QUELQUES ELEMENTS DE REFLEXION SUR LE SUJET DE MATHEMATIQUES DU BACCALAUREAT 2003 - SERIE S

Michel Jullien, Yves Matheron, Odile Schneider
Professeurs de mathématiques et formateurs
IUFM d'Aix-Marseille

Les difficultés qu'ont éprouvées les élèves de Terminale S face au sujet de mathématiques du baccalauréat sont une réalité incontournable qu'il faut arriver à expliquer.

Le premier, et souvent le seul critère invoqué pour tenter de comprendre, est la bonne conformité ou non du sujet au programme officiel de mathématiques de cette classe. Si l'on s'en tient au Problème, partie qui a le plus désemparé les candidats, toutes les notions abordées figurent à l'évidence au programme de l'enseignement obligatoire de la Terminale S. Il est donc incontestable que cet élément ne permet pas d'expliquer les difficultés des élèves, ni le mécontentement des professeurs, et que son examen ne peut être qu'un premier pas dans une analyse.

Un autre critère, plus polémique, utilise l'opposition facile/difficile et situe les questions sur cette échelle unidimensionnelle : pour les uns, les questions sont trop difficiles, ce qui explique l'échec des élèves ; pour d'autres au contraire elles sont d'une difficulté raisonnable, voire sont considérées comme faciles (et on n'ose se demander alors ce qu'il faut conclure de l'échec des élèves…). Nous pensons qu'il est nécessaire de se donner les moyens d'affiner et d'objectiver l'analyse. Il faut, de façon plus pertinente, se poser la question de l'adéquation du sujet proposé au rapport institutionnel aux notions du programme que les enseignants ont fait vivre dans leur classe.

C'est en effet la bonne adéquation des connaissances d'un candidat au rapport institutionnel que l'épreuve de mathématiques du baccalauréat doit permettre d'évaluer, puis de mesurer par une note.

On bute alors sur une difficulté : quel est ce rapport institutionnel ?

Identifier, décrire le rapport institutionnel est une difficulté objective. À cette difficulté s'ajoute ici le fait que, le programme étant nouveau cette année, ce rapport institutionnel ne s'est pas encore stabilisé et est mal connu. Chaque professeur de mathématiques de Terminale S a été amené à faire constamment des choix, tout en traitant le programme officiel. En effet, si celui-ci lui fournit le cadre général de son enseignement, c'est à l'enseignant qu'il revient de remplir avec précision ce cadre, en répondant en acte à des questions telles que, par exemple : les élèves doivent-ils savoir résoudre tel type de tâches ? À l'aide de quelles techniques ? Tel type de tâches ancien est-il encore d'actualité ou non, donc à faire étudier ou non ? C'est en partie en répondant à ces questions qu'un rapport institutionnel aux notions du nouveau programme s'est, de fait, construit cette année.

Un travail préliminaire devrait consister à préciser ce rapport à l'aide d'entretiens avec les enseignants de Terminale S et l'examen des traces écrites du travail des élèves de cette classe, par exemple, afin de pouvoir mener à bien une analyse plus approfondie du sujet posé. Un tel travail permettrait non seulement d'identifier avec précision les organisations mathématiques rencontrées, mais montrerait de plus quel est le rôle respectif du professeur et des élèves dans l'accomplissement des différentes tâches mathématiques identifiées. Autrement dit, une telle étude permettrait d'évaluer le degré d'autonomie des élèves face à tel ou tel type de tâches.

Ce travail méticuleux et exigeant n'ayant été effectué en 2002-03, ni par nous-mêmes, ni par les responsables du sujet, nous poursuivrons cette étude au vu de nos connaissances personnelles de ce qui a pu vivre dans les classes de Terminale S cette année (connaissances obtenues en tant que professeurs de mathématiques en Terminale S et (ou) parents d'élèves de cette même classe). C'est-à-dire notre familiarité avec l'institution « classe de Terminale S en 2002-2003 » partagée avec les professeurs ayant préparé leurs élèves à l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S 2003. Nous nous en distinguerons simplement par l'engagement dans le début d'une analyse didactique du problème.

Intéressons-nous aux questions du problème ayant posé des difficultés aux candidats et plus précisément à la question 2. de la partie A du problème :

PROBLÈME

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).
Ce problème a pour objet l'étude des deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.
Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$.
(où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0\ 2^{\frac{t}{T}}$

Pour résoudre cette question, l'élève est amené à réaliser successivement les sous-types de tâches suivants :

1. Modéliser à l'aide d'une équation une condition, donnée à l'aide d'un paramètre T.
2. Déterminer le paramètre a en fonction du paramètre T, en résolvant une équation du type $e^{aT} = \alpha$, où α est un réel donné.
3. Identifier $e^{(\ln\alpha)\, t/T}$ et $\alpha^{t/T}$, où T est un paramètre, α un réel donné et t la variable.

Bien sûr, le découpage du travail à réaliser en ces trois sous-types tâches reste totalement à l'initiative de l'élève. Le degré d'autonomie qu'on lui demande apparaît très important : l'élève doit non seulement identifier les différentes étapes à effectuer, mais aussi déterminer les techniques à utiliser pour les résoudre. Par exemple, il doit être en mesure d'anticiper sur la pertinence du choix de l'écriture $f(T)=2N_0$, en réponse au premier sous-type de tâches relatif à la modélisation par une équation. Il doit se convaincre que ce choix pourra le mener sans risque, deux sous-types de tâches plus loin, à la solution de la deuxième question de la partie A. Ce point constitue un premier décalage non négligeable entre les exigences du sujet et celles du rapport institutionnel mis en place.

Le constat, effectué à propos de cette question, est en fait transposable à beaucoup d'autres du problème. Le cas de la question 2.d. de la partie B est à cet égard éclairant.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante:
Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ la relation :

(E) $g'(t) = a\, g(t)\, (1 - \frac{g(t)}{M})$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle (E') :

$$y' + ay = \frac{a}{M}.$$

b. Résoudre (E').

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$, où

C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité :

$$0 < g(t) < M.$$

b. Etudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)). Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a(1 - \frac{2g}{M})g$. Etudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Pour répondre correctement à cette question, un élève doit :
- identifier qu'il s'agit de calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle (l'énoncé parle de « nombre moyen ») ;
- écrire l'intégrale à calculer, laquelle comporte trois paramètres :

$$\frac{1}{\frac{\ln C}{a}} \int_0^{\frac{\ln C}{a}} \frac{M}{1+Ce^{-at}}\, dt\ ;$$

- déterminer une primitive d'une fonction du type $\frac{\alpha}{1+\beta e^{-\gamma t}}$; pour cela :
- multiplier haut et bas par $e^{\gamma t}$;
  - reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$ à une constante près ;
  - terminer le calcul.

Chacune de ces étapes, que l'élève doit déjà identifier, l'emmène à effectuer un type de tâches qui, lui-même, demande de prendre des initiatives (tout particulièrement pour le calcul de l'intégrale). Cette situation est inédite pour un élève de Terminale S aujourd'hui, si bien qu'elle peut avoir conduit un certain nombre d'entre eux (et pas parmi les plus en difficulté), après avoir cependant identifié correctement toutes ces étapes, à renoncer finalement à poursuivre, craignant de s'être engagé dans une mauvaise voie.

Mais pour en revenir à la question 2. de la partie A, un second point, en net décalage entre ce qui est exigé du candidat et le rapport institutionnel que les professeurs ont pu faire vivre cette année, doit être signalé. Il réside en l'obligation pour l'élève de gérer plusieurs indéterminés : une variable t et plusieurs paramètres T, N_0, a, dont le rôle change, qui plus est, au cours de la question. En effet, dans le point 1, a est un paramètre, au même titre que T et N_0. Dans le point 2, a est l'inconnue à déterminer en fonction de T, puisque le paramètre N_0 s'élimine ; et dans le point 3, la variable t réapparaît ainsi que les paramètres N_0 et T. Si un tel type de tâches a pu être rencontré dans les classes de Terminale S cette année, il s'est très certainement agi d'une tâche coopérative, dans laquelle le rôle du professeur a été fondamental et que les élèves n'auraient pu, en moyenne, accomplir en autonomie complète. La question du *topos* de l'élève, c'est-à-dire de la définition des tâches et des rôles assignés, au cours de la relation didactique et à son issue, à l'élève et non au professeur, est décisive lorsqu'on veut tenter de saisir et de décrire le rapport institutionnel à un objet de savoir.

La nécessaire prise en compte des paramètres aboutit, par exemple dans la question (B, 2, b), à une complexification de l'usage de certaines techniques ayant habituellement cours en Terminale S.

La formulation de la question (B, 2, b) induit l'usage du choix d'une certaine démarche pour sa résolution. L'indication attirant l'attention sur la relation (E) pousse sans doute à l'étude des variations de g à partir de l'étude du signe de g', bien que d'autres techniques soient possibles comme celles relevant de la variation de la composée de deux fonctions.

De façon plus intéressante pour l'analyse, on peut relever qu'il en est de même pour la deuxième partie de cette question. Après qu'a été établie la monotonie de g, associée à sa continuité, sur $]0\,;+\infty[$, la question portant sur l'établissement de l'existence de t_0 tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$ engage, selon le contrat institutionnel en vigueur en TS, dans l'utilisation attendue du théorème des valeurs intermédiaires. Dans la mise en œuvre du théorème, il est bien sûr nécessaire de démontrer que la valeur λ associée à $g(t_0)$ appartient à l'intervalle image. Sur ce point, dans la majorité des problèmes de TS, la valeur λ est un réel *donné* dont il est aisé de constater, sans plus de justification, l'appartenance à l'intervalle image ; par exemple 0 appartient $[-1\,;+\infty[$. Dans ce problème, le recours aux paramètres complexifie la technique associée à cette tâche ordinairement attendue des élèves. Il s'agit en effet, après avoir déterminé l'intervalle image $[\frac{M}{1+C}\,; M[$, de montrer que $\frac{M}{1+C} \leq \frac{M}{2} < M$. La deuxième partie de la double inégalité paraît triviale pour qui veut bien se souvenir que $M > 0$; ce qui suppose, comme pour obtenir l'écriture convenable de $[\frac{M}{1+C}\,; M[$, de rechercher l'information

dans le préambule de la partie B. Il faut aussi, afin de démontrer $\frac{M}{1+C} < \frac{M}{2}$, adjoindre au souvenir que $C > 1$, information fournie en préambule de la question B. 2, un maniement convenable des inégalités.
La technique permettant la vérification d'une des conditions d'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, vérification attendue au baccalauréat, se complexifie ainsi singulièrement du fait de l'usage de paramètres : deux paramètres sur lesquels on doit raisonner simultanément pour ce point précis relatif à la deuxième partie de (B, 2, b).

Notons encore que l'indication de la première partie de la question 2.b. pousse vers l'étude du signe de g'en utilisant l'équation différentielle dont elle est solution. En effet, on a $g'(t) = a\,g(t)(1 - \frac{g(t)}{M})$ et la question précédente montre que $0 < g(t) < M$. On peut donc conclure sur le signe de g'. Mais cette technique, qui regarde une équation différentielle non comme *quelque chose à résoudre* mais comme fournissant une caractéristique de ses solutions, a peu de chances d'émerger. Une situation semblable se rencontre à propos des équations, lorsqu'on utilise le fait qu'un nombre α annule une fonction g pour donner une autre expression de $f(\alpha)$ en fonction de α (par exemple, si $g(x) = \cos x - x$ s'annule en α et si $f(x) = \frac{2\cos x}{1 + x\cos x}$, alors $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$). On sait combien ce changement de point de vue sur l'équation est coûteux, et ceci déjà sans paramètres.

En revanche, le calcul de la dérivée par les formules usuelles, c'est-à-dire la technique utilisée ordinairement, s'il est rendu plus délicat ici par la présence de trois paramètres, conduit à une étude de signe plus aisée puisque tous les éléments sont positifs : $g'(t) = \frac{aMCe^{-at}}{(1+Ce^{-at})^2}$.

À l'issue de ce bref examen, qu'il resterait à étendre à l'ensemble des questions du sujet proposé, l'écart entre celui-ci et le rapport institutionnel aux notions du nouveau programme qui s'est construit cette année semble une explication du niveau de complexité ressenti par les élèves et dénoncé par les professeurs de mathématiques.

Bien sûr, un sujet de baccalauréat contribue à faire évoluer et à stabiliser peu à peu ce rapport institutionnel. Cette fonction est d'ailleurs largement prise en compte au cours du temps, par les professeurs et les élèves, en particulier par leur travail sur les Annales. Mais elle n'est pas l'objectif premier de ce dispositif et sa prise en compte lors de la conception d'un sujet doit être maîtrisée et rester limitée ; ce qui n'a visiblement pas été le cas en juin 2003, comme le montre l'analyse de la rupture de contrat dont nous venons de fournir quelques éléments.