FAIRE LA FIGURE, CODER, ECRIRE LES HYPOTHESES, DEMONTRER QUE...

Marie-Claire DEMONGEOT
Michèle GANDIT
IREM de Grenoble

Résumé : Certaines pratiques, en collège, visent à aider l'élève dans son apprentissage de la démonstration : elles consistent à segmenter l'activité et à proposer des tâches préalables à la recherche de la démonstration et à l'écriture du texte. Nous analysons d'abord l'articulation de ces tâches avec le travail de démonstration dans le cas de l'expert ; puis, à la lumière de cette analyse, interrogeons deux copies d'élèves de quatrième. Ceci nous amène à penser que ces pratiques confrontent l'élève à de nombreux implicites et malentendus, et que le rétablissement du projet de démonstration, nécessaire à la réussite, reste à sa charge.

Mots-clés : démonstration en géométrie, codage de la figure, taches préalables.

En nous soumettant, lors d'un stage de formation continue, l'exercice de géométrie ci-dessous envisagé en classe de 6$^{\text{ième}}$, un enseignant[1] a attiré notre attention sur le fait suivant : il est demandé aux élèves d'écrire les données sans qu'un projet de démonstration soit sous-jacent à cette écriture.

Exercice 1[2]

> *Construis un triangle EFG : EF=5cm, l'angle EFG mesure 69°, l'angle FEG mesure 37°. La médiatrice du segment [FE] coupe la droite (EG) en K.*
> a. *Ecris les données*
> b. *Explique pourquoi le triangle EFK est isocèle.*

Aux dires de son auteur, cet exercice est au service de plusieurs objectifs dont, en particulier, préparer l'apprentissage de la démonstration en commençant l'apprentissage de l'écriture des données.

Si on s'en tient aux programmes, l'élève de 6$^{\text{ième}}$ qui réalise cet exercice n'est pas censé construire ensuite une démonstration, le "explique" de la question b est d'ailleurs tout à fait conforme à l'esprit de ce qui est demandé dans ces programmes. L'élève est donc bien mis en situation d'écrire les données sans référence à une démonstration.

Pensons maintenant à un élève de 4$^{\text{ième}}$. A ce niveau l'apprentissage de la démonstration est cette fois explicitement exigé : les élèves doivent comprendre à la fois

---

[1] Merci à J. Laverdure Collège de la Côte St André (38).

[2] Les exercices sont numérotés pour faciliter les renvois car ils seront repris dans la suite.

les pratiques et les enjeux relatifs à ce nouvel exercice. Or, comme nous avons pu le constater par des observations de classes ou de manuels, un des moyens utilisés pour aider les élèves dans cet apprentissage, est de leur demander plusieurs opérations préalables à la démonstration elle-même, dont, notamment, écrire les données comme ci-dessus, mais aussi faire la figure, la coder,... et ce, avant toute recherche de la démonstration proprement dite.

L'antériorité des tâches ainsi demandées, et surtout le peu de moyens dont dispose l'élève pour se projeter dans la démonstration à venir car il est encore apprenti, font très certainement que l'élève de 4$^{\text{ième}}$ se retrouve dans la situation d'écrire les données, faire la figure,... indépendamment de la démonstration, comme l'élève de 6$^{\text{ième}}$ ci-dessus. Certes il a, lui, une démonstration à faire, mais il est en train d'apprendre à démontrer, il n'a qu'une idée très vague, voire fausse, du type de texte à obtenir, et c'est justement pour qu'il apprenne que ce découpage est proposé par les enseignants. Dans ce contexte, ces tâches peuvent-elles fonctionner comme aides ?

Les réflexions que nous soumettons ici à la lecture s'appuient sur des objets glanés au fil de nos pratiques de formateur en formation initiale et continue : textes d'exercices proposés dans les classes, commentaires d'enseignants, manuels, copies d'élèves. Nous avons mis en relation ces objets ainsi collectés car ils renseignent tous sur des pratiques qui visent à aider l'élève dans son apprentissage de la démonstration en découpant celle-ci, en tentant même de fournir à l'élève une trame d'actions successives[3], actions censées mettre l'élève sur la bonne voie pour écrire le texte et surtout, lui éviter des erreurs, par exemple la confusion entre hypothèse et conclusion.

Dans ce qui suit nous proposons d'interroger ce découpage du travail de démonstration : tâches préalables, puis, après celles-ci seulement, recherche de la démonstration et écriture du texte. Nous verrons d'ailleurs que ce texte peut être lui aussi contraint, des formes pouvant être imposées à l'élève.

Mais avant tout cela nous allons cerner un peu plus précisément ces tâches que nous disons préalables.

I. Les tâches dites préalables à la démonstration

Pour illustrer notre propos voici en exemple, une proposition du manuel de 4$^{\text{ième}}$ Pythagore (Hatier, 1998, p. 119). Nous l'étudierons plus en détail dans la suite du texte.

Ci-dessous le texte de l'exercice ; en annexe A on trouvera la suite des tâches à effectuer par l'élève pour le résoudre.

Exercice 2

Soit un triangle ABC, non rectangle en B. (AH) est une hauteur du triangle ABC et I est le milieu de [BC]. *La parallèle à (AH) passant par I coupe (AB) en J.* *Démontrer que le triangle BJC est isocèle en J.*

[3] Nous n'irons pas jusqu'à dire algorithme, cela outrepasserait les dires des enseignants.

Avec cet exemple nous nous trouvons devant un découpage "fin" qui fait appel à beaucoup des pratiques utilisées par les enseignants pour guider les élèves dans l'apprentissage de la démonstration : faire la figure, écrire les hypothèses, consulter "la boîte à outils"[4], faire un schéma de démonstration, enfin écrire le texte. Notons que, dans ce manuel, ces différentes tâches sont organisées, une chronologie est à respecter, une méthode pour la recherche et l'écriture de la démonstration est ainsi proposée (voir Annexe A).

Parmi les tâches proposées comme aides, celles que nous venons de voir et éventuellement d'autres qui pourraient être observées ailleurs, quelles sont celles que nous dirons préalables à la recherche et à l'écriture de la démonstration?

Pour justifier nos choix, nous nous en tiendrons à l'observation suivante : certaines de ces tâches sont demandées pour elles-mêmes en $6^{\text{ième}}$ et en $5^{\text{ième}}$ sans que l'exercice se conclue par une démonstration.

Précisons : on trouve dans les manuels de $5^{\text{ième}}$ et de $6^{\text{ième}}$ des exercices où l'élève travaille sur la figure, le codage, l'écriture des données, la recherche de propriétés,... mais il ne lui est pas demandé de démontrer ou de prouver[5]. Cependant il peut arriver que l'élève, ayant effectué la tâche proposée, se retrouve avec un texte qui est finalement un texte de démonstration mais sans que cela soit dit (par exemple l'élève a pu compléter des phrases qui amènent finalement à un texte de démonstration). Avec l'exercice 1 ci-dessus, on a un exemple de telles pratiques en $6^{\text{ième}}$. Pour cet exercice on pourrait d'ailleurs éventuellement considérer qu'on est dans un cas de démonstration implicite, le "explique" y conduisant.

Nous voyons donc que des exercices préparatoires à la démonstration sont donnés en $6^{\text{ième}}$ et $5^{\text{ième}}$ et que nous retrouvons en $4^{\text{ième}}$ des tâches similaires demandées explicitement dans des exercices où cette fois la démonstration est aussi exigée. Finalement nous avons ainsi pointé des tâches préalables en deux sens : préalables, en $6^{\text{ième}}$ et $5^{\text{ième}}$, car préparant l'apprentissage de la démonstration, et préalables, en $4^{\text{ième}}$, car devant être effectuées en premier lieu quand on a une démonstration particulière à écrire.

Nous ne nous référons donc pas à un quelconque point de vue sur l'activité du sujet qui cherche une démonstration pour qualifier de préalables ces opérations. Mais il se peut bien que ces pratiques trouvent leur origine dans une certaine représentation de ce travail de recherche ou peut-être dans une certaine représentation de l'apprentissage d'une activité complexe, voire aussi une représentation du traitement des difficultés des élèves[6]. Nous ne chercherons pas à répondre à la question de l'origine de leur mise en place dans de nombreuses classes[7].

Notons cependant qu'elles sont sans doute favorisées par les programmes et leurs commentaires qui préconisent une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration : "Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction il est

---

[4] C'est-à-dire une liste de propriétés commune à tous les élèves de la classe.

[5] On trouvera un tel exemple en annexe B.

[6] Cf CHARLOT B., BAUTIER E. (1993) et MATHERON Y., NOIRFALISE R (2002)

[7] Ces pratiques de "morcellement" d'une activité complexe se retrouvent aussi en primaire pour la résolution de problèmes. Cf. COPPE S., HOUDEMENT C. (2002)

nécessaire de *développer des apprentissages qui initient* les élèves à la démonstration" ; "Il s'agit en poursuivant *l'initiation très progressive* au raisonnement déductif commencé en 6ième, de passer de l'utilisation consciente d'une propriété mathématique au cours de l'étude d'une situation à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples" ; "Il importe de *faire peu à peu percevoir aux élèves* ce qu'est l'activité mathématique...". Toutefois remarquons que, d'une part, ces programmes ne proposent rien de précis quant à cette progressivité et que, d'autre part, rien ne dit que les exercices signalés ci-dessus coïncident avec ce que les auteurs des programmes considèrent comme des activités géométriques "appropriées" pouvant préparer le raisonnement déductif[8].

La mise en avant de la déduction a pu aussi conforter ces pratiques qui consistent à établir une chronologie dans les sous-tâches proposées pour la recherche de la démonstration. En effet, à l'idée de déduction est souvent associée l'idée d'un texte final se présentant sous une forme stéréotypée avec les hypothèses d'abord écrites puis les conclusions (introduites par un donc). A vrai dire, comme on le verra plus loin, on ne sait pas qui nourrit cette forme stéréotypée, du raisonnement déductif ou des pratiques d'aides aux élèves. Toujours est-il que nous nous situerons, pour la suite, dans la perspective de la déduction, notre collecte d'exemples s'y référant.

Ayant ainsi précisé ce que nous entendions par préalable, la question initiale se pose encore avec plus d'acuité. Ces tâches sont demandées à l'élève au début de l'exercice de démonstration en 4ième pour l'aider dans cette démonstration mais ces mêmes tâches lui ont été déjà soumises en 6ième et 5ième sans qu'elles conduisent à la démonstration. Et même si l'on peut entendre l'objection que les tâches, à y regarder de plus près, ne sont pas tout à fait identiques[9], la méconnaissance de la démonstration replace l'élève de quatrième dans la situation de l'élève de sixième, à savoir, effectuer ces tâches préalables sans référence à la démonstration qui va suivre.

Pour étudier cette situation, nous nous demanderons quels sont les rapports entre ces opérations préalables et le travail de démonstration et, plus particulièrement, quelle est l'articulation entre les résultats de ces opérations et le texte de la démonstration. Pour ce faire, nous partirons d'exercices proposés à des classes, et nous les examinerons a priori, en nous situant dans la perspective d'un acteur au fait de la démonstration qui effectuerait ces tâches préalables. Ensuite seulement, nous analyserons des productions d'élèves ce qui nous permettra de mettre à l'épreuve les conclusions déjà obtenues et de les affiner pour mieux comprendre le travail de l'élève.

Dans la suite, bien que sans doute nous puissions en identifier d'autres, nous nous limiterons aux actions suivantes : faire la figure et la coder, écrire les données, qui sont des tâches préalables dans les deux sens ci-dessus, et nous limiterons aussi notre étude au cas où ces trois tâches sont demandées préalablement à l'écriture d'un texte de démonstration comme en 4ième.

---

[8] Une activité géométrique appropriée serait, selon les programmes, d'amener les élèves "à prendre en compte les mêmes informations sous différentes formes".

[9] Elles ne le sont pas sans doute pas au niveau de l'intention de celui qui les prescrit, mais pour l'élève ?

II. Articulation entre tâches préalables et démonstration proprement dite : analyse a priori

1) Données et hypothèses

- Qu'écrit-on quand on écrit les données ? Les hypothèses ?

Prenons l'exercice 1. Qu'advient-il quand on cherche à écrire les données sans tenir compte d'une démonstration future (qui pourrait être de prouver que le triangle EFK est isocèle) ?

Que doit-on écrire ? Le mot "construire" est sans doute hors sujet, c'est un mot qui indique une tâche à réaliser et non une propriété de la figure sur laquelle on sera amené à travailler. Il y aurait donc lieu de *savoir tout d'abord que, **par données, on désigne les propriétés de la figure énoncées dans le texte.***

Hormis le mot "construire" à laisser de côté, qu'y a-t-il à faire sinon recopier le texte ?

- Présenter les hypothèses sous forme de liste ? *Casser le texte* ? Ce qui donnerait par exemple :
  - EF=5cm
  - L'angle EFG mesure 69°
  - L'angle FEG mesure 37°
  - La médiatrice de [EF] coupe (EG) en K

- Ou désire-t-on une *réécriture de ces propriétés dans un autre langage* utilisant les symboles mathématiques ? Cette réécriture va obliger à *nommer des objets qui ne sont pas nommés dans le texte*, ainsi de la médiatrice de [EF]. Supposons que xy désigne cette médiatrice. Va-t-on écrire xy $\cap$ (EG) = $\{K\}$ si on veut un autre langage ? Ou bien va-t-on nommer le milieu de [EF], M par exemple, et écrire que (KM) est médiatrice de [EF] ? *Peut-on introduire de nouveaux objets ?* Dans ce cas, des "non-données" vont-elles devoir être aussi écrites ? Par exemple "xy est la médiatrice de [EF]" ou "M est le milieu de [EF]" ? Ou bien cela va-t-il rester implicite, être codé sur la figure ?

- Ou bien veut-on encore plus, c'est-à-dire aller jusqu'à écrire par exemple que xy est perpendiculaire à [EF][10]? N'ai-je point dans ce cas déjà engagé une démonstration ? Est-il demandé, possible de *franchir implicitement ce petit pas de démonstration[11]* quand on écrit les hypothèses ?

S'il s'agit effectivement de traduire, de "tirer" sur ce qui a été dit dans le texte, s'il s'agit de franchir un petit pas, lequel franchir, dans quelle direction partir ? xy est perpendiculaire à (EF), xy coupe [EF] en son milieu, K est équidistant de E et de F, pour

---

[10] Peut-être certains auraient-ils préféré "xy est perpendiculaire à (EF)", mais il faut voir que dans ce cas, on a encore envisagé un nouvel objet la droite (EF), le texte lui envisage le segment [EF].

[11] Sur ces "petits pas" ou "pas anodins" comme le dit Duval voir : Duval R. (2001), Noirfalise R. (1997).

ne citer que trois possibles ? Et puis pourquoi ne pas aller jusqu'à KE=KF et FEK isocèle ?

Quelle direction prendre, si prendre une direction est autorisé dans "écrire les données" ?

Si je pars avec milieu et perpendiculaire, j'emprunte une voie qui me fait pour ainsi dire tourner le dos à la démonstration du fait que le triangle FEK est isocèle. Bien sûr je pourrai revenir à cette démonstration en passant par la propriété caractéristique des triangles isocèles d'avoir hauteur et médiane confondues, mais c'est bien complexe. Finalement si je m'autorise à franchir un petit pas en listant mes hypothèses, je peux m'avancer dans une direction qui va constituer une difficulté pour la suite du travail.

En essayant de définir ce que pouvait être la tâche qui consiste à écrire les données, nous voyons donc qu'elle recèle beaucoup d'implicite. Nous voyons aussi que le franchissement d'un petit pas peut éloigner de la démonstration.

Finalement, "écrire les hypothèses" ou "écrire les données" est une tâche difficilement cernable. Elle peut paraître très arbitraire et dépourvue de sens à un élève. Insistons : l'élève, lui, est dans une situation telle (situation créée par les consignes et par son inexpérience en matière de démonstration) qu'il est amené à écrire les données indépendamment de tout projet de démonstration. Parions que le professeur, quand il écrit les hypothèses – s'il le fait – a déjà un schéma de démonstration en tête.

Peut-être alors devrions-nous distinguer les mots données et hypothèses, ce que nous n'avons point fait jusqu'alors ?

Ecrire les hypothèses, ce serait déjà entrer dans la démonstration. Ecrire les hypothèses ne peut se faire indépendamment de la démonstration. Pour expliciter ce point de vue, revenons à la phrase "la médiatrice du segment [EF] coupe la droite (EG) en K". Elle contient nombre d'informations :

- K appartient à (EG),
- K appartient à la médiatrice de [EF],
- la médiatrice de [EF] et (EG) ne sont pas parallèles
- ....

A priori, sans projet de démonstration, il n'y a pas lieu d'extraire une information plus qu'une autre[12]. Ainsi, si on veut prouver que le triangle EFK est isocèle, on va penser à deux longueurs égales et on va retenir que K est sur la médiatrice de [EF]. Si on veut calculer l'angle EKF, on va utiliser le fait que K est sur (EG), et même, ce qui n'est pas dit dans le texte mais qui se voit sur la figure, que K est sur la demi-droite [EG)[13]. Enfin, pour affirmer que le triangle EFG n'est pas rectangle en E, si nous ne disposions pas de la mesure des angles, c'est le non-parallélisme de la médiatrice et de (EG) que nous mettrions en avant.

Le choix de l'hypothèse pertinente, ainsi que sa mise en forme, se font pendant la recherche de la démonstration, dans un aller-retour entre données et conclusions à

---

[12] Il ne s'agit pas ici de franchir un petit pas.

[13] Ce qui se voit sur la figure peut donc aussi être hypothèse. Certains auteurs de démonstrations auraient d'ailleurs écrit le pas permettant de conclure à l'égalité des deux angles FEG et FEK.

atteindre, via les théorèmes ou les définitions qui permettront de passer des uns aux autres. Nous voyons que le raisonnement qui conduit au choix et à la formulation des hypothèses, s'appuie sur la conclusion à obtenir. Le mot hypothèse ici renverrait donc au statut de la proposition dans le texte final de la démonstration et insistons, pour cela les hypothèses sont à construire pendant la recherche. Ce travail de construction est souvent occulté.

Ecrire les données, c'est-à-dire les propriétés énoncées dans le texte, ce serait réécrire ce texte, ce serait se l'approprier, en utilisant un même langage ou non, en nommant éventuellement des objets. Doit-on s'en tenir là et s'interdire d'introduire de nouveaux objets ? De franchir le moindre pas ?

Remarquons que dans l'exercice de l'annexe B proposé en 5ième, il est demandé d'écrire une liste d'informations et non des données. On peut imaginer que l'auteur de l'exercice a utilisé cette expression, car justement la démonstration est totalement absente. Ecrire la liste des informations, aurait le sens d'écrire les données de l'exercice 1. Ce ne serait qu'une lecture de texte ou de figure, les petits pas n'étant, puisqu'il n'y a pas de démonstration, que des inférences éventuelles, inférences d'ailleurs favorisées par la construction de la figure comme nous allons le voir plus loin. Le mot données ne renvoie pas, lui, au texte de la démonstration, c'est-à-dire au statut des propositions.

Nous venons d'essayer pour clarifier notre propos, de distinguer données et hypothèses.

A ce sujet nous pouvons observer des pratiques différentes dans les classes.

Le mot données est souvent utilisé volontairement par les enseignants à la place du mot hypothèses parce que ce dernier a un autre sens dans le langage quotidien. Et dans l'écriture du texte de la démonstration lui-même (ou ce qui en tient lieu : tableau, liste de propositions avec leur statut,...), on peut trouver le mot données. Mais nous avons pu aussi rencontrer le cas où on écrit d'abord les données, indépendamment de la démonstration, puis dans le texte de la démonstration c'est l'expression "par hypothèse" qui est utilisée.

- Un hiatus entre l'écriture préalable des hypothèses et l'écriture du texte de démonstration : les "petits pas".

Examinons maintenant la proposition du manuel Pythagore déjà cité (Annexe A). Si dans l'exercice 1 la question "écrire les données" était en quelque sorte ouverte, ici il s'agit seulement de compléter des hypothèses. Aucune question ne se pose sur ce qui est à écrire et cette écriture se fait de façon totalement indépendante de la suite. On peut se demander s'il s'agit vraiment d'hypothèses au sens où nous l'avons entendu ci-dessus.

Pour faire la figure, nous utilisons la définition d'une hauteur d'un triangle, ce qui nous amène à se dire que nous devons tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A. Le codage sur la figure du manuel indique l'angle droit. Dans les hypothèses les auteurs attendent que nous écrivions (AH) $\perp$ (BC). Finalement via la figure sans doute, nous en sommes venus à écrire, dans nos hypothèses, une traduction du mot hauteur en nous aidant de la définition. Remarquons aussi que nous sommes passés à un langage utilisant des symboles et que nous avons introduit l'écriture (BC) désignant une droite dont on ne parlait pas dans le texte.

Si ensuite on regarde la démonstration proposée dans le manuel, le premier pas du schéma correspond justement à ce passage déjà effectué lors de la construction de la figure, du codage et de l'écriture des hypothèses : "(AH) $\perp$ (BC)" figure dans les hypothèses et est aussi conclusion du premier pas. Le manuel a exigé ici, dans la démonstration, ce que nous avons déjà appelé un petit pas, c'est-à-dire un pas dans lequel l'énoncé tiers est une définition. N'y a-t-il pas ici une contradiction ? N'oublions pas que la compréhension du statut des différentes propositions est fondamentale pour qui s'engage dans la démonstration. On voit ici que ce premier pas n'est pas compatible avec la tâche préalable d'écriture des hypothèses.

Dans le cas ci-dessus nous avons un petit pas qui s'appuie sur une définition. Nous pouvons en rencontrer d'autres, qui sont encore des glissements sémantiques, mais qui portent cette fois sur la désignation des objets. Ainsi par exemple on demandera à l'élève d'expliquer que le point X étant sur la droite (YZ), on peut aussi désigner celle-ci par (XY).

L'argument souvent avancé par certains enseignants pour exiger les petits pas en début d'apprentissage est que, l'absence de ces petits pas étant considérée comme des "lacunes" dans la démonstration, des raccourcis opérés par des experts, et l'élève étant en train d'apprendre, il est nécessaire que les implicites soient levés pour que l'élève prenne connaissance du texte complet. Ainsi on voit cette exigence à l'œuvre en début de quatrième, abandonnée en fin d'année car alors, les élèves seraient en mesure de laisser eux-mêmes des "blancs" dans le texte de démonstration.

A vrai dire, à l'usage, cette sorte de pas, en début de texte (mais aussi à l'intérieur), reste fort souvent implicite lors de la rédaction de la démonstration. "Pour celui qui rédige une démonstration, certaines propositions veulent dire exactement la même chose. Dans ce cas, le texte peut comporter un passage d'une formulation à une autre sans aucun intermédiaire ; il y a simplement reformulation d'une idée et non un pas de démonstration sous-entendu"[14]. Pourquoi exiger des élèves l'explicitation de ce "glissement sémantique"? Ce n'est pas lui qui va permettre à l'élève de comprendre le rôle des énoncés tiers (théorèmes) dans un pas de démonstration puisque la conclusion de ce pas n'est qu'une autre expression de l'hypothèse. Preuve en est faite par ce hiatus observé dans le manuel.

Enfin, un autre argument qui irait dans le même sens, serait de considérer ces petits pas comme relevant des "évidences" dont parlent les programmes, évidences qu'il vaut mieux, aussi, éviter de démontrer en début d'apprentissage, si on veut que la démonstration n'apparaisse pas comme un exercice arbitraire et gratuit.

Nous venons de repérer, entre l'écriture des hypothèses et la démonstration, une discordance. Il va sans dire que l'expert ne voit aucune discordance dans ces écritures, et que le glissement "hauteur-perpendiculaire" a son intérêt : permettre l'activation des propriétés qui vont intervenir dans le texte de la démonstration. Mais pour l'élève apprenti qui doit décrypter ce qui est demandé et tout apprendre du statut des énoncés, cette discordance peut être fort gênante.

---

[14] Houdebine (2001)

Finalement, demander aux élèves d'écrire les hypothèses systématiquement avant de chercher la démonstration ne nous paraît guère pertinent : cette écriture, pour un expert, est totalement intégrée à la recherche et à la rédaction de la démonstration, ce que nous avons vu avec l'exemple 1. Le statut d'hypothèse se définit en rapport avec un projet de démonstration, c'est par le rapport qu'elles entretiennent avec les autres propriétés conjecturées ou déjà démontrées que les données deviennent des hypothèses, c'est-à-dire prennent leur statut dans la démonstration. Ce sont elles aussi qui permettent le choix des propriétés à utiliser. La sélection des données qui vont devenir hypothèses, leur expression, leur mise en forme pour être intégrables dans le texte de démonstration, va se faire pendant toute la recherche, et sans doute ce travail se terminera réellement en même temps que la rédaction de la démonstration. Nous reviendrons sur ce point dans l'examen des copies d'élèves.

Ajoutons que nous avons attribué le "hiatus" entre l'écriture des hypothèses et la démonstration dans l'exercice 2 à la construction de la figure. Cette construction peut donc interférer avec l'écriture des hypothèses, puisque les définitions des objets sont nécessaires pour les construire. De ce fait, il semble que de nouvelles "sources" d'hypothèses interviennent, le texte et la figure avec son codage, nouvelles "sources" qui peuvent être difficilement ignorées.

Examinons donc davantage les relations entre construction de la figure et démonstration.

2) Faire la figure et la coder : une entrée en force dans la démonstration

- Construction de la figure

On ne peut éviter que la construction de la figure s'appuie sur des définitions, comme nous venons de le voir pour le tracé de la hauteur. Signalons qu'elle peut aussi s'appuyer sur des théorèmes.

Ainsi, toujours dans l'exercice 2, pour tracer la parallèle à (AH), comme nous ne disposons pas d'instrument pour dessiner cette parallèle, nous pouvons nous appuyer sur la propriété suivante : "Si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles", et dessiner (avec l'équerre ou à vue d'oeil) une perpendiculaire à (BC). C'est ce qui s'est passé dans un stage où nous avions demandé aux participants de réaliser cette figure sur une page entière où I était "loin" de H. Le lecteur peut s'y essayer. Certains élèves peuvent utiliser le même cheminement, même s'il leur est difficile d'expliciter leur démarche. On voit alors tout de suite la difficulté : c'est la réciproque (ou presque) de ce théorème qui va servir dans la démonstration ultérieure !

Notons que le croquis à main nue ne lève pas nécessairement l'ambiguïté. Ces croquis cherchent toujours à être un peu vraisemblables, c'est-à-dire que "les parallèles vont paraître à peu près parallèles". Le dessinateur est donc ramené à tracer deux parallèles à vue d'œil, ce qu'il peut faire directement ou en passant par la perpendicularité selon le contexte et l'efficacité de ses images mentales.

Cependant nous pensons que l'exigence d'une construction soignée ne peut qu'amplifier le problème car alors c'est passer d'un tracé privé fortement dépendant du dessinateur, à une construction officielle qui ne pourra plus être passée sous silence. Dans une classe de 4$^{\text{ième}}$ qui avait déjà travaillé sur le théorème de la droite des milieux, le professeur, avec le projet d'avancer vers "la réciproque", a demandé de construire un triangle, de prendre le milieu d'un côté et de construire soigneusement la parallèle à un des deux autres côtés. Ensuite on allait constater, démontrer (?) que la dite parallèle passait par le milieu du troisième côté, mais cela ne fut pas dit. Construire une parallèle est toujours difficile, il n'y a pas, semble-t-il, de méthode très fortement plébiscitée. Aussi cherchait-on comment construire cette parallèle, quand un élève, fort du théorème direct déjà appris, a proposé de prendre le milieu du troisième côté et de joindre les deux milieux. Si on trace ainsi la parallèle on voit à quel point la démonstration initialement demandée est orientée[15] par les données issues de cette construction.

Non seulement la lecture de la figure, une fois celle-ci faite ou fournie avec l'énoncé, intervient dans la démonstration, mais la construction aussi, par les initiatives qu'elle demande, les propriétés ou définitions qu'elle utilise, interfère fortement avec la démonstration.

- Codage

Revenons maintenant à l'exercice 1.

Pour tracer la médiatrice, on utilisera un compas et une règle ou bien une règle graduée et une équerre. Chacune de ces deux constructions s'appuie sur une propriété ou une définition de la médiatrice, selon le choix effectué dans le cours. C'est déjà une traduction implicite du mot médiatrice ou le franchissement d'un pas, comme dans le cas de la hauteur de l'exercice 2.

Remarquons que le codage usuel (milieu et angle droit) est cohérent avec le deuxième mode de construction, mais qu'il ne l'est pas avec le premier : celui-ci devrait conduire à coder immédiatement l'égalité des deux longueurs KE et KF. Or ce codage des longueurs, issu de la construction au compas, n'est pratiquement jamais proposé à notre connaissance dans les classes, à tel point que des élèves de quatrième à qui on le propose en milieu d'année scolaire, ne reconnaissent pas la médiatrice[16].

Nous pourrions avancer que le codage est une traduction du texte via la définition des objets ou une traduction de la construction si on a demandé une construction, et que demander le codage, c'est demander cette traduction, c'est déjà accomplir un petit pas. Ce petit pas peut être très "gros" dans certains cas : pensez par exemple au codage correspondant à "G est le centre de gravité du triangle ABC" ! Comme pour l'écriture des données ou des hypothèses, si on nous demande de coder, que coder et où s'arrêter ? Si tel triangle est dit isocèle exige-t-on l'égalité des côtés seulement, peut-on aller jusqu'aux angles ? Nous retrouvons la question que nous nous posions quant aux données et aux hypothèses quand nous avons examiné l'exercice 1, sauf que cette fois, le codage se réfère non seulement au texte mais aussi à la construction.

Or si nous observons le travail d'une personne experte, elle fait bien une figure et peut la coder. La question "que coder ?" pour elle n'a pas de sens. Elle se pose uniquement pour l'élève à qui le professeur a demandé[17] de coder sans projet de démonstration. En effet, l'expert, d'une part n'a pas à rendre public son codage, le codage de la figure est un terrain de recherche privé, d'autre part le travail ne consiste pas à

[15] On aura sans doute besoin de l'axiome d'Euclide qui n'est pas nécessairement énoncé dans les classes.

[16] Claude Cattez, mémoire professionnel, IUFM Grenoble, 2003.

[17] En 6^{ième} et 5^{ième} des exercices écrits demandent explicitement le codage ; en 4^{ième}, cette demande n'est pas faite à l'écrit mais souvent à l'oral par le professeur, comme nous avons pu l'observer.

chercher que coder, mais à chercher en codant, et à exercer une vigilance épistémique sur les propositions que le codage traduit et qui entreront dans la démonstration. L'élève qui effectue ce codage indépendamment du projet de démonstration ne peut en comprendre la fonction.

Finalement coexistent différentes "sources" de données : le texte, la figure et la construction de la figure, le codage. Par exemple ceci amène à passer de hauteur à perpendiculaire par la construction, puis de perpendiculaire à angle droit pour le codage si le codage évoque plus l'angle droit chez celui qui code.

Nous l'avons vu, l'écriture des données à partir du texte est déjà très arbitraire, la construction de la figure et le codage (avec ses signes et sa "grammaire" particulière[18]) ne peuvent qu'augmenter cet effet car en effectuant ces tâches sans référence à la démonstration, l'élève ne peut comme l'expert, exercer une vigilance sur le statut des propositions, à la fois par rapport au texte final, et conjointement selon la "source" dont sont issues ces propositions. Il ne peut le faire car il ignore ce qu'est la démonstration bien sûr, mais l'essentiel ne lui est-il pas aussi caché par ces tâches préalables ?

Enfin, nous avons aussi vu que codage et construction, écriture des hypothèses, peuvent, dans certains cas, éloigner d'une piste de démonstration si ces opérations se font pour elles-mêmes, sans rapport avec la démonstration.

Pour l'expert, ces tâches préalables n'ont rien de préalable : elles entretiennent des liens étroits entre elles et s'ancrent complètement dans la recherche et l'écriture de la démonstration.

Pour la classe, le travail de démonstration a été découpé. Les tâches en question perdent alors leur sens et leur fonction car le projet qui sous-tend le travail, l'intentionnalité ne se découpe pas. Et l'élève qui en reste au décryptage et à l'exécution de ces tâches explicites, qui ne reconstruit pas le projet implicite, peut-il comprendre ce qu'est le texte de démonstration visé ? En particulier peut-il exercer un contrôle sur les propositions et leurs différents statuts pendant la recherche et lors de l'écriture du texte ?

Essayons de voir sur des copies comment se traduisent toutes les difficultés et ambiguïtés que nous avons soulevées.

III. Analyse de productions d'élèves

Examinons maintenant deux productions d'élèves. Les interprétations que nous allons faire sont bien sûr sujettes à caution mais elles ont l'intérêt de permettre éventuellement une action du professeur. Ces travaux d'élèves sont issus de la même classe[19] de 4$^{\text{ième}}$ et sont les réponses à un même exercice que voici :

Exercice 3

---

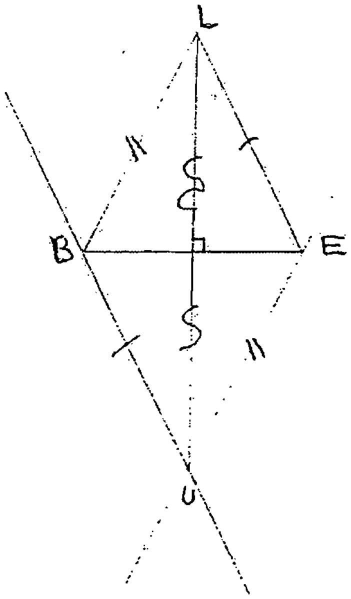
[18] Un même signe peut être traduit par angle droit, perpendiculaire, hauteur,....un autre par longueurs égales, milieu, équidistants, ..., les deux signes selon le contexte, par médiatrice, triangle rectangle isocèle, ...

[19] Elles nous ont été proposées par l'enseignant, nous ne sommes pas à l'origine du choix de ces copies dans la classe, ni d'ailleurs du choix de l'exercice ; ces matériaux nous ont paru très riches.

BLE est un triangle isocèle de sommet L. La parallèle à (LE) passant par B et la parallèle à (LB) passant par E se coupent en U. Prouvez que (BE) et (LU) sont perpendiculaires.

1) Copie d'Yvan

II hypothèses : BLE est isocèle, la parallèle à (LE) et la parallèle à (BL) passe par E et se coupe en U



je sais que	règles	j'obtiens
BLE est isocèle	car il a 2 côtés égaux de même longueur	BLE isocèle
(LU) ⊥ (BE)	(LU) est perpandiculaire à (BE) car il y a au moins deux angles droit et parce que L et U coupent BE en son milieu	BLEU est un losange

Remarquons tout d'abord que l'élève a effectué les tâches examinées ci-dessus.

- *Il a cherché à écrire les hypothèses* : pour cela, il a opté pour une "copie" de l'énoncé. On voit que cette copie est très approximative. Le texte de départ enchevêtre plusieurs propositions et, si on cassait cette forme textuelle pour obtenir des propositions recyclables dans une démonstration (pour qui connaît la démonstration....), on pourrait obtenir par exemple : "(BU) est parallèle à (LE)" et "(EU) est parallèle à (LB)". On voit tout le travail difficile à réaliser sur l'énoncé. Difficile pour au moins deux raisons. Tout d'abord il semble que, sur la copie, l'écriture des hypothèses ait été réalisée *avant* la construction de la figure[20] ; or nommer les deux parallèles se fait en s'aidant d'une lecture de celle-ci. Ensuite il est nécessaire, pour écrire sous cette forme, d'anticiper déjà la démonstration. En effet, pour qui a compris la structure d'une démonstration, c'est-à-dire le traitement des propositions qui y est fait, il est clair qu'on n'utilisera pas dans le texte de la démonstration la phrase donnée dans l'énoncé de l'exercice. On illustre donc encore une fois l'idée précédente, à savoir que l'écriture des hypothèses n'est pas indépendante de la démonstration qui va suivre, et, de plus, on se rend compte qu'il est nécessaire de savoir *déjà* ce qu'est une démonstration.

- *Il a réalisé la figure et l'a codée.* Remarquons que le parallélisme ne peut être codé. Le codage réalisé est associé à des propriétés effectivement vraies, mais de statut totalement différents si on se réfère au problème posé[21]. L'hypothèse triangle isocèle n'a pas été traduite par l'égalité des longueurs. La conclusion sur la perpendicularité est codée ainsi que des propositions qui s'écartent de la démonstration.

  Remarquons que tous ces éléments de codage sont loin, et de l'énoncé de l'exercice, et du texte/tableau de la démonstration. En relation avec l'énoncé, seule la conclusion à atteindre est codée, et encore nous ne savons pas si l'élève s'est référé à cet énoncé. Dans le texte, il est fait allusion aux côtés de même longueur mais ceux-ci ne sont pas codés. Le codage effectué est peut-être à mettre en relation avec la proposition "BLEU" est un losange", ce qui renforcerait l'idée que le codage est sans doute indépendant de l'énoncé de l'exercice, relève d'une lecture de la figure et non d'une prise en compte du statut des propositions en relation avec la démonstration à effectuer.

Après ces tâches préalables, l'élève a entrepris la démonstration sous la forme imposée par le maître. Cette disposition permet, à qui connaît la démonstration (mais qu'en est-il de l'élève ?), de parler de premier pas et de dire que dans ce premier pas la conclusion est identique à l'hypothèse. L'élève a écrit ce qu'il savait : le triangle BLE est isocèle. Il donne ensuite une propriété "car il a deux côtés égaux". On voit déjà que, s'il ne fait pas d'erreur sur l'usage du car, il a utilisé une implication, "si un triangle a deux côtés égaux alors il est isocèle", qui ne convient pas ici.

---

[20] L'énoncé, s'il est très difficile "à casser" en propositions recyclables dans la démonstration, est au contraire en cohérence avec la chronologie de la construction : on trace une parallèle, puis l'autre, puis on nomme leur point d'intersection.

[21] On trouvera en annexe C la même figure réalisée en privé par un expert : on voit explicitement, avec le point d'interrogation, que le statut des propositions liées au codage est contrôlé.

Une première explication possible est peut-être que l'élève s'est reporté à son action de construction. En effet, faire la figure, c'est construire un triangle isocèle. Or comment construit-on un triangle isocèle sinon en dessinant un triangle ayant deux côtés égaux ? En construisant un triangle ayant deux côtés égaux, *j'obtiens* bien un triangle isocèle. Et on voit tout le malentendu ici : pour le professeur le "j'obtiens" ne relève que du *discours*, que du texte de la démonstration, pour l'élève, le "j'obtiens" relève peut-être, comme il est souvent d'usage dans la vie courante, de *l'action*.

Mais, pourrait-on objecter, le codage n'indique pas que les côtés du triangle sont égaux. Il se pourrait donc aussi que l'élève ait construit un triangle isocèle "stéréotypé", c'est-à-dire à base horizontale, le sommet étant à la verticale au-dessus du milieu de cette base, ce moyen étant extrêmement économique pour obtenir (!) un triangle isocèle[22]. Cela ne change pas le sens du "j'obtiens" : j'obtiens par l'action, j'obtiens sur mon dessin.

Les "je sais que", "j'obtiens" *du professeur* marquent, pour celui-ci (et lui seulement...), à la fois le statut des propositions et l'activité de démonstration elle-même, activité qui se situe au niveau du discours. Ce n'est pas le cas de l'élève.

Pour ce qui est du statut, l'élève ne sait pas ce que recouvre le "je sais que" du professeur. Il a bien indiqué des propriétés de la figure qu'il savait être vraies, *toutes* les propositions écrites sont vraies. La "règle" est là, selon lui, pour justifier, expliquer ce savoir :

- On sait qu'il s'agit d'un triangle isocèle. Comment le sait-on ? "*car* il a deux côtés égaux". D'où vient cet argument des côtés égaux ? Soit parce qu'on l'a construit directement avec deux côtés égaux, soit parce qu'on sait que c'est une conséquence du mode de construction, soit parce qu'on le lit sur la figure, soit parce que l'on fait appel à son cours, soit ..... Remarquons que l'expression "BLE est isocèle car il a deux côtés égaux" est le type de réponse souvent demandée en 6$^{\text{ième}}$ pour justifier ou expliquer. Cela pourrait être la réponse d'un élève à l'exercice étudié dans la partie I. (Rapprochons aussi "ce pas" des "petits pas" dont nous avons déjà parlé : est-ce un simulacre de petit pas ?)

- On sait que (LU) et (BE) sont perpendiculaires, les raisons de ce savoir sont multiples. Dans la copie, tous les arguments s'ajoutent comme dans une argumentation. D'où sont issues ces "bonnes raisons" ? Pas d'une démonstration, mais sans doute d'une lecture sur le dessin, de souvenirs de cours (perpendiculaire = angles droits), et peut-être déjà d'une petite expérience de la démonstration et des propositions manipulées dans ce genre de texte, même si les objets sont incorrectement désignés. Cette expérience n'aurait d'ailleurs permis à l'élève, semble-t-il, que de retenir les traits de surface de la démonstration/tableau du professeur pour y satisfaire.

- Remarquons encore que pour cet élève de 4$^{\text{ième}}$, il y a un lien entre la proposition de la première colonne et celle de la seconde, ce lien étant marqué par le "car" qui permet d'englober en une seule phrase les deux propositions, mais il n'y a aucune marque textuelle d'un lien entre les deux premières colonnes et la troisième. Ce

---

22 La photocopie ne nous permet hélas pas de voir les lignes éventuelles de la feuille.

qui peut conforter l'hypothèse faite selon laquelle ce qui relève du "j'obtiens" est à rattacher à la figure et à l'action sur celle-ci et non, comme le professeur le souhaiterait, à rattacher aux propositions des deux premières colonnes.

- Enfin notons que les deux "pas" sont indépendants, ne s'enchaînent pas.

Pour l'élève, un pas, ou plutôt une ligne dans le tableau, aurait donc la structure suivante :

Proposition désignée par "règle" => "proposition désignée par "je sais que", la troisième colonne donne une proposition indépendante de ces deux là.

La structure ternaire n'est pas respectée malgré les trois colonnes, le statut des propositions non plus malgré les indicateurs de statut. Remarquons d'ailleurs qu'aucun théorème n'est véritablement cité. Cependant les "car" cachent peut-être une définition ou un théorème implicite. Et peut-être pourrait-on aider cet élève en partant de ce pas atrophié (autour des deux premières colonnes), et en s'appuyant sur la valeur (vrai, faux, vraisemblable....) qu'il accorde aux propositions car il semble bien qu'il prenne position quant à la valeur de ces propositions : "ce qu'il sait", c'est-à-dire ce qu'il juge vrai, est pour lui la conclusion d'une argumentation, d'un raisonnement. Encore serait-il nécessaire de sortir du tableau pour que cette prise de position puisse réellement se faire.

Quant à l'activité de démonstration elle-même, elle apparaît surtout, dans ce cadre fixé par le professeur, par l'usage du "je" et du verbe "obtenir". Entendons-nous : nous avons parlé ci-dessus de l'action de l'élève, nous désignions par là, les opérations relatives à la construction de la figure avec l'usage des instruments, le codage, l'écriture des hypothèses, le tracé du tableau... Rien à voir avec ce que nous désignons ici par activité de démonstration : il s'agit ici de l'activité de celui qui construit le texte. Nous n'incluons pas dans cette activité la recherche de la démonstration car nous suivons en cela Duval : la découverte de ce qu'est une démonstration et en quoi elle prouve "commence dans la phase, *si difficile*[23], de rédaction, après la phase de discussion qui a permis de repérer les théorèmes à utiliser pour démontrer et alors même que les élèves pensent "avoir vu" ou compris les explications orales correspondant à la solution mathématique"[24].

Le "je" et le verbe "j'obtiens" du professeur marquent donc l'activité de celui qui construit le discours. Or ces mots, nous l'avons déjà dit, peuvent renvoyer, pour qui ne connaît pas la démonstration ou qui n'a pas de pratique de l'écrit, à des actions comme celles réalisées par l'élève, qui n'ont rien à voir avec le discours. On dit bien à l'élève de ne pas lire sur la figure, mais sait-il pour autant ce qu'il doit faire ? S'agit-il seulement d'un "faire de l'écrit" qui serait seulement réponse aux consignes du professeur ? Par ces mots empruntés au langage naturel, "je" et "j'obtiens", le professeur se positionne lui-même dans son discours, travaille, "sculpte" son texte, tout en restant dans le cadre sous-jacent d'une structure qu'il connaît, celle d'un texte de démonstration.

On peut finalement penser, au vu de ce qui précède, que l'élève se trouve confronté, pour la rédaction proprement dite du texte/tableau, à plusieurs problèmes :

---

23 C'est nous qui soulignons.

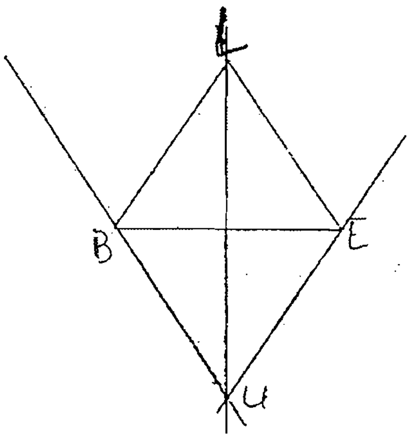
24 Duval R. (2001)

- ne pas confondre, malgré les mots utilisés, deux types d'activité, et sortir de l'action relative à la construction de la figure pour passer au discours écrit.
- faire fonctionner ces mots qui désignent à la fois le statut des propositions dans le discours écrit et l'activité d'écriture du texte.
- entrer dans une pratique de l'écrit, se positionner face à cet écrit, vivre "une expérience mentale", créer, comme le dit Duval.

Mais tout cela est-il possible avec les mots d'autrui et la forme tableau ?

A vrai dire ces problèmes sont ceux du professeur. L'élève, lui, essaie de répondre au mieux selon sa lecture du contrat didactique et dans le cadre fixé par le professeur.

2) Copie de Farida



hipotèses
- BLE es.t isocel
- la parallèle à (LE) passe par B.
- la parallèle à (BL) passe par E et se coupent en U.

je veux prouver que (LU) ⊥ (BE)

hypotèse	or règle	donc conclusion
BLE est un triangl isocel	il a deux cotés de même longueur	donc UB = UE.
La parallèle à (LE) passe par B. La parallèle à (BL) passe par E et elle se coupent en U.	si elle sont parallèles 2 à deux et ont la même longueur	LEUB est un losangle
LEUB est un losange	or un losang a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement	(LU) ⊥ (BE)

Examinons de façon succincte cette copie en comparant avec la précédente. Là encore, l'élève a effectué la figure, écrit les hypothèses, monté le tableau/démonstration ; seul le codage n'apparaît pas.

L'écriture des hypothèses a été une réécriture du texte sous forme de liste, ce qui amène à une incorrection de langage dans la troisième hypothèse "la parallèle à (BL) passe par E et se coupent en U". Nous avions déjà souligné la difficulté relative à cette phrase[25]. Nous en retrouvons la trace à la fois lors de l'écriture des hypothèses et dans le texte de la démonstration : l'hypothèse écrite a été recopiée telle quelle alors qu'une autre forme aurait été la bienvenue (que désignent le pronom "elles" de la règle ?). Nous observons bien ici que la transformation des données en propositions intégrables dans le texte de la démonstration n'est pas une évidence.

La structure de la démonstration est respectée : trois pas, conclusion du deuxième pas recyclée en hypothèse dans le troisième, ... On peut remarquer que le statut des propositions n'est pas indiqué par les mêmes mots que dans la copie précédente : "règle" figure encore mais "hypothèse" remplace "je sais que" et "conclusion" remplace "j'obtiens". Ces mots ne relèvent que du discours[26].

En tête du tableau deux connecteurs marquent aussi le statut des propositions : "or" qui introduit la règle et "donc" qui introduit la conclusion dans un pas. Chacun de ces connecteurs étant répété une fois à l'intérieur du tableau, on peut penser que l'élève est prête à passer à l'écriture du texte sous sa forme habituelle et qu'elle est contrainte par le tableau.

Cependant le passage n'est pas aussi évident.

Tout d'abord les deux premières règles ne sont pas explicitement citées. Si pour écrire un texte ordinaire, on garde l'expression "*il a deux côtés de même longueur*", alors cette expression devient conclusion du pas et cette "règle" (ici la définition du triangle isocèle - c'est un petit pas ou un glissement sémantique -) sera sous-entendue : *"BLE est un triangle isocèle, il a [donc] deux côtés de même longueur"*. Si au contraire on veut garder le connecteur "*or*", on citera in extenso la définition : *"BLE est isocèle. Or un triangle isocèle a deux côtés égaux...."*.

Enfin notons que, dans le tableau, il n'y a pas de connecteur entre deux pas, que ceux-ci soient indépendants comme les deux premiers ou aient une proposition commune comme les deux derniers. Dans une forme habituelle de texte, il est fort peu probable que l'on écrive deux fois, côte à côte, que LEUB est un losange[27].

On voit donc que le passage au texte va nécessiter encore un travail important d'écriture et que l'élève va devoir s'affranchir de certaines contraintes du tableau, même si ce tableau lui a peut-être permis de comprendre la structure de la démonstration.

---

[25] Sur la figure de l'annexe C, l'expert a nommé les parallèles indépendamment des points.

[26] Il ne faudrait pas en conclure que les expressions du type "je sais que..." sont à bannir. Au contraire, nous pensons qu'ils peuvent indiquer la position de l'élève lors de ce travail d'écriture si ces mots sont <u>*ses propres*</u> mots. Les mots "je sais que...", "j'obtiens.." paraissent plus simples que les mots "hypothèses" et "conclusion", mais cette simplicité n'est qu'apparente : elle peut cacher le véritable travail à effectuer.

[27] Nous avons vu dans un collège, les textes de démonstration proposés aux élèves, sous forme de liste de propositions avec le statut de chaque proposition écrite avant celle-ci, ce qui donnerait ici :

- Données : BLE est isocèle en L
- Propriété : un triangle isocèle a deux côtés de même longueur
- Conclusion : LB=LE
- Données : (BU)//(LE) et....

et ainsi dans une ligne on peut être amené à répéter la ligne précédente ; aucun connecteur n'est utilisé dans ce texte.

Ajoutons que ce n'est que par l'écriture du texte que l'élève comprendra la forme adéquate à donner aux hypothèses.

Conclusion

La lecture de ces copies d'élèves nous conforte dans les conclusions de l'analyse a priori. Nous avions identifié l'articulation des tâches préalables et de la démonstration et beaucoup des observations effectuées sur les copies peuvent s'interpréter en terme d'absence ou de difficulté d'articulation justement.

Cette lecture nous a aussi permis d'aller plus loin quant au lien "construction de la figure/démonstration". Nous avions dit que la construction de la figure nécessitait l'usage de propriétés qui vont interférer avec la démonstration. Nous avions dit aussi que cette figure était une nouvelle source de données avec toutes les ambiguïtés et implicites liés à ces données quand il fallait les écrire sans projet. Mais c'était encore rester sur notre terrain mathématique en ignorant les malentendus possibles ou certaines difficultés.

Avec la copie d'Yvan, nous mesurons toute l'étrangeté pour l'élève des exercices demandés par le professeur : l'un se place sur le plan de l'action (de construction), l'autre se place sur le plan du discours. Le découpage des tâches et la forme imposée du tableau avec le vocabulaire afférent n'aident pas l'élève et même maintiennent le malentendu en occultant le but de l'exercice qui est l'écriture d'un texte qui n'a rien à voir avec l'action de construction de la figure.

Avec la copie de Farida, nous mesurons aussi tout le chemin qui reste à parcourir pour arriver au texte à partir de toutes les aides, tableaux, schémas,... censés rendre visibles la structure du texte final. Ce passage nous paraît fortement sous-estimé, l'écriture du texte nous paraît minorée dans ce genre de pratiques qui découpe le travail de démonstration.

Ce morcellement, ce découpage de l'activité de démonstration, la forme souvent imposée pour l'écriture du texte sont censés aider l'élève[28]. Mais pour l'élève, chacune de ces actions est une tâche en soi ; s'il les réalise l'une après l'autre de façon indépendante car elles lui sont présentées ainsi, elles deviennent arbitraires, ambiguës, perdent leur fonction quand on les compare aux actions de l'expert qui, elles, sont toutes contrôlées, coordonnées, tendues vers la construction de la démonstration. Il est très douteux que l'assujettissement à ces contraintes, souvent perçues comme but en soi par les élèves, leur permette d'acquérir plus facilement le positionnement requis pour la recherche et l'écriture (d'un texte qui est loin des pratiques langagières des élèves de 4$^{\text{ième}}$). Le projet ne peut se découper et pour cela, chacune des actions ainsi présentée aux élèves reste isolée, leur articulation, essentielle dans cette activité complexe qu'est la démonstration, est occultée.

28 On pourrait comparer ce projet d'aides avec les aides à la résolution de problème proposées par J. JULO, aides qui ne parcellisent pas mais s'insèrent dans la complexité de la résolution ; cf. JULO (1995) et JULO (2001).

Il y a fort à parier que les élèves qui réussissent dans ce cadre contraignant sont ceux qui anticipent et rétablissent le projet inhérent aux tâches proposées et donc s'extraient de ce cadre, soit seuls, soit parce que le professeur a des interventions complémentaires auxquelles nous n'avons pas accès dans le petit espace de cette étude[29]. Et ceux qui réussissent peuvent être, comme le disent Matheron et Noirfalise (2002), ceux qui ont une plus grande "sensibilité au contrat didactique", les bons élèves qui perçoivent "les nuances contractuelles du travail qui leur est demandé" et savent repérer l'enjeu de toutes ces tâches préalables et leur articulation avec la démonstration. Les autres, ceux qui effectuent pas à pas ce qui est demandé, parce que ce qui est demandé est à faire (et bien fini une fois fait), ceux-là risquent d'être confortés dans leur rapport inadéquat aux savoirs et à l'école et risquent de ne pas percevoir ce qu'est l'activité mathématique, pour reprendre les mots du programme.

Bibliographie

BAUTIER E. (2002) : A travers les écrits réflexifs des élèves : la complexité négociée d'une situation d'écriture scolaire, *Pratiques n°115/116.*

BECK I. (2001) : Une approche linguistique de textes de raisonnement, *Produire et lire des textes de démonstration,* Barbin E., coll., éditions Ellipses.

BERTHELOT R., SALIN M. H. (2001) : L'enseignement de la géométrie au début du collège, comment concevoir le passage de la géométrie de constat à la géométrie déductive ? *Petit x n°56*

CHARLOT B., BAUTIER E. (1993) : Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques, *Repère IREM n°10*

COPPE S., HOUDEMENT C. (2002) : Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N n°70*

DUVAL R. (2001) : Ecriture et compréhension, pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? *Produire et lire des textes de démonstration,* Barbin E. et al., éditions Ellipses.

HOUDEBINE J. (2001) : Analyse de copies d'élèves, *Produire et lire des textes de démonstration,* Barbin E., coll., éditions Ellipses.

JULO J. (1995) : *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques,* Presses universitaires de Rennes.

JULO J. (2001) : Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? *Actes du XXVIIe Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres,* Grenoble, Université J. Fourier.

[29] Nous n'avons pas examiné ici l'ensemble des pratiques d'enseignement de la démonstration dans une classe.

MATHERON Y., NOIRFALISE R. (2002) : L'aide individualisée, entre système didactique auxiliaire inutile et déficit d'analyse didactique entravant son efficacité et son développement, *Petit x* n° 60.

NOIRFALISE R. (1998) : Etude sur le maniement des énoncés dans une démonstration, *Petit x n°46*

ANNEXE A

Soit un triangle ABC, non rectangle en B. (AH) est une hauteur du triangle ABC et I est le milieu de [BC].

La parallèle à (AH) passant par I coupe (AB) en J.

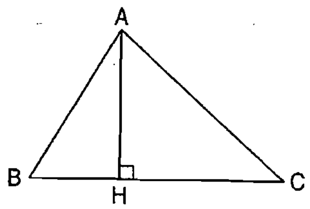
Démontrer que le triangle BJC est isocèle en J.

A. Les hypothèses et la figure

1. Faire une figure assez grande.

2. Compléter la liste des **hypothèses** :

- (AH) $\perp$ ....
- I est le milieu de [.....]
- (AH) ... (IJ).



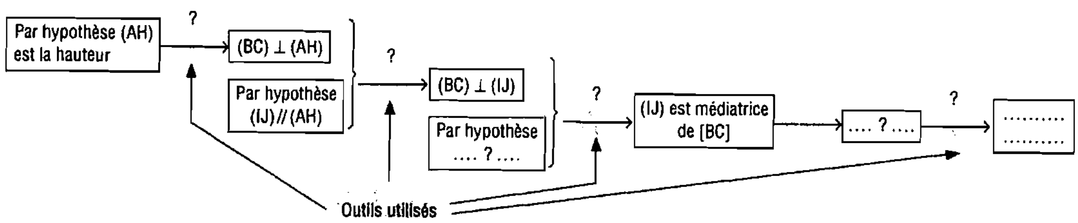
B. La mini-boîte à outils

Utiliser les **Pages bleues** pour écrire les trois définitions et les deux propriétés de la boîte à outils suivante.

....	hauteur d'un triangle
....	définition d'une médiatrice
....	définition d'un triangle isocèle
....	propriété 3 des Pages bleues
....	propriété 4 des Pages bleues (première partie)

C. Le schéma de la démonstration

Reproduire et compléter le schéma suivant.



D. La rédaction

Rédiger cette démonstration.

ANNEXE B

Math 5^{ième}, 2001, Ed Magnard, p.75

Trace un segment [SE] de –cm. Place le milieu O de [SE]. Trace la droite (d) perpendiculaire à (SE) et passant par O. Sur (d), place les points G et M tels que :
OG=3cm et OM=3cm. Trace le quadrilatère SGEM.

a. *Indique, sur la figure, les codages donnés par les informations du texte.*
b. *Ecris une liste des informations données par la figure et dont tu es sûr par simple lecture.*
c. *Ecris ce qui semble être vrai sur le dessin mais qu'il faudrait justifier par des propriétés (ne justifie pas).*

ANNEXE C