A LA RECHERCHE DU SENS...

Roland CHARNAY
Professeur de mathématiques, IUFM de Lyon
Equipe de didactique des mathématiques, INRP (groupe ERMEL)

« *Le problème majeur de l'enseignement des mathématiques est sans aucun doute celui du sens* »[1]. On s'accordera volontiers sur ce constat, confirmé par de nombreuses évaluations qui montrent que les élèves ont des connaissances en mathématiques, mais qu'ils ont du mal à les mobiliser pour résoudre des problèmes. L'enjeu est alors fixé : concevoir un enseignement qui permettent aux élèves de donner du sens à ce qu'ils apprennent, afin qu'ils ne fonctionnent pas comme ces « automaths » si souvent évoqués par Stella Baruk.

Encore faut-il s'entendre sur ce que recouvre ce mot « sens » ? C'est une modeste contribution à cette réflexion que nous proposons d'apporter dans les lignes qui suivent.

IL Y A TOUJOURS DU SENS...

Lors d'une évaluation à l'entrée en Sixième (élèves de 11 ans), le problème suivant est proposé aux élèves :

Julie a acheté pour un goûter :
- deux tablettes de chocolat à 8 F chacune ;
- quatre bouteilles de limonade à 6 F chacune ;
- un sac de brioches.

Elle a payé 56 F. Quel est le prix du sac de brioches ?

<u>Réponse d'un élève</u> : *8 F x 6 F = 54 F*
Le prix du sac de brioches est 2 F.

[1] Extrait de « Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la communauté française de Belgique », in Repères n° 6, 1992, Topiques Editions

Une lecture rapide de la réponse pourrait conduire à penser que l'élève n'a rien compris au problème posé et a répondu n'importe quoi.

Il faut se garder d'une réaction aussi rapide qui risque d'être superficielle. Et plutôt s'interroger sur le sens de cette réponse, sur ce qu'elle révèle de la démarche de l'élève ou, tout au moins, formuler quelques hypothèses qui peuvent être faites à ce sujet.

Tout d'abord, la réponse finale a sans doute été obtenue en faisant la différence entre 56 et 54. Elle permet de faire l'hypothèse que l'élève a globalement, « qualitativement », compris la situation : connaissant le prix total de trois éléments et le prix de deux d'entre eux, il s'agit de chercher le prix du troisième. Il serait donc faux de dire que l'élève n'a rien compris au problème.

L'erreur se situerait alors dans le calcul du prix total des deux premiers éléments (chocolat et limonade). Pourquoi l'élève a-t-il calculé, pour cela, le produit de 8 par 6 (avec d'ailleurs un résultat inexact) ? Deux hypothèses viennent à l'esprit.

Première hypothèse : l'élève n'a utilisé que les nombres écrits en chiffres. Il utilise sans doute ici une règle implicite qui fonctionne souvent dans la résolution des problèmes scolaires : la solution s'obtient en utilisant tous les nombres de l'énoncé (sous entendu, écrits en chiffres, ce qui explique que « deux » et « quatre » n'aient pas été utilisés) et en les combinant par des opérations connues.

La deuxième hypothèse porte sur le choix de la première opération. Pourquoi une multiplication ? Sans doute, parce que le mot « chacune » est souvent, dans un énoncé, l'indice qu'il faut utiliser cette opération.

La réponse de l'élève aurait donc un sens, elle ne serait pas le fruit du hasard, mais celui d'une démarche qui a sa rationalité, en cela qu'elle est explicable par des règles d'action utilisées par l'élève, règles qui, en de nombreuses circonstances, face à des énoncés de problèmes, lui ont sans doute permis de réussir, au moins partiellement...

Cette réponse, alors, nous interroge, au moins dans deux directions :

- Quel sens l'élève donne-t-il à l'activité de résolution de problème, et plus généralement à l'activité mathématique ?
- Quel sens donne-t-il aux opérations arithmétiques, ici à la multiplication ? Cette opération n'est-elle que la « traduction » de certains mots (que justement on appelle souvent inducteurs... et qui parfois induisent en erreur) ?

LE SENS DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

« Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes ». Là aussi, on tombe facilement d'accord, trop facilement, peut-être. Car, trop souvent, pour les élèves, résoudre se limite à trouver le bon calcul (comme dans l'exemple précédent).

C'est peut-être le sens du mot « chercher » qu'il faut travailler avec les élèves. Car, il y a « chercher » et « chercher ».

Chercher la solution d'un problème dit d'application, c'est effectivement tenter de mettre la main sur « la notion qui s'applique » au problème posé, c'est la dégager de la panoplie des connaissances acquises pour l'utiliser directement. C'est un peu comme chercher, dans son trousseau, la clef qui ouvre telle serrure qui nous est présentée, quitte à devoir, parfois, adapter la clef à cette serrure particulière. Il y a bien alors activité mathématique dans la mesure où la situation proposée doit être reformulée, modélisée à l'aide des concepts disponibles et, où souvent un raisonnement est nécessaire.

Mais chercher la solution d'un vrai problème, inédit, nouveau, c'est autre chose. C'est davantage encore construire, élaborer la solution. Aucune connaissance n'est directement utilisable, il faut essayer, bricoler, ajuster, recommencer... La clef n'est plus dans le trousseau, il faut la fabriquer.

En plaçant les élèves face à de vrais problèmes, face à des défis pour lesquels il n'y a pas de solution toute prête, on pourra les aider à comprendre ce qu'est l'activité mathématique. A condition d'admettre la diversité des solutions (même si la réponse est la même), à condition également que ces solutions soient objet d'élaboration en commun (par petits groupes, par exemple) et qu'elles soient occasion d'échanges, de débats.

La pratique du « problème de recherche » (ou du « problème ouvert », selon le terme utilisé par les chercheurs de l'IREM de Lyon[2]) est particulièrement destinée à cet objectif essentiel : permettre la construction d'un rapport effectif adéquat à l'activité mathématique, donc d'un sens de cette activité qui (épistémologiquement) se rapproche du travail du mathématicien.

L'exemple suivant[3] d'un problème posé à des élèves de 10 ans (qui n'ont évidemment pas rencontré la notion d'équation) permet de comprendre ce qu'est un problème ouvert... et à chacun d'imaginer les solutions qui peuvent être élaborées par ces élèves.

> Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces de monnaie
> Il n'y a que des pièces de 2F et de 5F
> Avec ces 32 pièces, j'ai 97 F
> Combien y a-t-il de pièces de 2 F et de pièces de 5 F ?

LE SENS DES CONCEPTS MATHEMATIQUES

Quand peut-on affirmer qu'un élève possède le sens de la multiplication ? Lorsqu'il en connaît le langage verbal et symbolique ? Lorsqu'il est capable de calculer mentalement, par écrit ou à l'aide d'une calculette ? Lorsqu'il en connaît les propriétés ? Lorsqu'il reconnaît les problèmes qui peuvent être résolus à l'aide de cette opération ? Sans doute tout cela à la fois, dès l'instant où il en a une compréhension suffisante. Ainsi le sens des traitements que j'effectue en calculant, par écrit, une multiplication posée réside dans l'explication que je suis à même de fournir de chacune des étapes de ce traitement. Et chacun sait que si la compréhension de cette explication n'est pas nécessaire à l'exécution de l'automatisme, chacun reconnaît aussi qu'elle facilite grandement son apprentissage.

---

[2] Arsac G. et al : Problème ouvert et situation-problème, IREM de Lyon, 1988
Voir aussi : « Problème ouvert, problème pour chercher », in Grand N n° 51 (1992-93)

[3] extrait de « Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques », INRP (collection Rencontres Pédagogiques), 1984

Il n’est donc pas tout à fait pertinent de séparer trop vite le sens et la technique, comme on le fait souvent, en ne mettant le sens que du côté des problèmes.

Il faut cependant reconnaître que cette distinction courante recouvre une différence bien connue des enseignants. « Ce qui est difficile, c’est le sens », entend-on souvent pour exprimer que les élèves ont du mal à reconnaître les situations dans lesquelles l’utilisation de telle ou telle notion est appropriée. Intéressons nous donc à cet aspect du sens d’une notion.

Le sens réside alors dans la reconnaissance de l’efficacité de la notion, pourrait-on affirmer. Et force est de reconnaître que l’enseignement des concepts nouveaux est rarement adapté à ce point de vue. Veut-on présenter pour la première fois la multiplication à de jeunes élèves qu’on leur montre, dans de nombreux manuels, un dessin de 4 rangées de 5 avions en leur demandant combien il y a d’avions dessinés. Le dénombrement un par un (ou cinq par cinq) ou l’addition répétée permettent de répondre rapidement et sûrement. Ce sont des procédures très efficaces et, qui plus est, bien maîtrisées par les élèves. Est-il alors besoin d’une notion nouvelle pour résoudre un problème aussi simple ? La notation 4 x 5, présentée alors par l’enseignant, vient plutôt obscurcir les choses que les éclairer, les compliquer plutôt que les simplifier... Comme une réponse à un problème qui ne se posait pas !

Une voie est alors ouverte par la réflexion qui précède : une notion nouvelle devrait être introduite à l’occasion de la résolution d’un problème qui en justifie l’utilisation, parce que les connaissances disponibles se révèlent inadaptées ou peu efficaces pour le traitement de ce problème. Faire vivre d’abord la difficulté, la prise de conscience que les connaissances anciennes sont insuffisantes... pour favoriser l’intérêt de travailler une notion nouvelle. Et donc placer des problèmes (ce qu’on appelle parfois des situations-problèmes) au point de départ des apprentissages et pas seulement à leur aboutissement. En quelque sorte enseigner le problème avant d’enseigner la réponse.

C’est parce que la multiplication apparaît comme une économie, comme un moyen plus sûr et plus rapide par rapport à l’addition répétée, qu’elle commencera à prendre sens, dans le domaine des nombres entiers et pour certaines situations.

Mais la construction du sens est une affaire de longue haleine... et de quelques remises en cause. Car il ne suffit pas d’avoir rencontré la multiplication dans une situation du type « combien d’avions dans 15 rangées de 18 avions ? » pour la reconnaître immédiatement comme efficace dans une situation du type « combien de doublés avec 18 chevaux au départ ? » et encore moins dans une situation du type « quel prix à payer pour 0,785 kg de bonbons à 18 F le kg ? ». La conquête du champ des problèmes multiplicatifs, comme pour beaucoup d’autres concepts, nécessitera plus d’une situation-problème et s’étendra sur plusieurs années du primaire au secondaire...

RECHERCHE DU SENS ET SENS DE LA RECHERCHE

C’est au cœur de ce double enjeu que nous proposons de penser l’enseignement des mathématiques, la résolution de problèmes constituant alors le moteur principal des apprentissages.

De nombreux travaux de recherche ont été conduits dans cette direction (dans ce sens !). A chacun de s’en saisir et de les faire siens...

BIBLIOGRAPHIE

R. Charnay : Pourquoi des mathématiques à l’école, ESF, 1996

R. Charnay, M. Mante : Préparation au concours de professeurs des écoles (2 tomes), Hatier, 1995 et 1996

ERMEL : Apprentissages numériques et résolution de problèmes (6 volumes : de la Grande Section d’école maternelle au CM2), Hatier, 1990 à 1999 (dernier tome à paraître)