MISE EN BOÎTES

UTILISATION D' UNE FICHE « POINT DE DEPART » DE GRAND N

Annie RODRIGUEZ
Professeur de Mathématiques, IUFM, MELUN

INTRODUCTION

Cet article présente un travail mené dans une classe de CE2 à partir de la fiche Point de départ de Grand N n° 60 1996-1997, intitulée « Mise en boîtes ».

D'autres classes de cycle 2 et 3 de la même école ont utilisé ce support et une démarche semblable, au cours de l'année 1998.

Nous remercions Mesdames BOISANTE, GUITTARD, MOUCHARD de l'école GATELLIET de MELUN.

Cette fiche propose un problème de recherche dont la solution n'est pas immédiate et qui possède plusieurs solutions. Nous nous en sommes inspirées pour mettre en place une séquence originale permettant d'évaluer les compétences développées par les élèves dans un ***contexte de communication de résultats et de preuves*****.**

Les savoirs mathématiques sollicités doivent correspondre à des acquis réels de tous les élèves (niveau début de cycle 3, addition et multiplication de nombres entiers, champ numérique simple, inférieur à 20) ; une recherche de procédure est nécessaire ; un temps de communication et d'argumentation est prévu au sein de la classe ; une trace écrite individuelle doit servir d'évaluation.

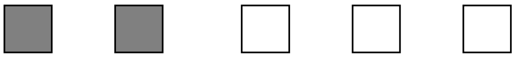
I - SITUATION MATHEMATIQUE : CHOIX DU PROBLEME

A. LE PROBLEME

Soient deux boîtes grises et trois boîtes blanches, n jetons .
Prévoir la répartition de tous les jetons dans les boîtes :
- *on utilise toutes les boîtes*

- *les boîtes de même couleur contiennent le même nombre de jetons.*

Est-ce possible ? Comment ? Prouvez-le.



La recherche de ce problème fait apparaître ***plusieurs intérêts*** vis à vis de nos intentions pédagogiques :

- plusieurs solutions existent : il faudra donc d'autant plus justifier les différentes propositions.
- des procédures graphiques sont possibles pour étayer les calculs : l'entrée dans la recherche paraît accessible à tous les élèves.

B. EXEMPLE DE SOLUTIONS D'UN PROBLEME PARTICULIER

Choix des différentes valeurs

2 Boîtes grises
3 Boîtes blanches
20 jetons

Méthode et solutions

On cherche donc deux valeurs entières x et y telles que 2 . x + 3 . y = 20, où x est le nombre de jetons dans chacune des boîtes grises et y est le nombre de jetons dans chacune des boîtes blanches.

On donne successivement à x les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ;7 ;8 ; 9.

On regarde s'il est possible de trouver un entier y satisfaisant l'équation ci-dessus ; voici les calculs correspondants :

2 . 1 = 2 ; 3 . 6 = 20 - 2 = 18 1 + 1 + 6 + 6 + 6	2 . 3 = 6 ; 3 . ? = 20 – 6 = 14 impossible
2 . 2 = 4 ; 3 . ? = 20 – 4 = 16 impossible	2 . 4 = 8 ; 3 . 4 = 20 – 8 = 12 4 + 4 + 4 +4 + 4
2 . 5 = 10 ; 3 . ? = 20 – 10 = 10 impossible	5 . 4 = 20 il y a 4 jetons par boîte
2 . 6 = 12 ; 3 . ? = 20 – 12 = 8 impossible	2 . 7 = 14 ; 3 . 2 = 20 – 14 = 6 7 + 7 + 2 + 2 + 2
2 . 8 = 16 ; 3 . ? = 20 – 16 = 4 impossible	2 . 9 = 18 ; 3 . ? = 20 – 18 = 2 impossible

Commentaire [NR1]:

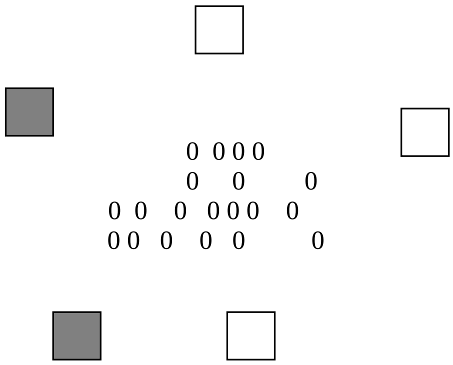
Trois solutions : 1 + 1+ 6 + 6 + 6
4 + 4 + 4 + 4 + 4
7 + 7 + 2 + 2 + 2

C. LES VARIABLES

Il reste à repérer <u>*les variables*</u> en jeu afin d'effectuer des choix en cohérence avec nos objectifs ; tout d'abord , la **disposition spatiale des boîtes** peut induire une démarche du type « je mets un (ou des) jeton(s) dans les deux boîtes grises puis je répartis le reste, équitablement dans les trois boîtes blanches » ; nous avons opté pour une disposition circulaire des cinq boîtes qui semble moins directive dans la « mise en boîtes ».

Par exemple, pour le problème précédent , la présentation suivante est fournie aux enfants :

2 BOÎTES GRISES
3 BOÎTES BLANCHES
20 JETONS



Ensuite il convient de déterminer les **quantités de jetons** à proposer pour les différentes recherches ; on peut distinguer des variables qui conduisent à des réponses diversifiées et d'autres orientées vers la découverte et l'explicitation de méthodes de recherche.

Variables numériques

Ces choix numériques permettent des calculs simples et maîtrisés, évitant un conditionnement « heuristique » où 1 jeton par boîte grise conduit systématiquement à une solution. Par exemple :

valeurs pour n : 8 puis 9 puis 12 jetons
9 puis 11 puis 15 jetons .

Variables heuristiques

Elles sont associées au prolongement de chacune des recherches par une deuxième question « *A-t-on trouvé toutes les répartitions possibles ? Prouvez-le* ». D'autres choix numériques peuvent alors être faits, valorisant la possibilité d'une première solution avec 1 jeton par boîte grise : 8 puis 11 puis 14 jetons ;
14 puis 17 puis 20 jetons.

D. MISE EN PLACE ET PROGRESSION

Trois quantités de jetons sont sélectionnées et constituent, ensemble, une séquence centrée sur la notion de preuve mathématique et constituée de trois recherches successives.

Les spécificités de chacune de celles-ci sont les suivantes :

En fin de **première recherche**, est prévue la vérification - validation avec des jetons et des fonds de boîtes. On fait émerger la nécessité de montrer le respect des contraintes de la situation (même couleur de boîte, même nombre de jetons ; utilisation des cinq boîtes et de tous les jetons) pour valider une réponse.

Pour **la deuxième recherche**, on sollicite et met en valeur les formulations expertes : *« quelles sont les preuves mathématiques ? ».*

La troisième recherche, limitée dans le temps, vise ainsi, le recours aux calculs correctement écrits comme éléments de preuves.

Pour chacun des jeux proposés, le déroulement choisi fait se succéder des phases de recherches - formulations, mises en commun - échanges, évaluations :

1 - Travail individuel (5 minutes) au brouillon puis, par groupes de deux , rédaction d'une fiche **proposition de réponses** (feuille A3, marqueurs), (environ 8 minutes). *Le maître circule dans la classe et repère les procédures distinctes.*

2 - Affichage d'un échantillonnage représentatif des propositions : solutions diverses, rédactions distinctes, réponses erronées ou incomplètes (*la sélection est effectuée par le maître).*
Lectures silencieuses ; ce temps est préparatoire à la confrontation collective, il ne dure que quelques minutes.

3 - *« Toutes les répartitions conviennent –elles ? »*
Recherche collective de validation : reformulations verbales, calculs monstrations - mimes, manipulations, argumentations **prenant appui sur les affiches.** Il y a correction des écritures mathématiques incorrectes du genre :

6 . 2 = 12 + 3 = 15.

La durée des échanges dépend de la diversité produite ! Il faut compter cependant un petit quart d'heure.

4 - Reprise individuelle des résultats et de leurs preuves (par écrit, sur une feuille d'évaluation du jeu : « mémoire des réussites ») - les affichages du tableau sont retirés.
Ce document permet au maître de repérer l'impact du travail collectif précédent sur chacun des élèves (5 minutes).

Ce même déroulement fonctionne avec plus de rapidité lors du deuxième ou troisième jeu.

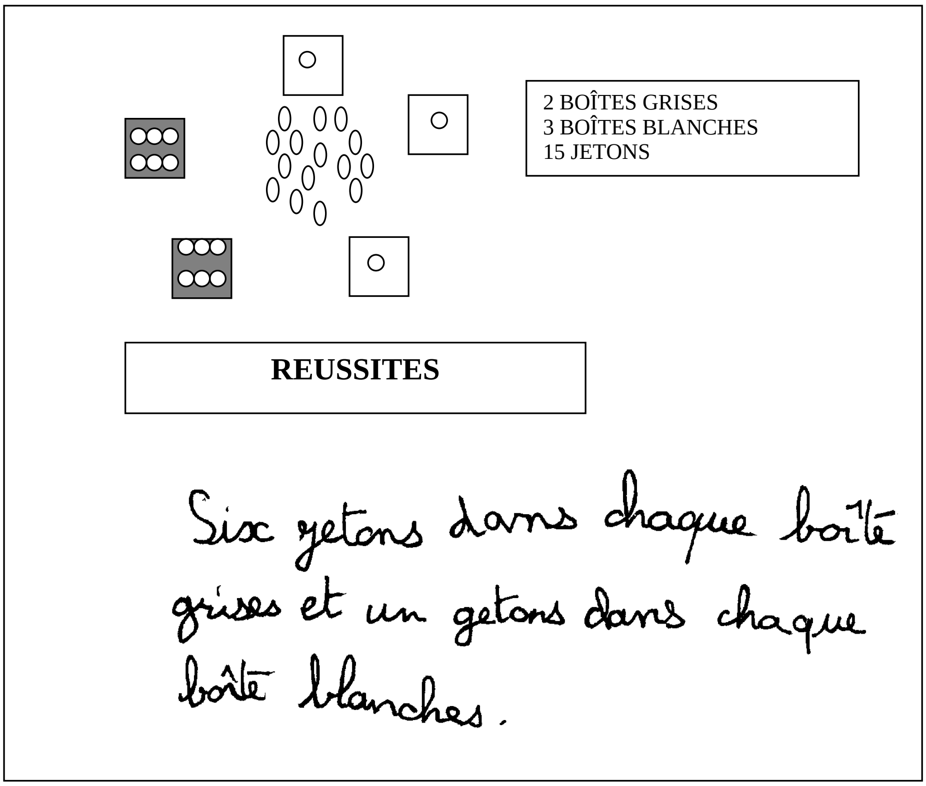
Il paraît intéressant d'interroger les élèves, en fin d'activité, sur les moyens trouvés et jugés efficaces pour prouver les réponses (calculs ; mots ; manipulations ; schémas ; méthodes) ; ces moyens sont-ils transposables à d'autres activités ?

Quelle est leur perception du « savoir prouver » ?

E. TYPES DE PREUVES :

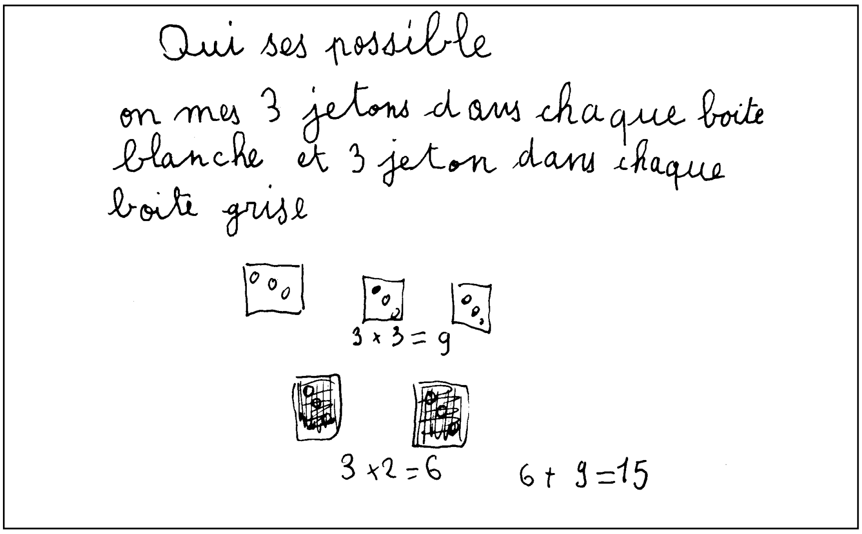
La « mise en boîtes » nécessite une simulation ou une représentation mentale des quantités en jeu, et conduit à une **trace écrite « mémoire »** ; la validation peut alors être formulée de différentes manières : *(les exemples de documents élèves qui suivent proviennent de la recherche pour la situation 2 boîtes grises, trois boîtes blanches et 15 jetons)*

- des représentations s'appuyant sur le schéma proposé aux élèves : l'élève dessine des jetons dans les « boîtes », contrôlant sans doute par comptage le nombre total de jetons. Si le total convient, il écrit une phrase pour signaler qu'il a trouvé le résultat.



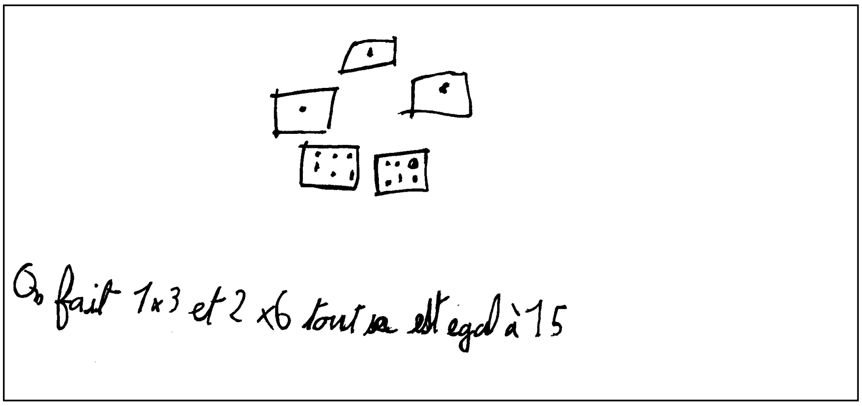
- *exemple 1*

- des dessins souvent accompagnés d'écritures additives ou multiplicatives : celles-ci apparaissent plus comme des justifications d'une recherche de répartition adéquate des jetons.



exemple 2

(l'enfant a sans doute résolu le problème par une représentation mentale des jetons et un comptage associé et par la suite il fournit des argument de type calculatoire)



exemple 3

(le dessin apparaît plus ici comme un appui à une répartition possible des jetons, les écritures multiplicatives « traduisant la situation »)

- écritures mathématiques : calculs de type additif ou multiplicatif, indication d'une division, une ou plusieurs égalités, arbres de calculs…

> Il faut metre 6 jéton dans chaune des boites grise et
> 1 dans chacune des boite blanche
> parce que 6 × 2 = 12 + 3 = 15

exemple 4

> 3 jetons dans chaque boite blanche
> te 3 jéton dans cha~~[illegible]~~que boite grise
> (3 × 3)+(2 × 3) = 15

exemple 5

> elle est pocible
>
> 15 | 3
> 0 5 5 jetons dans chaque boite blanche
>
> 0 jetons dans les boite grise.

exemple 6

Mais certains enfants peuvent produire aussi des résultats sans justification :

> On mai 1 jéton dan les tra boite
> blanche et 6 dans le deux boite
> grise

exemple 7

Le niveau d'expertise est dépendant des apprentissages et des acquis réels des élèves. La preuve repose sur la maîtrise de savoirs notionnels et méthodologiques.

La situation conduit aussi à **des vérifications – manipulations**, répartitions des jetons : il s'agit, alors, **de preuves expérimentales,** nécessaires pour certains élèves afin de se convaincre de l'exactitude de quelques propositions.

La phase collective d'échanges critiques à propos des différentes répartitions proposées doit pouvoir conduire à des **verbalisations spécifiques « probantes »** : des connecteurs déductifs ou locutions verbales précises nécessaires à l'argumentation comme

alors, ensuite, puis, et, en tout, donc, puisque, comme, on a, ça fait, ça donne, parce que …vont sans doute apparaître, formulés par un ou plusieurs élèves et repris par le maître.

L'examen de la **validité** de certaines réponses permet de repérer des ambiguïtés ou incompréhensions, en particulier en ce qui concerne le nombre de jetons par boîte (blanche par exemple) et le nombre de jetons contenu dans **toutes** les boîtes (blanches par exemple).

L'explicitation des méthodes de recherche conduisant à une liste de solutions fait apparaître la nécessité d'un examen « exhaustif » de toutes les possibilités de répartitions de jetons : c'est un raisonnement de type **« disjonction des cas »** qui est mis en œuvre.

Ces types de preuves constituent des **indicateurs du niveau de compétence** exercée par les élèves : il est possible d'observer et d'analyser les traces écrites produites, les styles d'interventions orales, les démarches… au delà d'une attitude générale de participation, écoute et prise de parole.

II - DEROULEMENT EFFECTIF EN CLASSE DE CE2

A. LES DEUX SEANCES

Le maître inscrit ce travail en mathématiques dans un projet global de formation à la citoyenneté : développement d'attitudes d'écoute, de prise en compte de différences ; importance des échanges verbaux et écrits.

La mise en œuvre se fait sur deux séances avec les quantités de jetons 9 ; 11 ; 15 ; elle respecte les différentes formes de travail citées dans la mise en place :

1. par l'individuel initial pour s'approprier la recherche,
2. par le groupe de deux pour produire une affiche justifiant une réponse,
3. en collectif pour valider ou non les propositions ,
4. retour à l'individuel pour affirmer la maîtrise de la situation .

Un temps d'échanges et de structuration de l'apprentissage (écritures mathématiques en relation avec une réalité physique) est animé, à la suite des deux séances de recherches de « mises en boîtes » pour recentrer les élèves sur les types de preuve utilisés .Les évolutions sont sensibles d'un jeu à l'autre , dans l'utilisation correcte des écrits mathématiques et la recherche de précision dans les expressions. Le maître institutionnalise l'activité mathématique comme, non seulement une recherche de résultat mais aussi l'apport de justifications : **« trouver et prouver ».** Les opérations (addition et multiplication) sont des outils utiles à cette résolution de problème : il s'agit d'expliciter leur usage.

REPONSES POUR LES NOMBRES DE JETONS CHOISIS

Première séance

Réponse pour 9 jetons :

3 jetons dans chaque boîte grise, et
1 jeton dans chaque boîte

Réponses pour 11 jetons :

- 1 jeton par boîte grise , et
  3 jetons par boîte blanche
  2 . 1 + 3 . 3 = 2 + 3 = 11

- 4 jetons par boîte grise et,
  1 jeton par boîte blanche
  2 . 4 + 3 . 1 = 8 + 3 = 11

Deuxième séance

Réponses pour 15 jetons :

- 3 jetons dans chaque boîte
  3 . 5 = 15 ou
  2 . 3 + 3 . 3 = 6 + 9 = 15

- 6 jetons par boîte grise et,
  1 jeton par boîte blanche

B. RESULTATS OBTENUS POUR LES DEUX SEANCES (20 ELEVES DU CE 2)

Nous croisons les réussites aux deux activités (11 jetons puis 15 jetons) avec les méthodes utilisées .

Le code « 3B. 1 G » signifie « trois boules dans chaque boîte blanche ; une boule dans chaque boîte grise »

1er jeu 11 jetons	3B ; 1G	1B ; 4G
Résultats seuls	3	0
Dessins (seuls)	1	0
Dessins et additions	0	0
Additions	0	1
Dessins et multiplications	2	0
Multiplications et additions	5	1
Autre Non terminé Division	 1 1	 0 0

Remarque : trois élèves réalisent des dessins en donnant la solution « 3B ; 2G » soit 3 . 3 + 2 . 2 = 13 !

1er jeu 15 jetons	3B ; 3G	1B ; 6G
Résultats seuls	1	3
Dessins (seuls)	1	2
Dessins et additions	0	0
Additions	1	1
Dessins et multiplications	1	2
Multiplications et additions	5	2
Autre Division Arbre de vérité	 0 1	 0 0

C. CONFRONTATION DES REPONSES « ELEVES »

• Les ***formulations incomplètes, imprécises,*** en désaccord avec les calculs sont relevées par les élèves :

par exemple , 3 jetons dans les boîtes blanches a été interprété et visualisé de deux manières : 1 + 1 + 1 = 3 (1 jeton par boîte, 3 en tout)

3 + 3 + 3 = 9 (3 jetons par boîte, 9 en tout) .

• Le mot ***« chaque »*** a été utilisé, par la suite, et majoritairement repris dans l'écrit individuel.

• Les ***écritures incorrectes*** dans l'usage du signe = ont été reprises comme

6 x 2 = 12 + 3 = 15, et remplacées par des suites de calculs successifs ou parenthésés 6 x 2 = 12 ; 12 + 3 = 15 ou (6 x 2) + 3 = 15 ; le rôle de la parenthèse - déjà vu - a été rappelé à l'occasion.

La multiplication « 5 x 3 » proposée par un groupe pour le jeu à 15 jetons, a posé quelques problèmes d'interprétation aux autres :

5 boîtes (blanches ou grises) de 3 jetons chacune ou
5 jetons dans chacune des trois boîtes blanches ?

Pour ce problème, les élèves préfèrent les expressions individualisant boîtes grises et boîtes blanches : 3 jetons dans chaque boîte grise et 3 jetons dans chaque boîte blanche, ou 2 x 3 + 3 x 3 = 15. Une vérification – manipulation - placement des jetons dans les boîtes redonne son sens à l'écriture mathématique. La signification des opérations utilisées est sollicitée ; la maîtrise du sens de la multiplication se révèle insatisfaisante pour la majorité de ces élèves qui refusent « 5 x 3 ».

• Les ***dessins*** , mémoires du procédé de distribution réalisé , sont ainsi considérés ***probants si l'on effectue les calculs correspondants vérifiant le respect des contraintes :*** tous les jetons sont distribués ; même quantité de jetons par boîte de même couleur ; aucune boîte vide.

Prouver, c'est « faire pour de bon avec les boîtes », « expliquer », « écrire comment on a fait », « justifier avec des opérations » ;

Trois types de formulations sont systématiquement croisés à partir des affiches produites par les élèves : dessins, phrases, opérations. Les correspondances sont mises en évidence ; précision et rigueur s'avèrent utiles pour lever des ambiguïtés.

Des éléments d'***argumentation*** apparaissent car les propositions affichées diffèrent dans les quantités et les opérations ; les mots employés sont « il faut », « je pense que », « j'ai trouvé … parce que », « tout ça est égal à », « ça fait », « on a additionné ». Bien que deux réussites possibles aient été vues dans les temps de mise en commun, les élèves n'explicitent qu'une des deux réponses sur leurs feuilles individuelles. Le recours aux opérations se développe dans le deuxième jeu. Les expressions orales s'articulent autour des mots « preuve » (bonne ou pas bonne), « mauvais calculs », « possible, impossible », « puisque, parce que ».

CONCLUSION

L'analyse des écrits individuels montre l'intérêt du travail sur les écritures opératoires possibles, correctes, lors de chacun des jeux : un niveau « expert » d'écriture peut être recherché en conclusion de chacun des jeux : il peut être obtenu avec l'usage d'une somme de multiplications du type (2 x ?) + (3 x ?) = N, N nombre entier de jetons. La comparaison des réponses permet de mettre aisément en évidence la ***structure de calculs*** :

2 x $\boxed{}$ + 3 x $\boxed{}$ = N où les encadrés « marqueurs de place » représentent les deux inconnues .

Il est alors possible de passer à la résolution de ces problèmes sans l'habillage de la mise en boîte :

2 x $\boxed{}$ + 3 x $\boxed{}$ = 11
Quels nombres entiers conviennent ?

2 x $\boxed{}$ + 3 x $\boxed{}$= 15
Quels nombres entiers conviennent ?

Peut-on trouver un nombre de jetons N pour lequel aucune répartition ne soit possible ?

Un prolongement méthodologique est également intéressant à partir de la recherche de toutes les solutions possibles pour un même jeu ; nos observations, notre questionnement vis à vis des procédures des élèves pour faire émerger une réponse au cours de ces premiers jeux montrent que beaucoup utilisent une répartition imaginaire arbitraire, testée ensuite par dessins ou calculs puis, éventuellement réajustée. L'algorithme opératoire (division par 3) utilisé par un élève mériterait une étude spécifique :

11/3 donne 3 jetons par boîte blanche et un reste de 2 jetons pour les deux boîtes grises.

15/3 donne 5 jetons par boîte blanche et un reste nul pour les deux boîtes grises.

Ces situations de « mise en boîtes » nous paraissent très riches : elles mobilisent des savoirs simples (4 opérations) et permettent de découvrir des problèmes à solutions multiples (0 ou 1 ou 2 ou… plus). Les calculs explicités constituent des éléments de preuve, mathématiques remplaçant les manipulations - simulations du réel. Des décontextualisations, des généralisations sont possibles.