en cause des insuffisances de l'ancien registre, son manque de productivité ou son inadaptation. Tous ces facteurs inhérents au milieu accentuent d'autant le caractère autoritaire, arbitraire et déstabilisateur du changement de registres et augmente ainsi leur degré de non congruence.

III.4 Le rapport de l'élève aux registres ostensifs des classes de 6e année et de 7e année

Pendant toute sa scolarité au Primaire, l'emploi des lettres - toujours prises dans l'alphabet arabe - se fait naturellement pour étiqueter des objets géométriques, pour désigner un point sur une droite ou dans un plan. Lorsqu'il y a énumération d'objets de même nature, l'alphabet arabe se prête aisément aux étiquetages. Bien qu'implicites, les règles de ce jeu sont cohérentes avec l'ensemble de ce qui est écrit et ne contreviennent pas à la syntaxe générale de la langue. Nous avons constaté que l'entrée en 7e année est l'occasion d'une révolution : l'élève reçoit une injonction brutale de changer de registres ostensifs, non accompagnée d'aucun discours justificatif. Il n'est pas placé dans une phase d'institutionnalisation des nouvelles connaissances qui sont supposées remplacer - par décret - une partie du savoir mathématique bien ancré dans la pratique de l'élève, fonctionnant avec succès dans un cadre stable, équilibré et globalement cohérent et permettant de résoudre un grand nombre de problèmes. Ce savoir ancien, devenu obsolète, ne peut plus être évoqué institutionnellement, il n'appartient plus qu'à la sphère privée de l'élève.

La non congruence des registres ostensifs des deux classes de 6e A et de 7e A, la perte de toute possibilité d'appréhension immédiate des nouveaux ostensifs et l'opposition des valeurs instrumentales et sémiotiques des ostensifs appartenant aux deux registres introduisent dans la situation didactique de l'élève des modifications qui augmentent l'effet des ruptures inhérentes au passage du Primaire au Collège, modifications en termes de mémoire didactique de l'élève et de temps institutionnel réservé à l'activité mathématique.

L'appréhension immédiate

Dans un autre contexte, Duval[22] a montré le rôle de différentes appréhensions dans l'activité cognitive de l'élève. Nous nous proposons d'examiner le niveau d'accessibilité des objets ostensifs selon qu'ils appartiennent à l'un ou l'autre des registres des classes de 6e A ou de 7e A.

Rappelons que l'appréhension immédiate est la possibilité d'ancrer instantanément un objet ostensif, que l'on vient de percevoir, à un non ostensif, sans passer par aucune médiation externe. Là où la situation fait intervenir une chaîne d'ostensifs cohérents entre eux, comme c'est le cas en 6e A, l'appréhension est immédiate et l'ancrage dans le domaine d'étude et d'investigation n'est pas ralenti. Par contre, dans les premières semaines de 7e A, il n'y a plus d'appréhension immédiate des ostensifs, mais la nécessité d'une activité consciente de l'enfant pour convertir les ostensifs perçus en ostensifs anciens qui eux permettent l'ancrage dans le domaine d'étude. Nous conjecturons que l'enfant persiste pendant une longue période à effectuer tous ses traitements dans le

[22] R. Duval, (1998), Questions relatives à l'analyse de la connaissance, *Ann. Did. Sc. Cognitives*, 6, pp.165-196, IREM de Strasbourg.

registre ancien, convertissant au fur et à mesure les résultats partiels de son travail dans le nouveau registre. Ce ralentissement dans le contrôle référentiel de l'activité en cours introduit un facteur d'incertitude exogène qui perturbe la réussite de l'activité et augmente le degré de non congruence des deux registres.

Mémoire didactique de l'élève

Nous avons dit que le registre ostensif de la classe de 7e A doit être considéré comme une connaissance nouvelle qui doit remplacer un savoir ancien. Ce savoir ancien fait partie de la mémoire didactique de la classe et l'intègre – nous dit Matheron[23] – dans la mémoire pratique de l'élève.

"*Le jeu avec des ostensifs induit simultanément un jeu de mémoire pratique et un jeu avec des souvenirs qui ne peuvent se dire dans le cours même de la pratique, alors qu'ils peuvent expliquer et justifier les formes mêmes d'accomplissement de cette pratique. Les conditions institutionnelles de résurgence des souvenirs permettent le travail technologique de justification et de légitimation des pratiques (ce que l'on recherche lorsque l'on fait appel au sens de l'activité qui se mène) mais ils ne sont pas d'ordinaire, directement accessibles dans le temps institutionnel de la pratique.*" (page 234)

Nous voyons apparaître ici deux composantes de la situation nouvelle dans laquelle est placé l'élève : sa mémoire pratique dont l'efficacité est réduite et qu'il faut restructurer pour en augmenter le rendement et le temps institutionnel de la pratique qui est une variable commandée par l'institution et qui peut varier pour aider la classe à retrouver les souvenirs des discours technologiques nécessaires à la réussite des tâches anciennes sollicitées.

III.5 Le rapport du professeur aux registres ostensifs de 6eA et de 7eA.

Le professeur de collège a été formé à l'université, il a donc pratiqué en français des mathématiques simples, mais aussi très spécialisées. La symbolique mathématique française lui est familière depuis au moins une dizaine d'année. Enseignant le plus souvent quelques classes de collège et quelques classes de lycée, il est confronté à deux langues d'enseignement : l'arabe au collège, et le français au lycée, mais toutes les écritures symboliques utilisées dans ces deux cycles ont mêmes registres et mêmes répertoires. Nous pouvons sans hésiter prédire que l'essentiel du registre de la classe de 7eA fait partie de la mémoire pratique du professeur et que la bilatéralité - tout en l'agaçant - ne constitue pas un obstacle majeur pour son activité mathématique.

Lorsqu'il enseigne en 7e année, la source principale d'informations sur les connaissances antérieures des élèves est celle qu'il découvre à travers ses contacts quotidiens avec eux. Il se constitue ainsi un système d'informations explicatives qui se stabilise (s'il ne se fige) au fur et à mesure que son ancienneté dans la classe dure. 84% des professeurs interrogés par Nabil Khédiri[24] ont déclaré qu'ils n'avaient pas connaissance des programmes du Primaire, contenus et méthodes, et que les

---

[23] Yves Matheron, (2001), Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *RDM*, vol. 21, n°3, pp. 207-246.
[24] Nabil Khédiri, *Représentations des enseignants de mathématiques de la 7e année de base sur les compétences antérieures des élèves*, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Tunis, Mars 2003.

compétences acquises au Primaire par les élèves ne leur sont pas nécessaires pour la construction des nouveaux concepts mathématiques. Un professeur a déclaré :

"Lorsque nous commençons à travailler avec les élèves de 7e année, nous considérons qu'ils sont arrivés la tête vide et qu'ils ne savent rien; mais nous découvrons, petit à petit, qu'ils veulent communiquer des informations qui semblent différentes de celles que nous voulons leur faire apprendre ... ".

Le décalage entre la mémoire du professeur et celle de la classe a été expérimentée par J.Centeno et rapportée par Matheron : "*Des maîtres différents se succèdent dans l'enseignement d'un thème, sans avoir la connaissance de ce qui a été enseigné auparavant. Ce dispositif prive donc le maître de la possibilité de recourir, pour enseigner, à l'utilisation d'une mémoire partagée avec la classe.*" (p. 217)

Le manuel officiel de la classe de 7e reste pour le professeur l'outil de référence majeur pour la construction de ses leçons. Alors que la rupture entre la 6e et la 7e nous a semblé complète : toute l'écriture symbolique, déjà connue et dominée au Primaire, devant être renversée, par un effet de miroir, l'enfant, ne pouvant plus utiliser ni son intuition, ni des automatismes acquis pour comprendre l'expression symbolique, nous conjecturons que pour le professeur il ne s'agit que d'une simple situation de traduction syntaxique élémentaire - *l'élève n'a qu'à commencer à lire à partir de la gauche.*

Cela montre un décalage profond entre la mémoire de l'institution scolaire et du professeur d'une part et celle de l'élève d'autre part. Leurs rapports aux registres ostensifs anciens et nouveaux ne sont pas identiques. Les premiers, considérant qu'il y a une forte congruence entre les deux registres, ne voient pas la nécessité de consacrer un temps institutionnel au passage d'un registre à l'autre et ne donnent pas d'importance à la phase d'institutionnalisation du nouveau registre. D'ailleurs, le contrat didactique n'est pas modifié, puisque le professeur se contente d'un enseignement par ostension : il signale à l'occasion les nouveaux ostensifs et les nouvelles règles d'usage et les utilise lui-même avec aisance dans toutes les occasions, l'élève devant spontanément les adopter.

IV. Conclusions provisoires et perspectives

Lorsque nous avons commencé ce travail, nous avons découvert la bilatéralité comme une contrainte institutionnelle.

L'étude épistémologique et historique des pratiques des mathématiciens arabes anciens a permis de montrer que la bilatéralité pouvait être adaptée à un système sémiotique, puis adoptée et naturalisée dans ce système.

La description détaillée de la bilatéralité qui apparaît en Tunisie dans la classe de 7e A, nous a amené à nous interroger sur la manière dont elle perçue par les auteurs du manuel officiel de mathématiques.

L'approche linguistique du problème de la bilatéralité nous a amené à la replacer dans un contexte plus large, celui de la compatibilité des ostensifs insérés dans la phrase matrice, alors que la comparaison des deux registres ostensifs des classes de 6e et de 7e a montré la nécessité d'un nouveau critère de comparaison, que nous avons appelé le critère de cohérence globale, susceptible de resituer chacun des registres dans le contexte de la classe. Nous avons enfin considéré les élèves et le professeur de 7e face à ces deux registres, leur perception de la non congruence des deux registres étant complètement différente.

Cette analyse nous a amené à énoncer l'hypothèse suivante :

Hypothèse : La non congruence des registres ostensifs des classes de 6e et de 7e n'est pas suffisamment prise en compte par l'institution et entraîne d'importantes difficultés pour les élèves.

Nous nous proposons dans la prochaine étape de cette étude de vérifier cette hypothèse, en allant sur le terrain : attitude réelle des enseignants en ce qui concerne le changement de registre, observation de la pratique d'institutionnalisation effective dans la classe, vérification de l'existence des difficultés d'acquisition par les élèves du nouveau registre et analyse de leurs séquelles éventuelles.

Bibliographie

BEN KILANI (2003) "La congruence des énoncés universels entre les registres sémiotiques de la langue arabe, la langue française et le langage logico-mathématique", in Actes de EMF 2003, Tozeur.

BOSCH M. et CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématiques aux ostensifs, *RDM,* vol. 19, n°1, pp.77-124.

DJEBBAR A. (1990), *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe s.);* Thèse de doctorat, Nantes.

CAJORI F. *A History of Mathematical Notations*, publié en 1928 et réédité en livre de poche par Dover en 1993.

DUVAL R. (1998) Questions relatives à l'analyse de la connaissance, *Ann. Did. Sc. Cognitives*, 6, pp.165-196, IREM de Strasbourg.

KHALLADI A. (2000) *Symbolisme mathématique dans un environnement linguistique non latino-graphique, ni écrit de droite à gauche*", EM2000, Grenoble.

KHEDIRI N. (2003) *Représentations des enseignants de mathématiques de la 7e année de base sur les compétences antérieures des élèves,* Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Tunis.

LABORDE C. (1995) Occore apprendere e leggere e scrivere in matematica?, in *La Matematica e la sua didattica,* n°2, avril 1995, 121-135.

MATHERON Y. (2001) Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, *RDM*, vol. 21, n°3, pp. 207-246.

SERFATI M. (1997) *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, thèse de doctorat, Université Paris 1.

VERGNAUD G. (1988) Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique,* pp.189-99.