FORMATION

REFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE POUR LA FORMATION DES MAITRES [1]

Catherine HOUDEMENT et Alain KUZNIAK
IUFM de Haute-Normandie, IREM de Rouen

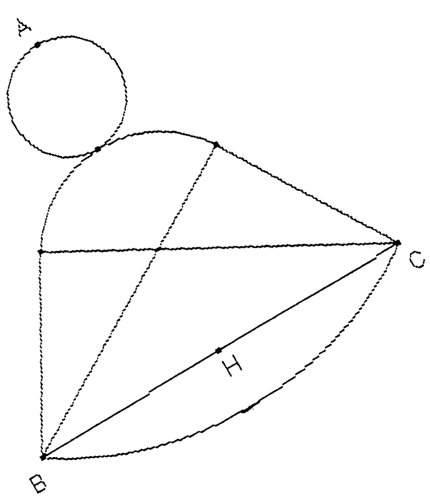
Le propos de cet article est de réfléchir sur l'enseignement de la géométrie élémentaire et ceci à deux niveaux. Le premier prend en compte la formation des maîtres qui nous semble essentielle dans le développement d'une conception cohérente de l'enseignement de la géométrie. Le deuxième niveau qui fera l'objet d'un article ultérieur, s'intéresse plus particulièrement à la géométrie de l'école élémentaire.

I UN EXEMPLE INTRODUCTIF : LA CLOCHE DE ROUEN

Enoncé

La cloche

On souhaite agrandir la figure ci-dessous (ABHC) en (A'B'H'C') telle que A'H' mesure le double de AB.



1- Effectuez cet agrandissement à la règle non graduée et au compas, en laissant apparents les traits de construction.
2- Des élèves affirment que l'aire de la figure obtenue est 4 fois plus grande que celle de la figure initiale.
Ont-ils raison ? Justifiez votre réponse.
S'ils ont tort, trouvez le rapport exact entre les deux aires.

Ce problème a été donné au concours de recrutement des Professeurs d'Ecole de Rouen en 1998. Nous l'analysons pour dégager quelques malentendus autour de la géométrie et introduire notre approche de cet enseignement à partir de champs paradigmatiques différents.

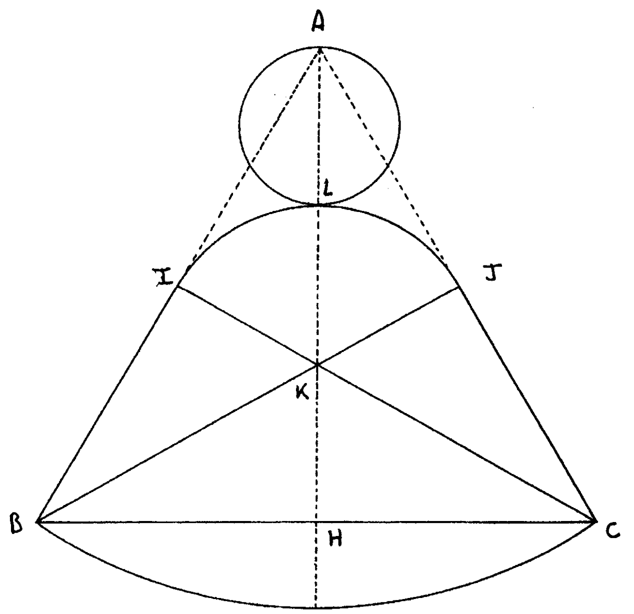
Le dessin fourni aux étudiants a été réalisé avec Cabri-Géomètre et les candidats doivent en réaliser un agrandissement à la règle non graduée et au compas.

SUR L'ANALYSE DE LA FIGURE

Le dessin demande une analyse de type perceptif qui fait appel à **l'intuition** dans son sens premier (appréhension d'un objet avec la vue). Cette intuition est mise en relation avec une première typologie des objets géométriques dépendante des connaissances de la personne qui analyse la figure.

Il faut noter qu'il n'y a dans ce sujet de concours aucune hypothèse explicitement fournie, c'est au candidat de les dégager de manière implicite sans formulation externe au fait de tracer.

Essayons d'en formuler un certain nombre. Nous désignons par I, J, K et L les points non inscrits sur la figure originale.



H_1 A est sur la droite (BI) et sur la droite (CJ).

H_2 H est le milieu de [BC].

H_3 Les angles IBC et JCB sont égaux à 60°.

H_4 Les angles BIC et CJB sont des angles droits.

H_5 L'arc IJ est un arc du cercle de centre K et de rayon KI

H_6 Le cercle de diamètre AL est tangent en L à l'arc IJ

H_7 BC est un arc de cercle de centre A et de rayon AB

SUR LA VALIDATION DES HYPOTHESES

Une fois ces hypothèses dégagées, se pose la question de leur validation, suivant le contrat usuel lié aux problèmes de construction de l'école élémentaire. Celle-ci va dépendre du matériel autorisé et des connaissances mobilisées par l'observateur. Nous pouvons distinguer deux niveaux qui vont renvoyer à des conceptions de la géométrie différentes :

Le premier relève d'un champ d'expérience lié au monde sensible avec des outils de mesurage.

Le second renvoie au monde plus abstrait des figures géométriques avec leurs propriétés mathématiques.

Dans le premier monde, celui de l'espace sensible, les outils privilégiés vont être la règle qui valide les alignements, l'équerre (avec l'angle droit et parfois des angles de 30°, 60°) qui permet de confirmer certaines assertions relatives aux mesures des angles et enfin le compas pour vérifier les affirmations sur les égalités de longueurs et les arcs de cercle. Le compas permet de constater que A n'est pas le centre de l'arc BC : en effet l'arc BC a même centre que le cercle de diamètre [AL].

Dans le monde des figures, certaines configurations apparaissent, comme le triangle équilatéral ABC. Le rôle joué par la règle non graduée et le compas est fondamental. En effet, à l'école, le nombre de figures constructibles reste limité. Dans le cas de la figure, l'indication des outils utilisés (et une appréciation de la grandeur) conduit à penser que les angles mesurent 90° et 60° et qu'il s'agit bien d'arcs de cercle.

SUR LA CONSTRUCTION DE LA FIGURE

Cette construction dépend des outils utilisés.

On peut conserver la trousse à outil qui a servi à vérifier les hypothèses d'alignement et d'écart angulaire. Dans ce cas le rôle joué par l'angle de 60° de l'équerre est fondamental. Il suffit en effet de tracer AH, puis la droite perpendiculaire en H à (AH). Enfin, par glissement de l'angle à 60° de cette équerre, on obtient le triangle équilatéral.

Si toutes les opérations se sont effectuées dans le cadre de l'observation du dessin, puis de sa validation avec des instruments qui servent ensuite à la construction, le problème est résolu dans un paradigme géométrique homogène où l'espace mis en jeu et les outils utilisés participent du monde sensible des objets matériels. Ce premier cadre où jouent le raisonnement, l'expérience et l'intuition constituera la géométrie élémentaire naturelle (géométrie I).

Mais l'énoncé demande une construction uniquement à la règle non graduée et au compas. Dans ce cas, le raisonnement sur le dessin ne suffit plus et il faut détecter des propriétés de la figure. Il faut ensuite relier ces propriétés avec des constructions standards d'objets géométriques particuliers. Suivant les constructions choisies, il peut être nécessaire d'appliquer le théorème de Thalès ou les propriétés des médianes d'un triangle équilatéral.

Cette fois, le champ paradigmatique mis en jeu change et une nouvelle géométrie apparaît qui privilégie d'autres modes de raisonnement, d'expérience et d'intuition. Il s'agit de ce que nous appellerons la géométrie élémentaire axiomatique (géométrie II).

Dans le cadre du sujet présenté, le changement de paradigme n'est pas explicite et est source de malentendu. Le sujet est donné dans la géométrie I, mais les attentes des correcteurs se situent dans la géométrie II. Il nous semble qu'il y a là une source permanente de problèmes liés à une non-explicitation du cadre géométrique dans lequel se placer.

Avant de tirer les conséquences de cette affirmation, nous allons présenter plus en détail les différentes géométries que nous distinguons et le cadre théorique qui est à la base de notre réflexion.

II UNE PROPOSITION DE CADRE CONCEPTUEL

Dans la scolarité, de la maternelle à l'enseignement supérieur, force est de constater que le mot géométrie ne recouvre pas le même type d'activités ni de raisonnement. Même les figures n'ont pas un statut identique puisqu'elles peuvent disparaître dans certaines conceptions de la géométrie. De même, le lien avec l'espace physique s'amenuise pour faire la place à une géométrie abstraite.

Il nous semble qu'une grande partie de la confusion qui règne dans l'enseignement autour de la géométrie résulte de la diversité de points de vue qui renvoient finalement à des conceptions et à des approches méthodologiques différentes. Or, dans une perspective de formation d'enseignants il est nécessaire de s'interroger : « *pourquoi faire de la géométrie ?* » et « *pourquoi faire faire de la géométrie ?* ». Cela suppose un détour épistémologique mais ce détour peut envisager de multiples chemins. Dans le cadre de notre étude qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances.

A INTUITION, EXPERIENCE ET DEDUCTION [1]

Nous utilisons ici les travaux de F. Gonseth sur la liaison entre géométrie et espace.

Ferdinand Gonseth est né en 1890 dans le Jura bernois et est mort en 1974 à Lausanne. C'est un mathématicien, contemporain de Piaget (1896-1980). Il a été professeur à l'Ecole Polytechnique de Zurich ; il a aussi formé des enseignants, ce qui a donné naissance à son ouvrage *Les fondements des mathématiques* (1926, éditions Blanchard)[2].

Gonseth intègre sa réflexion sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche est dialectique et vise à mieux comprendre l'effort qui structure la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible. Pour cela, il dégage différentes synthèses dialectiques de la

---

[1] Le sens particulier que nous attribuons à ces termes sera précisé par la suite.

[2] Autres écrits : *Les mathématiques et la réalité* (1936, éditions Blanchard*), La géométrie et le problème de l'espace* (1945-55, Editions du Griffon, Lausanne)

géométrie qui s'organisent autour de trois piliers essentiels : intuition, expérience et déduction.

Dans la perspective pédagogique qui est la nôtre, il importe justement de bien comprendre l'évolution des rapports existants entre géométrie et réalité. Concernant un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent l'intuition, l'expérience et la déduction.

Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

L'intuition

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. A moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire.

L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance de l'espace. L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, « *chaîne de raisons », détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode*.

Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

L'expérience

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.

Ainsi dans un premier cas, faire une expérience en géométrie consistera à vérifier matériellement ce que l'on avance. On montrera par exemple que la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut déjà être développée à l'école. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.

Aux moyens traditionnels d'expérimentation s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels (Cabri-géomètre[3] ou Logo[4]). Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration la plus contemporaine de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.

Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

La déduction ou *ratio*

On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle est basée sur le raisonnement logique et elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot **déduction** mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble. Il peut dans certains cas recouper l'argumentation de R.Duval[5].

Le pôle déductif et logique est usuellement associé à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de son enseignement que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions. C'est graduellement qu'il lui sera demandé d'argumenter à partir de certaines propriétés des figures qui auront été définies avec lui. Ces figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve. Nous illustrerons plus loin ce point de vue.

Articulations possibles entre intuition, expérience et déduction.

Chez Gonseth[6], l'intuition et l'expérience « *constituent le pôle empirique de la géométrie, la déduction participe du pôle théorique* ». Gonseth illustre le lien entre ces trois aspects par cette affirmation : « *être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement* ».

Ainsi des élèves réussissent à tracer un « vrai » triangle dont les dimensions sont 8, 6 et 14. Le résultat de l'expérience est invalidé par la déduction (inégalité triangulaire) qui permet de conclure à la nature « aplatie » du triangle en question (Arsac 1989)[7].

---

[3] Capponi B. et Laborde C. 1991, "Cabri Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire". *Actes de la VI école d'été de didactique des mathématiques*. Plestin les Grèves.

[4] Par exemple Mendelsohn ,1985 dans *Grand N n°35*, Grenoble.

[5] Duval R. 1992 : "Argumenter, démontrer, expliquer…". dans *Petit x n°31,* Grenoble.

[6] Gonseth F, 1945-1955, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel.

[7] Arsac G. 1989,"La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans", *Actes de la 13ème PME, Paris*

Enfin, René Thom[8] illustre la nécessaire relation entre intuition et déduction par cette métaphore très audacieuse : “ *La déduction est à l’aveugle ce que l’intuition est au paralytique, l’une avance et ne voit pas, l’autre voit mais n’avance pas* ”.

B. NOS PROPRES SYNTHESES.

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie qui réorganisent les trois composantes précédentes. Nous avons repris son idée et l’avons transformée pour l’adapter à notre propos. La synthèse que nous présentons nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

La géométrie naturelle : une confusion entre géométrie et réalité.

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s’exerce prioritairement sur des objets matériels à l’aide de la perception et de la manipulation d’instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut[9] où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où l’on ne doit pas encombrer l’esprit en démontrant des choses évidentes.

Cette idée de preuve dynamique et mécanique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie axiomatique, mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace. Elle peut par exemple résulter d’un pliage ou d’une superposition, comme la juxtaposition des trois angles d’un triangle en un angle plat.

Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est plutôt de type constructif, qui est fréquent dans la résolution de problèmes.

La géométrie axiomatique naturelle : la géométrie comme schéma de la réalité.

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects “ non rigoureux ” et les appels à l’intuition de l’espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d’un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain de nombre de questions sur cette géométrie. Quelle est la place de l'axiomatique ? Peut-on choisir n'importe quel type d'axiomes ? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise ?

Si l'axiomatisation est une formalisation, elle n’est pas nécessairement formelle, la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions de schéma et de modèle[10]. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu’elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité.

---

[8] Cité par Largeault J 1993, *Intuition et Intuitionnisme*, Vrin.

[9] Voir l’étude d’E. Barbin, 1991 “Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée”, dans la revue *Repères IREM* n°4.

[10] Gonseth parle d’horizon de la réalité

La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

La géométrie axiomatique formaliste : indépendance de la géométrie et de la réalité.

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein qui clôt le débat entre géométrie et réalité :

" *Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité..* "

Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie, Dieudonné[11] peut affirmer dans l'introduction de son traité : " *Je me suis permis de n'introduire aucune figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien.* "

Notre synthèse dialectique.

Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons, à la suite de Gonseth, une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous parait fondamental dans une perspective de formation des maîtres. La géométrie peut contenir les trois pôles (intuition, expérience, déduction) ; il y a malaise si l'un des pôles est perdu (par exemple hypertrophie du pôle déductif).

Tableau général des différentes géométries

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible et perceptive	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets.

[11] Dieudonne J, 1964, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, page 15, Hermann.

III DEUX EXEMPLES POUR ILLUSTRER NOTRE CADRE

A UN EXEMPLE DE PROPRIETE

Dès le cycle trois de l'école élémentaire, les deux premiers niveaux de géométrie (I et II) se côtoient. Prenons pour l'exemple, un extrait de manuel scolaire[12] : dans la situation dite de *Découverte*, les auteurs demandent aux élèves de construire tous les triangles possibles en juxtaposant trois pailles parmi des pailles de trois longueurs fixées (4 cm, 5,5 cm et 8 cm). Cette activité propose une expérience dans le cadre de la géométrie I. Les élèves peuvent constater que les assemblages proposés ne sont pas toujours possibles.

L'expérience permet donc de conclure à l'impossibilité d'assembler dans tous les cas un triangle à partir de trois pailles, et cela est lié aux longueurs choisies par le maître pour les pailles. Il est alors possible d'expliciter les raisons de cette impossibilité « *ça ne marche pas parce que c'est trop court, parce que les pailles ne se joignent pas* ». A condition de faire le passage des pailles aux longueurs les élèves peuvent tirer de l'expérience un début d'explication du processus de non-construction d'un triangle donné par les longueurs de trois « côtés » : « *on ne peut pas toujours construire un triangle à partir de trois longueurs fixées* ». Ils peuvent aller jusqu'à expliquer dans quels cas la construction n'est pas possible : « *si une des longueurs est supérieure à la somme des deux autres* ».

C'est la voie indiquée dans le livre du maître[13] pour terminer l'activité : *« Conclure que, pour construire un triangle, il faut que le plus grand côté soit inférieur à la somme des deux autres. »*

Cette phase correspond à un aspect déductif : elle fait passer à la généralisation du processus de construction de triangles : « *pour pouvoir construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, il est nécessaire que chacune des trois longueurs (ou la plus grande) soit inférieure à la somme des deux autres.* »

Le rôle du maître est essentiel pour passer à cette conclusion, beaucoup plus riche que la constatation de départ : il doit au minimum formuler la question qui poussera à la généralisation.

Ainsi cet exemple nous permet d'illustrer qu'à l'école élémentaire, se rencontrent expérience et déduction, souvent liées ; le maître jouant un rôle essentiel dans le passage vers la déduction.

Continuons notre analyse pour montrer un passage possible à la géométrie II.

L'activité telle qu'elle est proposée se situe dans la géométrie I. Cependant le passage de l'expérience de construction de triangles avec des pailles au processus absolu d'existence des triangles à partir de trois longueurs arbitraires donne du sens à l'axiome du plus court chemin de la géométrie axiomatique II. On pointe là, un processus **possible** de fabrication d'un axiome de la géométrie axiomatique II à partir de la géométrie naturelle : l'activité commence dans la géométrie naturelle, l'expérience fait naître un questionnement qui permet de déduire l'énoncé du plus

[12] *Nouvel Objectif Calcul CM2* , Editions Hatier 1996, page 34.
[13] page 66.

court chemin, qui ensuite existe comme point de départ dans la géométrie II sous la nouvelle forme suivante :

Si A, B et C sont trois points du plan, l'inégalité suivante AB $\leq$ AC + BC est toujours vérifiée.

Ce même dessin "triangulaire" donne une nouvelle interprétation dans la géométrie III. En effet, de l'inégalité triangulaire dérive en géométrie III une nouvelle propriété, cette fois ci liée aux vecteurs :

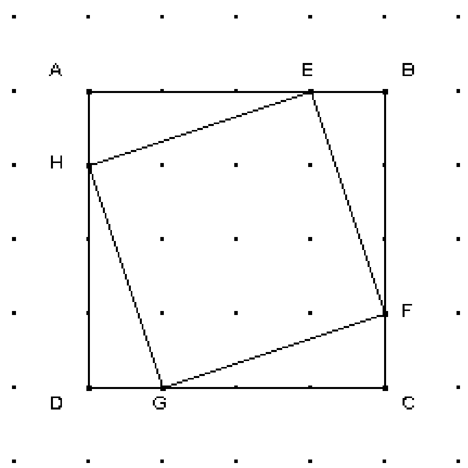
Si A, B et C sont trois points du plan, les trois vecteurs vérifient la propriété $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Ainsi apparaissent trois interprétations géométriques différentes d'un même « dessin » :

- en géométrie I, on ne voit dans la figure que le triangle (ou son absence dans un processus dynamique),
- en géométrie II, un axiome permet de valider l'existence effective du triangle que pourtant on voit,
- en géométrie III, le dessin est support d'une relation entre des objets virtuels, les vecteurs.

B UN EXEMPLE D'EXERCICE

La figure suivante, sur papier pointé de réseau carré, est proposée aux élèves. La question porte sur la nature du quadrilatère EFGH. Dans un premier temps les seules hypothèses (on verra qu'elles peuvent dépendre du type de géométrie dans laquelle on souhaite implicitement que l'élève se place) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points soient des nœuds effectifs de ce réseau.



Telles quelles les hypothèses restent floues pour un vrai « mathématicien ».

Les hypothèses à saisir sont-elles :

* hypothèses 1 : ABCD est un carré, E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA] ;

* hypothèses 2 : les hypothèses 1 et aussi l'égalité des longueurs : AE = BF = CG = DH ;

* hypothèses 3 : les hypothèses 2 et aussi AE = 3/4 AB.

Il existe des réponses relevant de chacune des géométries définies précédemment.

Dans le cadre de la géométrie naturelle (géométrie I)

Le seul dessin permet de prendre position à l'intérieur de la géométrie I. On peut tout voir et tout lire sur la figure. Le problème se construit en suivant les étapes de construction de la figure : d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature ?

La première solution (**Solution 1**), purement intuitive, indique que EFGH est un carré, ça se voit, il a les cotés égaux et ses angles sont droits.

Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan ou planche à clous d'un carré avec un élastique. La seule justification donnée alors par les enfants est purement perceptive et intuitive : on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes lorsque des enfants ne sont pas d'accord sur la conservation des longueurs.

Une solution (**Solution 2**) basée sur une expérience va passer par la vérification de l'égalité des cotés avec un compas et de leur orthogonalité grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents. Voici un exemple de dissociation étonnant chez une étudiante, Corinne, 23 ans, licence d'anglais, préparant le concours de professeur d'école.

Elle commence par constater l'égalité des longueurs des cotés EF, FG, GH et HE avec son compas. Puis elle vérifie toujours avec le compas que cette longueur est égale à BF ! (BF mesure 3,18 unités contre 3 à EF). Elle superpose ensuite (par rotation ?) EFGH avec BFIJ qui est un carré. Ici, la confiance excessive dans des instruments de mesure lui fait négliger le fait " évident " que EF est plus grand que BF. Elle nie d'ailleurs ce fait et insiste sur le fait qu'elle a vérifié avec son compas l'égalité de ces deux cotés.

La solution (**Solution 3**) qui suit lie déduction et expérience dans la géométrie naturelle : par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de montrer que la somme des angles d'un triangle valait 180° pour en déduire que HEF est un angle droit.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II)

Cette géométrie doit s'appuyer sur des hypothèses énoncées et non lues : par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu (sous-entendu ce qui n'est pas écrit ne doit pas y être lu, mais déduit).

Commençons par une solution mixte (**Solution 4**) courante chez les élèves. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que « EFGH est un carré comme losange avec un angle droit ». Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle, expérience, et la géométrie axiomatique naturelle (puisque la conclusion est fournie par une définition axiome).

Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont montrés comme connaissances d'une certaine axiomatique. Notons que ce défaut de cohérence est d'ailleurs très courant dans les productions des élèves de collège, peut-être parce que justement les cadres respectifs des géométries où l'on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.

Envisageons maintenant une solution (**Solution 5**) homogène. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration : par hypothèse AE = BF = CG = DH et EB = FC = GD = HA et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.

Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernières parties d'un angle plat).

Le quadrilatère EFGH est donc un carré.

Voici une autre solution (**Solution 6**).

Les segments HE, EF, FG et GH sont des diagonales de rectangles (par exemple AEE'H). Par déduction des égalités des longueurs de l'hypoténuse, les rectangles sont superposables, donc les diagonales ont même longueur et font le même angle avec le côté correspondant. On obtient déjà que EFGH est un losange.

On considère la rotation de centre E et d'angle (EH, EA) : le point H se transforme en H' sur [EA) et simultanément F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E ; G se transforme en G'…

On obtient un losange EF'G'H' avec un angle droit. C'est donc un carré. Par suite EFGH est aussi un carré.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III)

L'énoncé est donné par exemple avec les hypothèses 2.

Dans cette géométrie qui utilise le substrat euclidien au sens du produit scalaire, la première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HE}$ issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses. Ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE.

IV CONCLUSION

L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet, prenons le problème concret suivant : 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets ? La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).

Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre : géométrie I, II ou III ? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'expliciter les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I ou passe-t-on dans la géométrie II ?

En résumé, il est en général attendu que l'élève traite un problème géométrique dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.

Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place : construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.

Notre propos n'est pas de régler en ces quelques lignes le problème des relations entre géométrie et espace, mais plutôt de clarifier les différents niveaux que recouvre le terme géométrie, dans ses acceptations usuelles.

Notre étude de la géométrie semble se limiter au micro espace (la feuille de papier, l'écran d'ordinateur) décrit par G. Brousseau et son équipe[14]. C'est effectivement celui dans lequel il est le plus usuel de « faire de la géométrie ». Mais cet espace est un espace de travail, celui dans lequel on peut ramener tous les autres espaces, moyennant une transformation dont bien sûr il faut maîtriser les invariants et une modélisation adaptée au traitement de la question qui s'y rapporte**. Pour nous, faire de la géométrie revient à travailler dans un modèle**, dont la feuille de papier fournit un support**.**

Les connaissances spatiales, citées par Berthelot et Salin et répertoriées comme un « trou d'enseignement », sont absolument utiles à tout citoyen, notamment pour se repérer dans tout espace de vie. A ce titre elles relèveraient de compétences transversales, c'est-à-dire dépendant de plusieurs disciplines (géographie, E.P.S…..) ; mais sont elles toujours nécessaires à l'acquisition de connaissances **géométriques** ?

Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'ils doivent enseigner à leurs élèves.

[14] Berthelot et Salin, 1993, "L'enseignement de la géométrie à l'école primaire" dans *Grand N* n°53.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. *Petit x*, 1994, n°37, p. 5-33. IREM de Grenoble.

ARSAC G, MANTE M. Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 1997, Vol 33, n°1.

BERGUE D. et al. De la figure vers la démonstration. *Petit x*,1991, n°27, p.5-39. IREM de Grenoble.

BERTHELOT R. SALIN M.H. L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N* n°53, 1994, pages 39-56, IREM de Grenoble.

BERTHELOT R. SALIN M.H. Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N* n°56, 1995, pages 69-116, IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G. Etude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique. LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble. 1983.

CHEVALLARD Y. et JULLIEN M. Autour de l'enseignement de la géométrie, première partie. *Petit x,* 1991, n°27, p.41-76. IREM de Grenoble.

DUSSUC M-P. *Du constat graphique à l'évidence géométrique : étude de démarches d'élèves de CM2 et de 5ème*. Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques. Université Lyon I, 1994.

DUVAL R. Approche cognitive des problèmes de géométrie. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactiques de Strasbourg* 57-74, IREM de Strasbourg, 1988.

FISCHBEIN E *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Reidel 1987. Kluwer Second printing 1994.

FLORIS R. *Qui a tué la géométrie à l'école. Etude didactique, de la noosphère à la classe*. Mémoire de DESSE, FSPE. Université de Genève 1996. Suisse.

GONSETH F. *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Editions du Griffon 1945-1955.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1996, Vol 16/3, p.289-322. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics.* (à paraître).

KUZNIAK A. et TAVEAU C. *Activités géométriques en classe de sixième.* Nathan 1998.

LABORDE C. L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1988, Vol 9/3, p. 337-364. Grenoble : La Pensée Sauvage.

PARZYSZ B. Espace, géométrie et dessin. Une expérience didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1991. Vol 11/2-3, p. 211-240. Grenoble : La Pensée Sauvage.

PIAGET J. *Introduction à l'épistémologie génétique, tome 1. La Pensée Mathématique.* Paris : PUF 1950.