UN POINT DE VUE SUR LES SPECIFICITES DU TRAVAIL GEOMETRIQUE DES ELEVES A PARTIR DE LA QUATRIEME : L'ORGANISATION DES CONNAISSANCES EN NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION

Aline ROBERT
Professeur IUFM de Versailles,
Equipe de recherche en didactique
des mathématiques Didirem

Résumé : dans cet article nous présentons une organisation des grands domaines de la géométrie, enseignés dans le secondaire et juste après, en termes de niveaux de conceptualisation (définis en II). Ce classement (développé en III, IV, V, VI) permet peut-être d'aider les apprentis géomètres à construire une certaine cohérence dans tous les matériaux à leur disposition, la variété d'outils pouvant être une des causes des difficultés spécifiques à ce champ des mathématiques (cf I). Le dernier paragraphe (VII) illustre quelques utilisations de cette organisation.

L'objectif de cet article est d'éclaircir des éléments liés à la difficulté des élèves devant le travail géométrique[1], en introduisant une certaine organisation des savoirs et connaissances géométriques en domaines de travail (niveaux de conceptualisation) et en faisant des relations avec des spécificités déjà repérées.

Nous nous restreignons au travail lié aux résolutions de problèmes de géométrie mettant en jeu des démonstrations (même simples). Mais nous ne séparons pas les questions d'apprentissage de la démonstration du reste du travail géométrique, estimant que c'est toute la démarche, du cours aux exercices, en passant par les modes de raisonnement et le niveau de rigueur par exemple, qui fait sens.

Ce travail géométrique est demandé à partir du collège, il est institutionnellement généralisé à partir de la quatrième, et doit être déjà abordé avant. En fait, notre analyse tient compte des programmes du collège, du lycée, de l'université, mais n'est pas limitée à un programme particulier, c'est plutôt l'ensemble des savoirs (et compétences) à

[1] Nous n'abordons pas la question de la pertinence d'un enseignement de géométrie ni celle des contenus des programmes (cf. Perrin par exemple). Nous n'abordons pas non plus les aspects strictement didactiques déjà étudiés dans de nombreux travaux liés au statut de la démonstration ou aux difficultés spécifiques de la géométrie dans l'espace.

développer dans chaque cycle, par delà les variations qui peuvent intervenir, qui est questionné. Nous distinguons dans ces savoirs plusieurs grands domaines de travail, que nous appellerons niveaux de conceptualisation : géométrie « à la Euclide », géométrie affine (resp. affine-euclidienne), subreptice ou affichée, géométries et invariants, géométrie axiomatique. Un tel niveau est caractérisé par un certain découpage des savoirs qu'il permet de mettre en jeu, en termes de définitions, axiomes et théorèmes, de modes de raisonnement et de niveau de rigueur, de types de problèmes. C'est souvent le recours aux nombreux articles sur l'histoire de la géométrie et/ou de son enseignement qui permet de reconstituer ces niveaux, alors que dans l'enseignement actuel un certain mélange des notions peut obscurcir le paysage.

Notre réflexion sur certaines spécificités du travail géométrique proposé et attendu des élèves se fonde ainsi sur ce découpage en niveaux de conceptualisation. Nous interrogeons les activités que les élèves ont à mettre en jeu à partir des énoncés proposés et des outils à leur disposition, à partir des caractéristiques du ou des domaines de travail impliqués. Ce point de vue, partiel, nous permet d'installer une certaine organisation des connaissances peut-être utile.

Enfin, nous ne faisons pas intervenir spécifiquement les nombreuses possibilités de travail sur logiciels, ce pourrait être une suite de cette étude

Dans une première partie nous rappelons quelques spécificités du travail géométrique liées à la nature même de ce qui est en jeu. Dans la deuxième partie nous définissons les niveaux de conceptualisation, cet outil qui va nous servir à proposer une organisation des grands domaines de travail en géométrie. Dans la troisième partie nous présentons un premier niveau de conceptualisation (à la Euclide) qui est développé au collège, en nous référant à ce qui est exposé dans les Eléments d'Euclide. Un bref rappel du travail de Hilbert légitimant le travail d'Euclide fait l'objet de la très courte quatrième partie. Les interventions encore subreptices de la géométrie affine sont présentées en cinquième partie, introduisant le deuxième niveau de conceptualisation envisagé, celui de la géométrie affine et affine euclidienne (sixième partie). Ce sont des exemples d'utilisation de cette organisation (globale) du géométrique qui terminent l'article.

I Quelques spécificités du travail géométrique des élèves (sens des objets et démarche) : d'une appréhension souvent négative aux objets et démarches géométriques et à leurs diversités.

1) Généralités : la géométrie ne laisse pas les élèves indifférents.

Souvent les élèves ont une réaction de rejet particulière vis-à-vis de la géométrie, et expriment des difficultés spécifiques, notamment liées au démarrage des problèmes. Combien de fois n'entendons-nous pas « *j'ai horreur de la géométrie, je ne trouve jamais rien* », ou encore « *en géométrie dans l'espace, je ne vois rien* » ...

Il y a aussi dans ces propos l'évocation du rôle particulier et pas toujours simple des figures et de la perception.

Même si, du collège au lycée, les difficultés évoluent, la géométrie reste souvent un domaine délicat et redouté des élèves, avec de nombreux points « chauds ». La nécessité de démontrer, malgré l'évidence des propriétés lues sur une figure, c'est à dire le travail du passage du « vu au su », est davantage un problème du collège ; la découverte d'une démonstration adéquate et sa rédaction rigoureuse, se posent plus au lycée. Des questions subsistent, toujours renouvelées, sur le rôle un peu obscur des figures : c'est quoi une figure ? à quoi « on a droit » à partir de la figure ? Quand faut-il faire intervenir des cas de figures ?

Et quand au Capes on explique que le travail du vectoriel peut (voire doit) se faire sans distance, alors que la définition des vecteurs au collège fait intervenir leur « longueur », il apparaît encore de nouvelles difficultés, plus cachées au premier abord.

2) Causes des difficultés : manque de définitions des objets ou spécificités des démarches géométriques ?

Pour nous ce n'est pas le sens des objets manipulés qui est en cause, même si les définitions élémentaires ne sont pas données au collège, c'est plutôt la démarche qui nous semble problématique, c'est à dire le travail du géométrique.

Ainsi les objets géométriques font souvent (en partie) sens pour les élèves, en référence à la perception immédiate, ou à l'expérience quotidienne[2], à l'inverse de ce qui se passe dans d'autres champs mathématiques. Mais ceci peut être une source de difficulté : paradoxalement, ce qui est en cause est alors le statut du travail mathématique sur ces objets, dans leur version mathématisée, plus que les objets eux-mêmes. De ce fait, contrairement à la position des tenants de la réforme des mathématiques modernes, ce n'est pas tant sur les définitions initiales que nous mettrons l'accent, même si nous pensons qu'il est bon d'avoir une idée des fondements[3], au moins pour les enseignants, mais sur les différentes démarches possibles en géométrie, notamment sur le rôle de la figure dans chaque domaine, sur la rigueur nécessaire à chaque fois, c'est à dire, encore une fois, sur le travail géométrique dans chaque niveau.

3) Une démarche peu algorithmisée[4], avec des nombreuses adaptations et des choix à faire pour les élèves, peu explicités.

a) De nombreuses adaptations[5] et un certain nombre de choix émaillent le travail en géométrie

i) Il y a peu d'applications immédiates, simples et isolées, des théorèmes du cours.

Les énoncés de géométrie, du fait des types des problèmes qui s'y posent[6], sont rarement réduits à des applications simples et isolées de théorèmes (évidemment

---

[2] Les notions de droite, triangle, cercle, intersection ont des résonances familières.

[3] Et des progressions, pour éviter les cercles vicieux

[4] Voire peu écrite, il peut être difficile d'écrire si on ne trouve rien.

[5] On évoque des adaptations lorsque l'élève ne peut pas appliquer directement une connaissance du cours, doit reconnaître ou modifier ou arranger quelque chose.

préférées par les élèves). Ils demandent très rapidement des adaptations, voire des initiatives (sauf indications trop détaillées et découpage excessif des questions).

Par exemple, les premiers exercices sur le théorème de Thalès en troisième ou sur le théorème de Pythagore en quatrième demandent davantage aux élèves qu'une unique application du théorème sur une figure codée comme celle du cours et dans la même disposition graphique. La notion d'adaptation est évidemment relative au niveau scolaire des élèves, ainsi pour des élèves de quatrième le fait de mettre en fonctionnement le théorème de Pythagore sur un triangle dont l'hypoténuse est horizontale peut représenter une adaptation, alors que plus tard ce n'est plus le cas.

ii) Des adaptations dans le travail de la figure

On trouve des adaptations liées au travail même de la figure, par rapport au dessin réalisé par l'élève (ou obtenu sur l'écran d'un ordinateur), travail de reconnaissance de figures élémentaires dans un dessin complexe, ou repérages de cas particuliers et de cas de figures.

Dans l'énoncé suivant par exemple, la reconnaissance de la configuration (triangles FBI et FJE, puis FDI et FJC) où appliquer le théorème de Thalès une deuxième fois, la première application étant facile à identifier, pose un vrai problème aux élèves.

Soit ACE un triangle, B et D deux points de [AC] et [AE] tels
que les droites (BD) et (CE) soient parallèles.
On appelle F le point d'intersection entre (BE) et (CD).
La droite (AF) coupe (BD) en I et (CE) en J.
Montrer que I et J sont les milieux de [BD] et [CE].

Notons qu'en plus un petit calcul algébrique rend la tâche des élèves non isolée.

iii) Un changement de cadre inévitable pour passer de la figure à la démonstration

Puis vient une adaptation liée au passage de la figure à la démonstration, avec les insuffisances, voire les pièges de la perception : sans aller jusqu'aux problèmes souvent cachés d'existence, d'unicité, les nécessités de réciproque, ou les pièges des fausses évidences liées à la convexité (implicite) de nombreux domaines du plan, il y a des cas où on peut très bien savoir, grâce à la figure, ce qu'il y a à démontrer sans être du tout aidé sur des pistes pour y arriver. On pourrait évoquer un changement de cadre[7] inévitable, entre figure et cadres géométrique ponctuel ou vectoriel ou numérique (trois domaines de travail usuels en géométrie). Ce changement est rendu d'autant plus difficile que le travail dans le premier cadre, travail de type expérimental, n'est pas toujours porteur d'indications pour démarrer le travail dans le deuxième. Il y a certes des problèmes où la figure renseigne sur une démarche géométrique à tenter (par exemple la

---

[6] Avec leur origine historique, liée notamment à l'étude des situations spatiales des corps solides et à leur mouvement et trajectoire, aux besoins en arpentage, astronomie, etc. puis au travail de représentation de l'espace (cf. Bkouche).

[7] Douady R.

considération des droites parallèles renseigne sur la manière d'utiliser le théorème de Thalès) mais ce n'est pas toujours le cas (cf. l'exercice précédent).

iv) De nombreux changements de cadres supplémentaires

Il y a aussi des adaptations liées au fait que, même au sein d'un domaine de travail déjà choisi, plusieurs cadres (outre celui de la figure) interviennent simultanément dans l'application des théorèmes, ne serait-ce que le numérique et le géométrique. Le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès par exemple, qui donnent des caractérisations numériques de propriétés géométriques, amènent naturellement à un travail algébrique au sein du géométrique dès lors que des longueurs inconnues sont introduites.

Mais il peut y avoir « pire », par exemple l'utilisation de l'étude d'une fonction au milieu d'un problème de géométrie.

Donnons une illustration, à propos d'une démonstration d'une conjecture d'Erdös Mordell[8].

Dans un triangle ABC, un point O donné intérieur au triangle
est projeté orthogonalement en P, Q, R sur les côtés [BC],
[CA] et [AB]. Il s'agit de montrer que
$2(OP + OQ + OR) \leq OA + OB + OC$.

Une symétrie par rapport à la bissectrice intérieure issue de A et l'utilisation d'un théorème de Pappus sur les aires qui généralise en quelque sorte le théorème de Pythagore, amènent à une première inégalité, où a, b, c désignent les longueurs des côtés [BC], [CA], [AB] :

$$OR\, b + OQ\, c \leq a\, OA$$

En travaillant de même à partir des trois sommets, on a donc, en additionnant les trois inégalités obtenues

$$OP\,(c/b + b/c) + OQ\,(a/c + c/a) + OR\,(a/b + b/a) \leq OA + OB + OC$$

On a donc travaillé en géométrie, mais en utilisant aussi des calculs d'aires.

Le minuscule jeu de cadres qui intervient maintenant (et dont j'ai pu vérifier que bien des étudiants ne le trouvent pas spontanément) consiste à passer en analyse, à reconnaître qu'on a la somme de trois valeurs de la fonction $(x + 1/x)$ et à montrer que cette fonction est minorée par 2 sur $\mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

v) Des changements de points de vue

Enfin les élèves ont à faire de nombreux changements de points de vue, moins naturels qu'en analyse, qui interviennent en géométrie : passer de « X appartient à la

[8] Repères-Irem n° 35, Le théorème d'Erdös-Mordell par la méthode des aires, J.L. Aymé

droite (AB) » à « A, X, B alignés » peut s'avérer indispensable pour bien démarrer une stratégie[9], et ce n'est pas acquis instantanément par les élèves.

En géométrie, ainsi, souvent le fait de changer de point de vue, en renversant les rôles, amène à de nouvelles stratégies. C'est ce que nous appelons « dissymétriser ».On remplace le fait de démontrer que trois droites (cercles) concourent par le fait de trouver un point commun à ces droites (cercles), ou encore on cherche à montrer qu'un point commun à deux droites (deux cercles) est sur la (le) troisième...

Nous avons développé dans Robert (1995) l'exemple de la démonstration du fait que l'orthocentre H d'un triangle vérifie la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Un premier changement de point de vue consiste à montrer que le point M qui vérifie la relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ est l'orthocentre (dissymétrie).

Puis on réfléchit à une manière vectorielle de traduire qu'un point est orthocentre, alors que la première idée est d'exprimer que le point est l'intersection de deux hauteurs (c'est donc un changement de cadres, entre le ponctuel, domaine des points, droites, etc. et le vectoriel).

De même pour chercher le lieu des foyers des paraboles tangentes aux côtés d'un triangle, on exprime d'abord que les projetés de ce foyer sur les trois tangentes, qui sont les côtés du triangle, appartiennent à la tangente au sommet. On change alors de point de vue en exprimant la même chose par le fait que les projetés du foyer sur les trois côtés du triangle sont alignés (dissymétrie). Cela amène à conclure que le foyer appartient nécessairement au cercle circonscrit au triangle... Puis on construit la réciproque.

Un autre exemple est donné par le passage du point de vue des centres des homothéties transformant un point en un autre aux barycentres en changeant ce qu'on regarde sur des points liés à une configuration (d'abord centres d'homothéties)

vi) Des choix de méthodes pour un certain nombre d'énoncés qui le permettent

Lorsque les énoncés comportent une ouverture quant à la méthode à mettre en œuvre, il faut choisir un domaine de travail (propriétés des configurations, transformations, vecteurs, complexes, analytique, par exemple) et des outils adéquats dans le domaine. Plusieurs démarches peuvent souvent conduire à une solution. Certes, si on travaille sur des coordonnées, on se retrouve en terrain assez familier, voire algorithmique, mais on a des calculs fastidieux, voire inextricables, et on ne sait pas toujours bien revenir au problème initial ; mais si, pour le même problème, on travaille sur des transformations, ce qui est souvent économique, on est obligé de les introduire soi-même.

b) Des choix de domaines de travail peu préparés, du fait des programmes dans lesquels la clarté n'est pas faite sur les liens et les différences de ces domaines.

[9] Cf. point de Fermat.

Alors même qu'on change de domaine de travail entre le lycée et le collège (introduction subreptice de l'affine – ou affine-euclidien), ou même déjà entre le géométrique et l'analytique au collège, les programmes invitent à des juxtapositions, voire à des mélanges plutôt qu'à des éclaircissements, à une organisation. Ceci ne facilite peut-être pas les choix des élèves, choix qui du coup peuvent devenir aléatoires[10], ou encore plus fondés sur des critères externes que sur les savoirs en jeu. L'attrait de l'analytique peut être ainsi renforcé par exemple.

Le cas des vecteurs en seconde est très emblématique de cette démarche : on peut trouver à la suite les caractéristiques des vecteurs issues du collège[11] et les axiomes de la géométrie affine, présentés éventuellement comme des propriétés évidentes. Comment comprendre que l'outil vectoriel peut être utilisé, de manière économique, dans un espace sans distance ?

Le cas des angles, qui ne sont pas « les mêmes » au collège et au lycée, est tout aussi ambigu si on n'éclaircit pas le changement de domaine de travail. D'autant plus que l'introduction des nouveaux angles n'empêche pas au lycée de recourir aux angles géométriques si on utilise les relations métriques élémentaires dans les triangles par exemple.

Pour les enseignants et certaines générations d'élèves l'évolution des « prescriptions » des programmes recèle les mêmes difficultés : tantôt on fait appel aux cas d'égalité des triangles, tantôt « on n'a le droit » qu'aux triangles isométriques... Sans parler de la période de la réforme des mathématiques modernes où la géométrie était directement abordée du point de vue affine, c'est à dire par l'algèbre linéaire, sans que les liens entre le « vieux » géométrique et le nouveau soient éclaircis.

4) Vers une explication des difficultés, dans une perspective d'amélioration du travail des élèves, à partir de la prise en compte de l'existence de plusieurs niveaux de conceptualisation en géométrie[12].

Dans ces conditions, notre hypothèse est que justement, la pluralité non pas des géométries mais des grands domaines de travail en géométrie (ce que nous appellerons niveaux de conceptualisation plus loin), ainsi que la nature des types des problèmes à résoudre et les démarches correspondantes, sont une cause intrinsèque, presque épistémologique, de difficultés.

Nous pensons que cette difficulté ne peut être supprimée totalement par des choix pédagogiques, mais peut être questionnée, éclaircie, travaillée en tant que telle, et que cela peut amener à des décisions spécifiques de l'enseignant.

Cette pluralité amène en effet inévitablement les apprentis géomètres à un travail qui comporte, comme nous l'avons dit, des changements de tous ordres (domaines de travail, cadres, registres, points de vue), des reconnaissances, des mises en relation et

[10] Liés au dernier cours de l'enseignant

[11] En termes de direction, sens, longueur

[12] Une analyse de l'emploi du mot dans le programme de l'écrit du Capes laisse voir une certaine souplesse : géométrie du plan, Géométrie, géométrie affine, géométrie vectorielle, beaucoup d'expressions apparaissent sans autre justification.

des mélanges, des choix ou des interprétations, elle est donc liée à l'exercice d'une certaine flexibilité[13] toujours difficile pour les élèves, et dont il faut peut-être aider l'installation. Il s'agit alors non pas de supprimer tel ou tel caractère de la géométrie, en restreignant les programmes, ce qui dénaturerait le travail géométrique, mais de l'éclaircir, de le faciliter, et c'est tout notre propos.

Ainsi, notre pari (ambitieux !) est qu'un travail de réflexion pour éclaircir ces éléments (pluralité des domaines de travail, passages des uns aux autres, rôles des figures, travail sur les différents changements à maîtriser, rigueur attendue dans chaque domaine) peut contribuer à aider la réflexion didactique des enseignants, sur le travail attendu des élèves[14], sur le choix de tâches précisément liées à ce travail, et, de ce fait, aider les élèves, petit à petit, à adopter des démarches adéquates.

Nous allons successivement présenter une définition plus précise de ce que nous mettons sous le mot « niveau de conceptualisation », puis les trois niveaux qui traversent l'enseignement (à la Euclide, affine (affine euclidienne), invariants) – en complétant par un quatrième rarement présent (axiomatique). A chaque fois, nous dégagerons un certain nombre de caractéristiques du travail géométrique correspondant. En annexe, nous montrerons sur quelques exemples comment nous utilisons ces analyses.

II Niveaux de conceptualisation[15] en géométrie

Précisons avant tout que dans les lignes qui suivent, nous ne prétendons pas nous livrer à un quelconque travail original d'historien ou d'épistémologue. Nous utilisons en revanche abondamment les travaux de ce type disponibles sur la géométrie (notamment de nombreux articles de Bkouche, Friedelmeyer, le livre d'Arsac (1998), les contributions de Perrin à la commission Kahane…) et nous tentons d'y lire une certaine organisation du travail en géométrie(s). Pour présenter cette proposition et rappeler notre point de départ, nous n'indiquons que des résumés succincts de ce qui nous intéresse directement, cela reste donc lacunaire.

Un niveau de conceptualisation en géométrie caractérise pour nous, parmi tous les domaines de travail que nous avons déjà évoqués, un domaine assez important, relativement auto-consistant, cohérent, enseigné (ou pouvant être enseigné) au moins en partie : il est spécifié par :

- des fondements (axiomes, originaux ou empruntés à d'autres champs mathématiques comme le numérique ou l'ensembliste) – fondements qui peuvent rester implicites mais qui peuvent être dégagés,
- un corps de définitions (objets), théorèmes, propositions (c'est ce que nous appellerons l'arsenal du niveau),
- des modes de raisonnements, des démarches et un niveau de rigueur,

[13] Ce mot suggère la possibilité de changer, de choisir, d'adapter des outils mathématiques du cours, de mettre en relation ou de mélanger des connaissances, toutes activités plus difficiles qu'une application immédiate, même techniquement fastidieuse.

[14] Ce qu'on appelle les activités des élèves, c'est à dire ce qu'ils ont à faire dans leur tête, en opposition à leurs seules actions ayant des traces matérielles, visibles ou audibles.

[15] Une définition générale est introduite dans Dorier (1997).

- et enfin un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein.

Le travail dans un même niveau de conceptualisation peut se faire dans plusieurs cadres, ponctuel, vectoriel, numérique, analytique, figure, plusieurs registres (coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires ou barycentriques, $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, complexes écrits sous forme algébrique, trigonométrique, géométrique,...).

La cohérence indique qu'on pourrait dérouler sans qu'il y ait de « trous » les démonstrations nécessaires à établir l'arsenal du domaine, en référence aux seuls fondements et définitions initiales. De même pour le champ des problèmes abordés une fois l'arsenal acquis. Ce qui ne veut pas dire du tout qu'il y ait à le faire avec les élèves.

L'intérêt de cette distinction tient pour nous[16] à la mise en évidence d'une organisation des savoirs et connaissances et à ses conséquences sur le travail du géométrique. Cela nous permet de mieux classer les outils disponibles les uns par rapport aux autres, de faire des choix de démarches. Cela nous permet aussi de mieux repérer les changements de domaines, et ne pas les confondre avec les changements de cadres, etc. Enfin cela nous permet d'approfondir ce qui est licite ou non en géométrie selon le niveau. Par exemple dans le niveau de conceptualisation « à la Euclide », du collège, il est indispensable de tenir compte des cas de figures, c'est inscrit dans les fondements. En revanche en géométrie affine, ce n'est pas indispensable si on travaille avec les outils vectoriel ou angles de droites.

Les champs conceptuels introduits par Gérard Vergnaud se définissent à partir de l'apprentissage mathématique des élèves : il s'agit pour l'auteur de fournir un cadre qui « permet de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances chez les enfants et les adolescents ». Les niveaux de conceptualisation que nous introduisons sont beaucoup plus modestes, ils ne sont liés qu'aux savoirs mathématiques tels qu'ils se sont développés dans l'histoire et qu'ils sont présentés dans les programmes. Cependant l'utilisation commune du mot "conceptualisation" indique une préoccupation partagée, celle des apprentissages mathématiques : dans notre cas, la mise en évidence de ces niveaux donne des moyens à l'enseignant pour organiser transversalement les connaissances à acquérir et caractériser le travail géométrique attendu à chaque niveau ; la théorie des champs conceptuels permet aux enseignants de mieux concevoir l'organisation cognitive que les élèves doivent atteindre pour un champ conceptuel donné.

Dans les paragraphes suivants nous allons essentiellement travailler sur deux niveaux de conceptualisation qui traversent la géométrie enseignée du collège aux premières années d'université : la géométrie « à la Euclide » (surtout développée au collège), la géométrie affine et affine-euclidienne (développée en DEUG et au Capes, introduite subrepticement au lycée). Remarquons que ces niveaux ne sont pas imbriqués, même si le corps des problèmes qu'ils permettent de résoudre est en partie commun ; un certain degré de généralité supplémentaire est acquis au deuxième niveau.

De plus, la chronologie scolaire entre ces niveaux n'est pas stricte : certains emprunts partiels à un niveau de conceptualisation pas encore développé à une étape

[16] Nous = les enseignants, et peut-être les élèves.

donnée de la scolarité peuvent être repérés comme nous l'indiquerons (géométrie analytique au collège, juxtaposée à la géométrie à la Euclide).

Le programme d'Erlangen fournit un troisième niveau de conceptualisation en géométrie que nous n'évoquerons que très brièvement ici. Quant à la géométrie axiomatique comme l'a développée Hilbert, elle nous semble aussi pouvoir être candidate à notre catégorisation (quatrième niveau), mais nous ne la développerons pas comme telle dans la mesure où elle n'est presque jamais enseignée.

Les relations entre niveaux de conceptualisation ne sont donc pas de simples inclusions[17] : c'est une autre organisation des savoirs qui est en place, et selon les cas, il s'agit de généralisation (du deuxième au troisième niveau) mais ce peut être aussi une autre centration sur les fondements (du premier niveau au quatrième) ou un changement de ces fondements (du premier au deuxième niveau).

III De la géométrie d' Euclide à la géométrie « à la Euclide », un premier niveau de conceptualisation au collège.

1) La géométrie d'Euclide

Les éléments d'Euclide (13 livres) permettent d'avoir accès à la géométrie d'Euclide[18]. Rappelons-en, de manière schématique, quelques caractéristiques bien connues, organisées selon nos rubriques relatives aux niveaux de conceptualisation.

a) Fondements et emprunts

Il n'y a pas de définitions rigoureuses[19], mais des axiomes et des postulats (« demandes et notions communes »), explicites chez Euclide, permettent de bâtir une géométrie déductive, avec des raisonnements complets.

Rappelons le cinquième axiome dit des parallèles : par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée. Il n'est pas du tout exprimé en ces termes chez Euclide d'ailleurs !

Les nombres non entiers n'existent pas, on travaille sur des rapports de grandeurs, qui inspireront les coupures de Dedekind.

b) Un arsenal (primitif) à la disposition du géomètre (lu de manière moderne) : sans tenir compte de l'ordre dans lequel les éléments sont obtenus, il comporte chez Euclide (en plus des définitions, axiomes et postulats)

- un certain nombre de figures de base (triangles, parallélogrammes, cercles, polygones, polyèdres), ainsi que les coniques,
- des grandeurs (longueurs, aires, angles, volumes),

---

[17] Malgré ce que le mot « niveau » pourrait connoter implicitement – peut-être y aurait-il à modifier ce choix de vocabulaire ?

[18] Nous ne ferons aucune restriction d'ordre historique, comme nous l'avons signalé.

[19] Chez Euclide les définitions sont liées à la perception, au collège on n'en donne pas.

• un certain nombre de théorèmes sur l'égalité et la comparaison de ces grandeurs.

Par exemple les cas d'égalité et de similitudes des triangles sont établis – dont le premier cas[20], qu'en fait on peut admettre, ainsi que l'inégalité triangulaire ; il y a des méthodes qui permettent d'établir des égalités ou des comparaisons d'aires de parallélogrammes, triangles, puis de cercles, avec la méthode d'exhaustion.

• Les théorèmes que nous appelons théorèmes de Pythagore et de Thalès (partie directe et réciproque).

c) <u>Des modes de raisonnements, des démarches, un niveau de rigueur</u>

On est dans le domaine du déductif : à partir de ce qui est établi et des fondements, on construit des preuves (en respectant la logique élémentaire du vrai ou faux).

Les réciproques sont souvent des raisonnements par l'absurde, ou la partie directe est utilisée dans la réciproque, on trouve aussi des analyses-synthèses.

Il n'y a pas de moyen de raisonner sans les figures, donc on doit tenir compte le cas échéant des différents cas de figures. Ceci explique l'importance chez Euclide des constructions des figures, notamment à la règle et au compas.

En ce qui concerne la « rigueur », il y a dans les éléments d'Euclide des « manques » à nos yeux modernes (ceci n'est pas un contresens historique, ni un jugement mais une réflexion d'ordre pédagogique). Les définitions, nous l'avons dit, n'en sont pas ; il y a des raisonnements à partir de figures qui en réalité sont incomplets, et nécessitent d'admettre explicitement « quelque chose » qui est admis implicitement, parce que cela se voit sur la figure. C'est souvent lié à des intersections (continuité implicite) ou à ce que nous appelons maintenant la convexité de régions du plan, ou encore à l'intervention de raisonnements liés à la superposition de figures, où on oublie le cas du retournement et où les propriétés des déplacements sont admises.

Tout le travail d'Hilbert sera, si on peut s'exprimer de cette manière triviale, de « légitimer » le travail d'Euclide, et de montrer finalement que toute cette construction se tient parfaitement, en rajoutant seulement quelques définitions de base et quelques axiomes, ce qui ne modifie pas, *in fine*, le corps des théorèmes obtenus par démonstrations.

d) <u>Types de problèmes.</u>

Ils proviennent de l'étude des situations spatiales et des trajectoires des corps solides (qui deviendront les études de configurations et d'effets de transformations), ou d'études de quadratures pour travailler sur des mesures, tout un travail sur les mesures de grandeurs géométriques, auxquels se sont rajoutés à partir de la Renaissance des problèmes issus des recherches de représentation de l'espace.

On trouve dans les articles de Bkouche de nombreuses précisions sur toutes ces questions, ainsi que dans les articles de Friedelmeyer par exemple.

[20] Justement démontré à partir d'un argument intuitif de superposition (axiome chez Hilbert)

2) Rapports entre géométrie d'Euclide et travail géométrique au collège.

Nous prétendons que la cohérence de l'ensemble des éléments de géométrie du collège[21], le type de travail qui peut être demandé, ressemblent à ceux de la géométrie d'Euclide, même si selon les périodes (mis à part celle de la réforme des math modernes), plus ou moins d'éléments sont développés au collège.

a) Des différences dans les emprunts

Signalons cependant tout de suite de très grosses différences, qui d'ailleurs allègent le travail des collégiens, mais sans en changer la nature : les réels et les ensembles sont supposés implicitement construits, ainsi que certaines transformations[22], en tant que telles.

Précisons encore une fois que Euclide[23], ne disposant pas des nombres (autres qu'entiers positifs), devait se limiter aux rapports de grandeurs. Il n'avait pas de formules d'aires (base x hauteur pour un parallélogramme par exemple). Il avait mis au point toute une théorie des rapports de grandeurs, qui « remplaçaient » les réels actuels, et qui permettaient les comparaisons. Aujourd'hui on utilise les nombres réels, on donne aux élèves les formules donnant l'aire d'un triangle et d'un cercle, et on ne se livre pas aux mêmes détours. Cependant il faut souligner qu'on ne signale pas aux élèves les problèmes liés à la construction et à l'utilisation des nombres réels, légitimant ainsi les théorèmes en acte correspondant.

Ainsi les collégiens ont-ils à leur disposition des formules élémentaires d'aires de rectangle (et de triangles) qui ne peuvent être établies en toute généralité qu'avec les nombres réels – le passage (non trivial !) des rationnels aux autres réels est totalement passé sous silence. Les élèves n'ont pas à connaître explicitement ce degré de généralité, tout comme ils n'ont pas non plus à s'inquiéter des grandeurs qui leur servent quand ils appliquent ces formules, ce qui revient à dire qu'on les admet avec leur généralité[24].

De même pour les transformations, les élèves n'en ont pas explicitement la définition ensembliste (application du plan dans lui-même) mais ils n'ont pas non plus à s'inquiéter de la figure à laquelle ils font subir une transformation donnée, mettant en acte, de fait, cette définition.

Enfin, l'intégration implicite de théorie des ensembles élémentaire permet de savoir quand envisager des réciproques, par exemple dans le cas de recherches très simples de lieux.

b) Un niveau de conceptualisation « A la Euclide »

---

[21] Géométrie analytique mise à part

[22] Applications du plan dans lui-même, non nécessairement bijectives, souvent définies d'abord sur des figures simples.

[23] Nous évoquons Euclide pour aller vite et ne pas utiliser à chaque fois la périphrase « dans les éléments d'Euclide ...»

[24] Un essai de clarification pourrait peut-être pourtant aider les élèves à comprendre certains passages à la limite.

Ce qualificatif « à la Euclide » du niveau de conceptualisation du travail géométrique (qui englobe une grande partie du travail du collège) signifie à la fois

- une proximité des fondements de la géométrie d'Euclide et de celle du collège : pas de (véritables) définitions, des axiomes admis implicitement, éventuellement incomplets, des démarches de type déductif, avec appui sur la figure, des outils, des types de problèmes
- et des différences déjà signalées (surtout grâce aux réels et aux formules qui en découlent, ainsi qu'aux transformations),

Au collège on reprend ainsi une partie de l'arsenal de la géométrie grecque, introduit dans un autre ordre, des figures de base, des transformations initiales introduites explicitement (symétries orthogonales notamment), des éléments admis remplaçant les axiomes[25]. Les théorèmes qu'on peut démontrer sont presque les mêmes, les théorèmes de Pythagore et de Thalès occupant une bonne place. Les démonstrations sont éventuellement actualisées par rapport à celles d'Euclide notamment grâce à une utilisation implicite des réels et de formules d'aires (établies à partir de figures de mesures entières et étendues grâce aux propriétés des réels).

Cela permet de disposer d'une collection de propriétés géométriques élémentaires[26] à partir des triangles, parallélogrammes et cercles[27], qui peuvent être attachés à des configurations de base (sorte de tables de multiplication de la géométrie), ainsi que de relations métriques faisant intervenir des éléments de trigonométrie, « modernes ».

On peut aussi classer les problèmes et retrouver beaucoup de leurs ancêtres (cf. Ovaert, 1983) : problèmes d'incidence[28] (avec ou sans distances), problèmes de transformations (sur des figures), lieux, constructions, contact, optimisation de distances. On aborde surtout les premiers types de problèmes dans la scolarité actuelle.

Signalons pour terminer que paradoxalement on déforme un petit peu le travail d'Euclide, en restreignant sa géométrie à la stricte géométrie euclidienne du collège (mettant en œuvre la distance euclidienne) alors qu'en réalité il a construit un peu plus (certaines de ses démonstrations mettant en jeu des rapports d'aires peuvent avoir une lecture moderne strictement affine, cf. Perrin, 2000).

3) Des difficultés spécifiques du niveau de conceptualisation à la Euclide

Il est peut-être plus difficile de respecter la cohérence mathématique que nous avons évoquée à propos d'un niveau de conceptualisation lorsqu'il résulte d'un mélange entre un niveau précédent et des acquisitions récentes : c'est ce que nous allons illustrer maintenant.

---

[25] Le plan ou l'espace sont munis implicitement d'une distance (qui sera dans la version affine euclidienne la distance euclidienne associée au produit scalaire « usuel »).

[26] Par exemple l'inscription d'un triangle rectangle dans un cercle de diamètre l'hypoténuse, ou la concourance des droites remarquables du triangle.

[27] On devrait ajouter ici les coniques, qui n'interviennent que bien après dans la scolarité

[28] C'est à dire étude de configurations.

a) Progressions et cercles vicieux

On trouve ainsi dans certains manuels, peut-être justement du fait de cette juxtaposition pas toujours bien explicitée de divers niveaux de conceptualisation, des cercles vicieux dans l'introduction des notions.

Un travail de A. Berté (1996) illustre ceci à propos des liens entre l'inégalité triangulaire et le théorème de Pythagore. Chez Euclide, l'inégalité triangulaire est démontrée, ainsi que le théorème de Pythagore. En revanche si on part de la géométrie affine euclidienne, l'inégalité triangulaire est inscrite dans les fondements (norme), seul le théorème de Pythagore peut être démontré.

De même la relation entre cette inégalité et la caractérisation des positions relatives de deux cercles est souvent confuse (avec le piège supplémentaire de la forme particulière prise par l'inégalité triangulaire au collège, qui fait intervenir une seule inégalité entre la plus grande des distances AB, BC, AC et la somme des deux autres).

On peut aussi trouver dans certains manuels une « démonstration » du théorème de Thalès dans des triangles rectangles utilisant des cosinus, dont l'existence même repose sur le théorème de Thalès.

Ceci dit, la vigilance nécessaire à déployer pour respecter la cohérence nous semble plus facile à mettre en œuvre si on travaille avec cette notion de niveau. Il ne s'agit pas de tout montrer aux élèves mais bien d'avoir à sa disposition en tant qu'enseignant un exposé cohérent, ou au moins de savoir qu'un tel exposé peut être reconstitué.

b) Niveau de rigueur : les oubliés du collège (imprécisions, omissions).

Le niveau de rigueur attendue en géométrie est quelquefois caché, quelquefois ignoré (en particulier dans certains manuels de collège), et cela nous semble tenir aussi à cette élaboration « mixte » du niveau de conceptualisation « à la Euclide ».

Ainsi, le travail à partir de la figure, l'existence de cas de figures (à considérer dans le domaine de travail « à la Euclide ») et de cas particuliers (toujours à considérer), l'intervention subreptice, importée de la géométrie affine, non formalisée complètement, du vectoriel, l'absence de certaines définitions ou de l'opacité de certains emprunts modernisant la théorie initiale sont peut-être à l'origine de ces difficultés.

On rencontre ainsi :

- Une grande absence des problèmes d'existence (même Euclide admettait parfois que ce qu'il voyait existait) – or ce n'est pas parce qu'on parle d'un objet qu'il existe...
  Une des premières démonstrations du premier livre des éléments d'Euclide repose sur l'existence admise de l'intersection d'un cercle et d'un segment [AB] tel que A soit intérieur au cercle et B extérieur.
  Le travail à partir de la figure peut ainsi amener des oublis de justification d'existence de ce genre, oublis liés aux cas de figure non considérés ou aux

cas particuliers à considérer, mais il y a d'autres occurrences de cette difficulté.
Par exemple la question suivante est mal posée, il faudrait ajouter « s'il existe » : construire un rectangle d'aire 3 cm^2 et de périmètre 3cm.

- En particulier une transparence totale de l'existence de points liée à des propriétés de convexité de régions du plan ou de l'espace (implicitement admises),
  Par exemple dans le début de la démonstration (classique) suivante de la concourance des médianes d'un triangle ABC :
  Les deux médianes issues de C et de B se coupent en G. Appelons P le point d'intersection de (AG) et [BC] et montrons que P est le milieu de [BC]...
  On admet sans le préciser que les deux médianes se coupent, et que la droite (AG) rencontre le segment [BC]. Or ce sont deux propriétés liées à la convexité, qu'on peut démontrer dans le cadre affine en utilisant les barycentres par exemple, ou qu'on peut admettre mais explicitement (une partie des axiomes de Hilbert permet de préciser ce qu'il suffit de mettre en axiome pour démontrer le reste).

- Une ignorance généralisée des problèmes d'unicité (notamment dans le travail sur des constructions ou dans l'usage de définitions) – le singulier, le pluriel, les articles – défini ou indéfini – ne sont pas souvent utilisés à bon escient par les élèves !
  Des définitions précises, même si tous les objets ne sont pas définis, des caractérisations explicites permettent d'éviter une partie de ces abus.
  Par exemple, la question suivante est mal posée (il y a deux triangles solution) : A, B sont deux points donnés ; construire **le** triangle équilatéral de côté [AB].

- Des problèmes liés à l'utilisation de la contraposée de théorèmes (ou de raisonnement par l'absurde).
  Par exemple un triangle dont les côtés ont pour mesures respectives 4cm, 5cm, 6cm n'est pas rectangle : en effet le carré de la longueur du côté ayant la plus grande longueur (36) est différent de la somme des carrés des longueurs des deux autres (25 + 16), donc, d'après le théorème de Pythagore (partie directe), le triangle n'est pas rectangle (utilisation de la contraposée ou d'un raisonnement par l'absurde). Beaucoup d'élèves évoquent la réciproque du théorème.

IV Géométrie axiomatique : Le travail de Hilbert (et le travail de Cousin Fauconnet) : des légitimations a posteriori des démarches précédentes.

Hilbert a construit une axiomatique rigoureuse (comportant des définitions, et des (groupes) d'axiomes) qui permet de légitimer complètement a posteriori la géométrie précédente, en gardant la majorité des démonstrations.

Il ajoute ainsi à des définitions abstraites de points, droites, plan, « entre », incident, congruent, des groupes d'axiomes – sur l'incidence (alignement), l'ordre (entre), la congruence (égalité), la continuité (pas de trou dans les droites), l'axiome des parallèles et l'axiome de Pasch (convexité).

Et il retrouve tout ce qui avait été fait, à condition d'ajouter ces éléments initiaux.

De nombreux travaux sont consacrés à cette approche, au caractère minimal des axiomes à ajouter, à des discussions sur les corps de base à utiliser. Signalons par exemple le livre d'Arsac (1998).

Plus proche de la géométrie du collège[29], le travail de Cousin Fauconnet (1995) permet de même de fonder rigoureusement cette géométrie en ajoutant des axiomes qui « manquent » (les réels sont supposés construits), moins nombreux que chez Hilbert. Elle introduit un axiome sur la symétrie orthogonale (conservation des distances) qui permet de retrouver ce qui est admis sans commentaires au collège. Cela prouve en tout cas qu'il est légitime de faire travailler les élèves sur les éléments retenus dans les programmes puisqu'il existe un système d'axiomes (pas trop gros) à rajouter qui amène au même corps de résultats à démontrer. En somme c'est le travail d'Hilbert actualisé à la géométrie du collège.

A ce type de démarche est ainsi associé un domaine de travail différent des précédents, où l'intérêt se porte sur les fondements, qui pourrait se définir comme un niveau de conceptualisation, avec notamment des problèmes très différents et un travail de réflexion spécifique (cf. Arsac, déjà cité).

V Les interventions subreptices de la géométrie affine (au collège et au lycée) et quelques conséquences

Nous réfléchissons ici à des incursions partielles dans un nouveau niveau de conceptualisation, développé au paragraphe suivant. Ce niveau est caractérisé par des outils essentiellement algébriques, et ce sont des problèmes analogues aux précédents qui sont abordés. Mais ce domaine de travail ne peut être constitué en niveau de conceptualisation aux niveaux scolaires considérés, il manque trop d'éléments.

1) L'analytique et les mesures algébriques

Introduite dès le collège, cette géométrie analytique présuppose l'existence de repères, donc de vecteurs de base (et évidemment des nombres réels), donc elle traduit la modélisation du plan (ou de l'espace) comme espace affine (éventuellement euclidien) sur un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

Une fois un repère fixé, on réalise un travail sur les coordonnées, à la fois pour les objets introduits et pour les transformations.

De manière générale, on peut définir sur n'importe quelle droite une mesure algébrique à partir d'un vecteur directeur $\vec{u}$ (si A est un point de la droite, on pose $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, alors k = $\overline{AM}$). Les mesures algébriques changent selon le choix du vecteur $\vec{u}$, mais le rapport de deux mesures algébriques prises sur la même droite est indépendant de ce choix.

---

[29] Elle s'est appuyée sur les programmes de géométrie du collège de l'année 1986.

Le travail sur les coordonnées (réelles) permet de ne pas considérer les cas de figures : on atteint l'idéal de Descartes d'unifier le raisonnement géométrique sans faire intervenir les différents cas.

Ceci dit, la portée de la géométrie analytique peut dépasser le champ de la géométrie euclidienne...

2) Le Vectoriel

Les vecteurs sont importés (artificiellement) au collège, ils ne peuvent apparaître dans un travail inspiré de Euclide et ne remplacent pas quelque chose. Ils sont repris au lycée, avec une juxtaposition de la définition précédente et des axiomes des espaces affines, traduisant la modélisation du plan par un espace affine, mais sans éclaircissement du rapport entre les deux introductions. Au lycée, de fait il y a souvent un mélange assez opaque entre les vecteurs du collège et ces nouveaux objets[30] inspirés de la géométrie affine sans que ce soit explicité (on présente la relation de Chasles et le caractère bijectif de l'application qui, O étant fixé, à tout point M associe $\overrightarrow{OM}$, sans indiquer que ce sont les axiomes des espaces affines).

Le travail des élèves avec les vecteurs est peut-être obscurci par des implicites liés à leur origine subreptice. Pour démontrer une colinéarité par exemple, on exprime les vecteurs sur une même base, mais sans le dire, sans avoir la notion à sa disposition, ce qui peut entraîner des calculs menés sans fil directeur, juxtaposant des écritures aléatoires de la relation de Chasles dont on espère qu'elles permettront de rencontrer la solution...

De plus le caractère subreptice peut rendre opaque ce qui est important, ce qui est admis, ce qui est démontré. Par exemple, à partir du lycée, il serait incorrect d'écrire « trouver **les** points M qui vérifient la relation vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, où ABC est un triangle et O est le centre du cercle circonscrit au triangle. En effet l'unicité de M est due au deuxième axiome des espaces affines, implicitement mis en œuvre dans l'énoncé (vectoriel). Mais est-ce si clair ?

De même des problèmes de formalisme liés à des quantificateurs cachés au collège, faute de la formalisation affine des vecteurs notamment, peuvent apparaître.

Pour obtenir par exemple une expression de la non colinéarité de deux vecteurs, on part de la définition vectorielle de vecteurs colinéaires et on établit la négation. Cette opération est difficile tant qu'on ne dispose pas des définitions formalisées, qui permettraient d'obtenir directement une expression correcte de non colinéarité (indépendance).

3) Les nombres complexes en géométrie

Le dernier recours subreptice à la modélisation du plan par un espace affine euclidien a lieu avec l'introduction des nombres complexes et leur utilisation en géométrie. Là encore on demande aux élèves un travail essentiellement algébrique (Cf. Rogalski et al, 2001).

---

[30] En réalité classes d'équivalence des vecteurs (bipoints) du collège.

VI La géométrie affine et affine euclidienne

Il s'agit d'un nouveau niveau de conceptualisation, où tout est défini, sans questionnements particuliers sur les fondements, et où les démarches tiennent surtout à l'algèbre linéaire (voire bilinéaire) en dimension finie.

1) Fondements, démarches, arsenal et types de problèmes

A l'origine de cette modélisation on a les définitions des espaces affines, des applications affines, des sous-espaces affines, en référence aux espaces vectoriels, aux applications linéaires et aux sous-espaces vectoriels.

L'espace affine $\mathcal{E}$, qui modélise le plan ou l'espace « à la Euclide », est défini à partir d'un espace vectoriel E et à une application $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}x\mathcal{E}$ dans E qui a deux propriétés, la relation de Chasles et le caractère bijectif de l'application qui, pour tout O fixé, associe à tout M de $\mathcal{E}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ($\mathcal{F}(O,\mathcal{M})$).

Une démarche classique dans ce domaine de travail consiste à traduire le problème de géométrie cherché en un problème d'algèbre linéaire qu'on résout et à revenir à l'affine. Souvent le fait de fixer un point rend les « traductions » très simples.

Du coup l'arsenal à la disposition du géomètre (apprenti ou professionnel) dans ce domaine de travail est énorme puisqu'il comprend toute l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimension deux et trois !

On utilise particulièrement les automorphismes orthogonaux (et leur classification) pour classer les isométries affines.

Il y a quelques objets spécifiques, comme les barycentres de systèmes de points qu'on ne peut pas définir sans le vectoriel.

Les types de problèmes sont les mêmes que dans le niveau déjà cité, avec quelques nouveaux énoncés (liés aux structures de groupe).

2) Rapport entre géométrie « à la Euclide » et géométrie affine euclidienne

Le plan ou l'espace dans lesquels travaillent les collégiens sont modélisables par des espaces affines euclidiens de dimension 2 et 3 sur |R. Il se trouve alors que toutes les applications du collège sont affines (cela se démontre). Seules l'inversion (et les homographies), autrefois abordées géométriquement au lycée[31], ne le sont pas.

Le produit scalaire défini sur l'espace vectoriel permet de munir l'espace affine d'une distance par $d(A,B) = \| \mathcal{F}(A,B) \| = \| \overrightarrow{AB} \|$.

De fait, en gros, les problèmes de la géométrie du collège peuvent être résolus en géométrie affine euclidienne (subreptice ou non), sans qu'on y gagne nécessairement. Il y a quelques problèmes spécifiquement affines, non abordables directement dans le domaine « à la Euclide », par exemple des problèmes de barycentre.

---

[31] Les homographies interviennent encore sous forme complexes – sans aucune théorisation.

3) Géométries et invariants (un troisième niveau)

En conclusion, pour trouver une unité supplémentaire entre ces niveaux, nous allons nous livrer à une évocation des théories ultérieures : les géométries, comme ensembles sur lesquels agissent des groupes et l'intervention des invariants (cf. commission Kahane, articles de Perrin)

Peut-on rendre compte du fait qu'Euclide a "construit" à peu près la géométrie affine (euclidienne) ?

Tout se recolle si on se place au niveau supérieur (géométrie comme ensemble sur lequel agit un groupe). Perrin (2000) développe en effet l'idée que les théorèmes d'une géométrie s'obtiennent à partir des invariants polynomiaux et des relations entre eux (le tout est théoriquement « calculable »).

Or, d'une part la géométrie affine est associée au groupe affine (groupe des bijections affines). Ce groupe est engendré par les transvections et les dilatations (dont les symétries obliques) et contient les symétries centrales. Une propriété de conservation par transvections, dilatations, symétries obliques et symétries centrales sera donc une propriété de tous les éléments du groupe et réciproquement – il y en a même trop.

D'autre part on montre que les aires sont un semi-invariant du groupe affine[32] (et même le seul invariant polynomial). Cela signifie que les rapports d'aires sont invariants par tout élément du groupe. Comme en plus, pour trois points il n'y a pas de relations, il est raisonnable de penser que les théorèmes obtenus à partir de la seule semi-invariance de l'aire vont déjà recouvrir une partie importante des théorèmes de la géométrie affine.

Or précisément Perrin (2000) montre que si on exprime la semi-invariance de l'aire sur les générateurs de ce groupe affine (en rajoutant les symétries centrales), on retrouve quatre lemmes de géométrie « à la Euclide » qui traduisent exactement les méthodes d'égalité et de comparaison des aires de triangles d'Euclide.

Voilà ce qui « explique » que les théorèmes obtenus par Euclide avec ces méthodes des aires, même s'ils s'appuient sur des prémisses incomplets, sont en réalité les mêmes que ceux de la géométrie affine (de fait euclidienne car Euclide se place dans un plan muni implicitement d'une distance). Cependant le calcul des invariants et relations pour le groupe euclidien donne d'autres résultats, ainsi que pour d'autres groupes et d'autres géométries.

En conclusion, il existe une seule géométrie affine euclidienne, celle d'Euclide ou celle modélisée par un plan (espace) affine associé à un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3 ; en revanche il existe plusieurs géométries, affine, affine euclidienne, projective, hyperbolique, etc. Mais au sein de la géométrie affine (resp. affine euclidienne), il existe plusieurs niveaux de conceptualisation.

---

[32] Pour s'en convaincre on peut penser les aires en partie comme un déterminant.

VII Des exemples d'utilisation des différents niveaux de conceptualisation : résolution de problèmes dans différents niveaux de conceptualisation et démarches spécifiques à chaque domaine.

a) Un canevas théorique de démarches possibles pour résoudre un même problème.

Prenons un exemple pour expliquer notre propos.

Devant un problème d'incidence portant sur une configuration (études de propriétés géométriques ou métriques de la figure), ou un problème de lieu ou de construction, comment se placent les différentes stratégies possibles les unes par rapport aux autres ?

On peut mettre à part l'analytique ou l'utilisation des nombres complexes : les méthodes correspondantes s'appuient sur l'existence (admise) et le choix éventuel d'un repère, et amènent à des calculs qu'on peut essayer de simplifier en choisissant bien les repères justement, ou en ne privilégiant pas de repères particuliers pour ne pas dissymétriser artificiellement le problème.

Restent quatre types de stratégies, que nous déclinons suivant nos niveaux.

- « A la Euclide » on étudiera plutôt la figure de manière statique, en utilisant des outils liés notamment aux comparaisons de longueurs, d'aires, ou d'angles (géométriques) : cas d'égalité (ou de similitude) des triangles, « méthodes des aires » (égalité ou comparaison), théorèmes de Pythagore ou de Thalès.
  On pourra cependant faire intervenir quelques transformations, agissant sur la figure ou une partie de la figure.

- En géométrie vectorielle (affine, subreptice ou non), on utilisera pour l'étude statique les vecteurs, avec la relation de Chasles, la colinéarité, les barycentres, les angles orientés de couples de vecteurs (dans un plan orienté), le produit scalaire, le déterminant, le produit vectoriel.

- En géométrie affine (euclidienne), on essaiera de travailler systématiquement sur le linéaire avant de repasser à l'affine.

- Pour compléter, si on utilise le dernier niveau évoqué, pour démontrer une propriété affine d'un triangle ou d'un parallélogramme (une question de parallélisme ou de rapport d'aires ou de longueurs), on pourra faire la démonstration pour un triangle équilatéral ou un carré où c'est plus facile. Ceci établit la propriété pour la figure initiale, par conservation de cette propriété affine par la transformation affine qui fait passer de la figure initiale au triangle ou parallélogramme particuliers (cf. Perrin, 2001).

- Enfin, de manière transversale on pourra mettre en œuvre des transformations (d'une partie de la figure dans une autre, du plan dans le plan...). Pour cette étude dynamique, on pourra être amené à introduire des transformations, liées à des caractéristiques de la figure.

Il n'est pas forcément intéressant de développer systématiquement toutes les démarches possibles pour un même problème, c'est plutôt dans l'autre sens : si le travail dans un niveau n'aboutit pas on a intérêt à en changer.

Des exemples sont développés dans la littérature (construction d'un quadrilatère connaissant les milieux des côtés (Robert, 1995), « tourniquette » (Robert, 1991). Voici parmi d'autres deux grands classiques.

b) L'exemple des théorèmes de Ménélaüs et Céva

Par exemple, pour établir le théorème de Ménélaüs, on peut travailler

- à la Euclide en utilisant un calcul d'aires : on associe un rapport d'aires à chaque rapport A'B/A'C, on distingue tous les cas de figures. On peut aussi calculer explicitement les aires.

- dans le vectoriel « subreptice », en exprimant sur une base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ les vecteurs candidats à être colinéaires ou en utilisant des barycentres (passant de points divisant un segment dans un rapport donné à barycentre),

- de manière dynamique en exploitant des composées d'homothéties,

- en affine en traduisant la conservation par une projection des rapports de mesures algébriques.

Des démarches analogues peuvent s'appliquer pour la démonstration du théorème de Céva, certaines stratégies s'avérant plus faciles que d'autres selon les situations. Par exemple la démonstration avec l'outil barycentre est beaucoup plus naturelle dans le cas du théorème de Céva que dans le cas de Ménélaüs.

c) L'exemple du théorème de Thalès : plusieurs énoncés, plusieurs démonstrations selon le niveau de conceptualisation dans lequel on travaille

i) Un premier énoncé dans un triangle ou dans deux triangles opposés par le sommet

Les démonstrations à la Euclide, ou même d'Euclide se font en utilisant des rapports d'aires de triangles, calculées avec la formule ou obtenues directement en fonction des rapports de longueurs ; on doit distinguer deux cas de figure ; l'obtention de la troisième égalité est indirecte ; la réciproque se fait « par l'absurde », en utilisant la partie directe.

ii) Un énoncé vectoriel dans les mêmes configurations que précédemment, et une démonstration utilisant la relation de Chasles et une base du plan : on obtient les trois égalités à la fois, sans avoir besoin de distinguer les cas de figures. La démonstration de la réciproque est analogue.

iii) Un énoncé plus général, faisant intervenir des mesures algébriques sur des droites non nécessairement sécantes, et une démonstration utilisant le caractère affine des projections sur une droite parallèlement à une direction – cette forme se généralise à l'espace de deux manières.

iv) L'utilisation de l'homothétie de centre A telle que B ait comme image C, permet aussi d'obtenir la forme vectorielle complète du théorème de Thalès. En effet le point D a comme image le point intersection de (AD) et de la parallèle à (BD) menée par C : c'est E. D'où les égalités cherchées.

Pour conclure, nous espérons avoir illustré le fait que la clarification apportée par une réflexion en termes de niveaux de conceptualisation peut aider les enseignants à amener leurs élèves à construire des connaissances géométriques organisées.

Une bibliographie très particulière

1) Une littérature professionnelle abondante et des enseignants particuliers

Nous ne pouvons citer toute la littérature professionnelle qui a alimenté notre étude : il y a en particulier les bulletins de l'APMEP n° 430 et 431, les revues repères-Irem n°26, 31, 35, mais aussi de nombreuses brochures IREM, bulletins interIrem, la revue *Petit x*.

Nous avons particulièrement étudié les nombreux articles de Bkouche, en particulier l'appendice historique du traité d'introduction à la géométrie élémentaire de Lehman (PUF), et ceux de Friedelmeyer.

Nous ne pouvons pas ne pas citer explicitement le nom de F. Colmez qui nous a dépannée tant de fois en géométrie et celui d'Ovaert avec sa classification des problèmes de géométrie tant de fois reprise...

2) Les Eléments d'Euclide (volumes 1 et 2 chez Vitrac)

3) Parmi d'autres, quelques livres ou articles, dont certains témoignent de la génération de l'auteur...

ARSAC G. (1998) *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au Collège et au lycée,* Aléas, IREM de LYON .

BERTE A. (1996) *Mathématiques du collège au lycée*, Nathan.

CARREGA JC (1981) *Théorie des corps, la règle et le compas*, Hermann.

CARRAL M. (1995) *Géométrie*, Ellipses.

COUSIN-FAUCONNET (1995) *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin.

DORIER JL ed. (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

LELONG FERRAND J. (1989) *Fondements de la géométrie*, PUF.

LION G.(2001) *Géométrie du plan*, Vuibert.

OVAERT et GREG (1983) Géométrie I, IREM d'Aix Marseille

PERRIN D. (2000) *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, bulletin de l'APMEP n°431.

PERRIN D. (2001) *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane* : *analyse de quelques exercices de géométrie*, bulletin de l'APMEP n°435.

ROBERT A. (1995*) L'épreuve sur dossier à l'oral du Capes*, I Géométrie, Ellipses.

ROBERT A. (1991) Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie en licence en formation continuée), *Cahier de didirem n*°9, IREM de Paris 7.

ROGALSKI M. et al (2001) *Carrefours entre Analyse, algèbre, géométrie*, Ellipses.

TISSERON C. (1983) *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 10 2-3, pp. 133-170, Grenoble : La Pensée Sauvage.