

**LA MACHINE DE SYLVESTER**  
**PRINCIPES MECANIQUES ET PRINCIPES MATHÉMATIQUES**  
**UNE ÉTUDE DE CAS A PROPOS DE LA ROTATION**

Mamadou Souleymane SANGARÉ  
Equipe de Didactique des Mathématiques  
École Normale Supérieure de Bamako

**Résumé :** Cet article rend compte d'un travail sur l'objet rotation à partir de deux cas d'étude dans une perspective de transition 9<sup>e</sup> – 10<sup>e</sup> au Mali (3<sup>e</sup> -2<sup>e</sup> en France). Les types de problèmes conçus à cet effet, sont proposés aux élèves dans des environnements relatifs à la machine de Sylvester qui réalise la similitude plane directe. Nous faisons une description de cette machine suivie d'une analyse didactique dans le cas particulier de la rotation. Le premier cas d'étude concerne une situation de réinvestissement après un enseignement de la rotation, le second cas est relatif à un premier enseignement de la rotation.

## Introduction

Cet article est issu d'une recherche en didactique des mathématiques sur la machine mécanique de Sylvester la plus générale, celle qui réalise la similitude plane directe<sup>1</sup>. Nous nous intéressons ici à celle qui réalise la rotation. La machine est un des instruments possibles pour aborder le concept de rotation en tant qu'objet. Nous analysons plus loin, les relations avec deux autres instruments : le papier/crayon et un logiciel de géométrie.

Au plan historique, la plus ancienne de ces machines est le pantographe classique, un parallélogramme articulé réalisant des figures homothétiques. Il fût utilisé d'abord par les peintres au XVI<sup>e</sup> siècle puis perfectionné et décrit par le Père Scheiner vers 1631. Mais sa portée théorique en mathématiques n'apparût qu'au XIX<sup>e</sup> siècle avec la notion de transformations ponctuelles introduite en géométrie. Cette théorisation géométrique apparaît dans les textes de Chasles en 1860 et ceux de Jordan en 1862. Sylvester donna ensuite une généralisation intéressante du pantographe classique qui permit la réalisation de figures directement semblables.

---

<sup>1</sup> Cf. Sangaré 2000, Thèse

Dans la littérature relative à ce domaine, certains ouvrages font ressortir l'intérêt que peuvent avoir ces machines mécaniques dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. D'abord sur le plan théorique, on peut noter l'excellent traité de Lebesgue en 1941. De même, on peut signaler l'ouvrage de Cundy et Rollett (1978). Au plan de l'ingénierie didactique, Brousseau (1986) a utilisé dans " *Problèmes de Didactique des Décimaux*", le pantographe classique qui réalise des homothéties. De même, les travaux de Gras (1983), de Métrégiste (1984) ainsi que ceux de l'équipe de didactique de l'Université de Modena avec Bartolini Bussi (1998) ont constitué les fondements de ce travail.

## I. Du Pantographe Classique au Pantographe de Sylvester

Dans ce paragraphe, nous donnons d'abord une description du pantographe en fonction des principes mécaniques et géométriques auxquels il est assujéti. Nous présentons ensuite les principes géométriques qui ont permis d'obtenir le pantographe de Sylvester à partir du pantographe classique. Ces descriptions s'appuient essentiellement sur des extraits de l'ouvrage de Lebesgue (1941) à propos de « constructions géométriques »<sup>1</sup>.

Enfin, nous exposons les modifications apportées à la machine de Sylvester qui réalise la rotation dans le cadre d'une étude de cas.

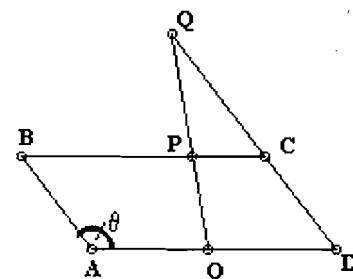
### I.1. Pantographe classique

Le pantographe classique est constitué d'un parallélogramme articulé  $ABCD$  fixé à son support plan en un de ses points (ici le point  $O$ ; *fig. 1*). Les trois points  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  sont choisis sur trois tiges du système ou sur leur prolongement, de façon qu'ils soient alignés. Dans le cas présent (*fig. 1*), on fixe arbitrairement le point  $O$  sur la tige  $[AD]$ , le point  $P$  sur la tige  $[BC]$  de manière que  $(OP)$  ne soit pas parallèle à  $(DC)$  et le point  $Q$  sur le prolongement de la tige  $[DC]$ , du côté de  $C$ .

#### I.1.1. Principes mécaniques

Le parallélogramme articulé a ses côtés formés de tiges rigides, donc de longueur constante. Il admet un seul paramètre de déformation, l'angle  $\theta$  (*fig. 1*)<sup>2</sup> et un seul point fixe, le point  $O$ . Dans ces conditions, le système articulé ainsi défini a dans le plan support deux degrés de liberté.

Ainsi, « chaque point lié à une tige de cette machine mécanique peut prendre en général toutes les positions dans une région bornée du plan ».



*fig. 1*

<sup>1</sup> Il s'agit dans cet ouvrage de Lebesgue, de leçons faites au Collège de France en 1940-1941.

<sup>2</sup> En théorie, l'angle  $\theta$  est tel que  $0 \leq \theta \leq \pi$  mais les contraintes mécaniques (épaisseur des tiges) font que pratiquement l'on a :  $0 < \theta < \pi$ .

### I.1.2. Principes géométriques

Les principes géométriques du pantographe classique (*fig.1*), sont décrits par Lebesgue dans cet extrait de son ouvrage indiqué plus haut :

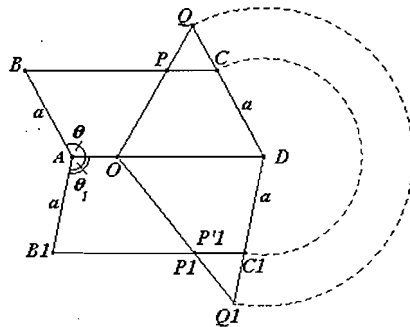
Une conséquence immédiate du théorème de Thalès est la permanence de l'alignement des trois points  $O, P, Q$  choisis respectivement sur trois tiges, et alignés pour une configuration particulière; en effet, la condition d'alignement ne dépend pas de  $\theta$ . De plus la figure variable  $OPQ$  reste semblable à la figure invariable  $OCQ$ .

(Lebesgue H, 1941, pp. 69-70).

Pour illustrer cette description nous présentons deux cas qui mettent en évidence les deux types de déformation du parallélogramme articulé  $ABCD$  (*fig.1*) liés à chacun des deux degrés de liberté cités plus haut.

#### Premier cas : $[AD]$ fixe

La figure (*fig.2*) représente le cas particulier où le parallélogramme peut être déformé en gardant, le côté  $[AD]$  fixe.



*fig.2*

Ainsi,  $ABCD$  et  $AB_1C_1D$  sont deux parallélogrammes tels que  $AB_1 = AB = a$ . Le point  $O$  est un point fixé de  $[AD]$ ,  $P$  est un point de  $[BC]$  tel que la droite  $(OP)$  coupe la droite  $(CD)$  en un point  $Q$ . Désignons par  $P_1$  le point de  $[B_1C_1]$  tel que  $B_1P_1 = BP$  (donc  $P_1C_1 = PC$ );  $Q_1$  est le point de la demi-droite  $[DC_1]$  tel que  $DQ_1 = DQ$  (donc  $CQ_1 = CQ$ ).

Il s'agit alors de savoir si les points  $O, P_1$  et  $Q_1$  sont alignés. Pour cela, appelons  $P'_1$  le point d'intersection de  $(OQ_1)$  avec  $[B_1C_1]$ . Alors le théorème de Thalès permet d'écrire que :

$$\frac{CQ}{DQ} = \frac{PC}{OD} \text{ et } \frac{CQ_1}{DQ_1} = \frac{P'_1C_1}{OD}. \text{ De } DQ_1 = DQ \text{ et } CQ_1 = CQ \text{ on déduit } P'_1C_1 = PC. \text{ Or}$$

$P_1C_1 = PC$ ; donc  $P'_1 = P_1$ .

### Deuxième cas : le seul point fixe est O de [AD]

La figure (fig.3) montre que le parallélogramme se déforme tout en gardant un seul point fixe O de [AD], c'est-à-dire que la droite (AD) tourne autour de O.

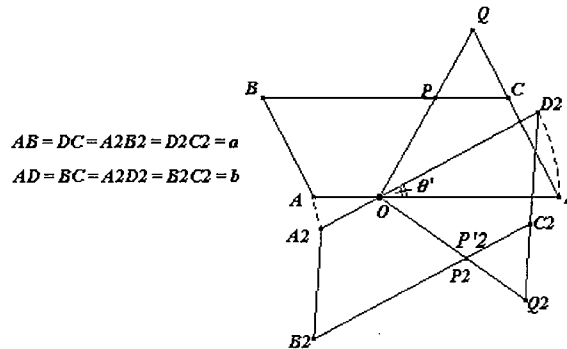


fig. 3

Des égalités de longueurs ci-dessus on écrit que  $OD_2 = OD$  puisque  $D_2$  est l'image de  $D$  par une rotation de centre  $O$ .

$P$  est un point de  $[BC]$  tel que la droite  $(OP)$  coupe la droite  $(CD)$  en un point  $Q$ . Désignons par  $P_2$  le point de  $[B_2C_2]$  tel que  $B_2P_2 = BP$  (donc  $P_2C_2 = PC$ ) ;  $Q_2$  est le point de la demi-droite  $[D_2C_2]$  tel que  $D_2Q_2 = DQ$  (donc  $C_2Q_2 = CQ$ ).

Il s'agit alors de savoir si les points  $O, P_2$  et  $Q_2$  sont alignés. Pour cela, appelons  $P'_2$  le point d'intersection de  $(OQ_2)$  avec  $[B_2C_2]$ . Alors le théorème de Thalès permet d'écrire que :

$$\frac{CQ}{DQ} = \frac{PC}{OD} \text{ et } \frac{C_2Q_2}{D_2Q_2} = \frac{P'_2C_2}{OD_2}. \text{ Mais } D_2Q_2 = DQ, C_2Q_2 = CQ \text{ et } OD_2 = OD, \text{ on en}$$

déduit  $P'_2C_2 = PC$ . Or  $P_2C_2 = PC$ ; donc  $P'_2 = P_2$  et  $O, P_2$  et  $Q_2$  sont alignés.

### Cas particulier : le seul point fixe est A confondu avec O

La description de Lebesgue est encore valable pour le cas particulier où le point de fixation  $O$  de la machine coïncide avec le sommet  $A$  du parallélogramme articulé  $ABCD$  (fig.4) qui dans sa déformation, fait que la figure variable  $APQ$  reste semblable aux figures invariables

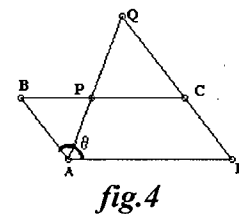
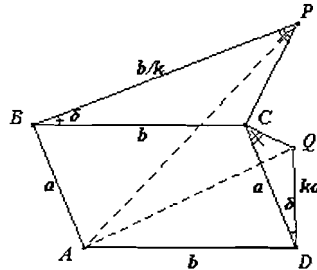


fig.4

$DCQ$  et  $BPC$ . Ainsi, lorsqu'on veut reproduire un dessin en modèle agrandi (respectivement en modèle réduit), on choisit le point  $P$  (respectivement le point  $Q$ ), comme point générique de la figure objet et  $Q$  (respectivement le point  $P$ ), comme point générique de la figure image.

## I.2. Pantographe de Sylvester

Le pantographe de Sylvester obéit aux mêmes principes mécaniques que le pantographe classique. Dans le domaine géométrique, l'homothétie réalisée ci-dessus (*fig.4*) peut être considérée comme une similitude plane directe particulière car  $k > 0$ . Pour décrire et expliquer cette machine, nous reprenons ici l'extrait (figure et texte en italique) de l'ouvrage de Lebesgue (1941) (*fig.5*):



*fig.5*

*Soient deux triangles invariables  $PBC$  et  $CDQ$  directement semblables; le triangle variable  $PAQ$  leur reste directement semblable au cours de la déformation du parallélogramme. Définissons par exemple le point  $Q$  à partir de  $CD$  par  $(\overline{DC}, \overline{DQ}) = \delta$ , angle défini à  $2\pi$  près et  $DQ = kDC = ka$ ; nous lui associons le point  $P$  lié à  $BC$ , tel que  $(\overline{BP}, \overline{BC}) = \delta$  et  $BP = \frac{BC}{k} = \frac{b}{k}$ .*

*Les triangles  $ABP$  et  $QDA$  sont directement semblables (2<sup>e</sup> cas de similitude), d'où  $\frac{AQ}{AP} = k$ ,  $(\overline{AP}, \overline{QA}) = (\overline{BP}, \overline{DA})$ , c'est-à-dire  $(\overline{AP}, \overline{AQ}) = (\overline{BP}, \overline{AD}) = \delta$*

*$PAQ$  est donc bien directement semblable aux plaques triangulaires données.*

*Lebesgue (1941, p. 70)*

On conclut alors que le point  $Q$  est l'image du point  $P$  par la similitude plane directe de centre  $A$ , de rapport  $k$  et d'angle dont une mesure est  $\delta$ .

Ainsi, par rapport au domaine plan des points constructibles, la différence entre les deux pantographes se situe au niveau des possibilités offertes pour la reproduction d'un dessin. Le pantographe classique permet une reproduction ponctuelle d'un dessin selon une seule direction de droite passant par  $A$  et le point à reproduire, tandis que la machine de Sylvester, permet de reproduire selon une direction de droite distincte de celle définie par  $A$  et le point à reproduire.

## I.3. La machine de Sylvester réalisant la rotation

### I.3.1. Le modèle classique

Le seul point fixe du système articulé est encore le point  $A$ . Lorsque l'on pose  $k = 1$ , la similitude plane obtenue ci-dessus se réduit à une rotation plane. En effet, on a :

$$DQ = DC = a \text{ et } BP = BC = b; \text{ donc } AQ = AP.$$

Dans ces conditions, le triangle variable  $PAQ$  ainsi que les triangles invariables  $PBC$  et  $CDQ$  sont isocèles et directement semblables (fig.6). Ce résultat qui assure la conservation des angles du triangle isocèle variable  $PAQ$ , permet de dire que le point  $Q$  est le transformé du point  $P$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle dont une mesure est  $\alpha$ .

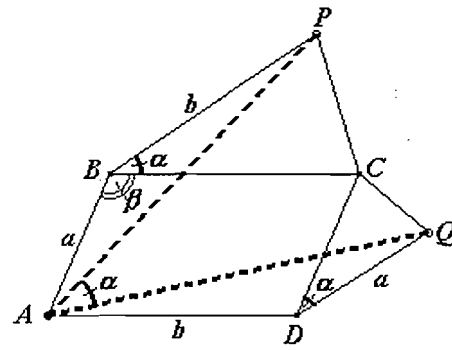


fig.6

Le modèle classique de la machine de Sylvester réalisant la rotation est assujéti à certaines contraintes qui ont des conséquences sur son fonctionnement en tant que *transformateur mécanique des points du plan*.

### Une seule rotation réalisable

Les longueurs respectives des 8 tiges articulées du modèle classique sont fixées à l'avance et ne sont plus modifiables. Ceci a pour conséquence d'offrir la possibilité de réaliser une seule rotation.

### Les positions limites de la machine

Par ailleurs, il est intéressant de connaître certaines positions limites théoriques de la machine dans le but de déterminer son domaine plan des points constructibles, c'est-à-dire les points du support plan accessibles par les *points traceurs*  $P$  et  $Q$ . Pour cela, appelons  $\beta$  une mesure l'angle  $\sphericalangle ABC$  dans le parallélogramme  $ABCD$  (fig. 6) où  $\beta$  prend théoriquement ses valeurs dans  $[0 \pi]$ . Alors on peut établir que :

$AQ = AP = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta)}$ . Ce résultat permet d'envisager trois positions limites théoriques de la machine en fonction des valeurs prises par  $\beta$ .

Pour  $\beta = 0$  : Le parallélogramme  $ABCD$  est aplati avec les sommets  $A$  et  $C$  comme points de  $[BD]$  (fig. 7).

Alors on a :  $AQ = AP = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$

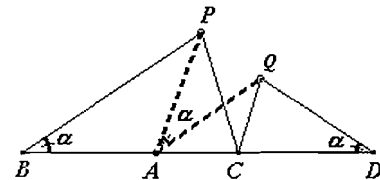


fig.7

Pour  $\beta = \pi$  : Le parallélogramme  $ABCD$  est aplati avec les sommets  $B$  et  $D$  comme points de  $[AD]$  (fig.8).

Alors on a :  $AQ = AP = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$

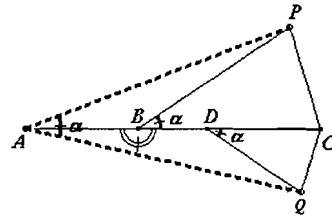


fig.8

Pour  $\beta = \pi - \alpha$  : Le parallélogramme  $ABCD$  est la position telle que les points  $A, B$  et  $P$  sont alignés (et donc  $A, D$  et  $Q$  sont alignés) (fig.9).

Alors on a :  $AQ = AP = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$

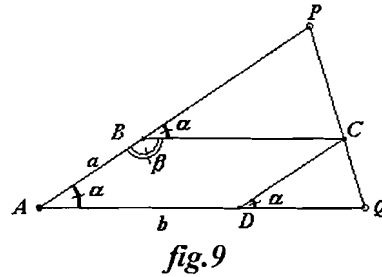


fig.9

Ces positions limites permettent de montrer que le domaine plan théorique des points constructibles par la machine est l'ensemble des points d'une couronne circulaire limitée par deux cercles de centre  $A$  et de rayons respectifs  $\rho_1, \rho_2$  avec  $\rho_2 = a + b$  et  $\rho_1 < \rho_2$ . Le rayon  $\rho_1$  dépend des valeurs prises par l'angle  $\alpha$ . C'est ainsi que :

- Si  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  alors  $\rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$ .
- Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  alors  $\rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  alors  $\rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$ .

### 1.3.2. Le modèle conçu pour une étude de cas

Les contraintes mécaniques<sup>3</sup> font que l'angle de mesure  $\alpha$  est tel que :  $0 < \alpha < \pi$  selon que l'on considère la rotation qui transforme  $P$  en  $Q$  ou la réciproque de celle-ci. On considère toujours que les longueurs  $a, b$  sont fixées. En appelant  $l_a$  et  $l_b$  respectivement les longueurs des tiges  $QC$  et  $PC$ ;  $\alpha$  est lié à chacune d'elles par les formules ci-dessous :

$$l_a = a\sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \quad \text{et} \quad l_b = b\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

(fig.10).

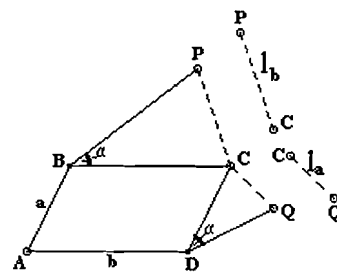


fig. 10

Dans ces conditions, il est possible de paramétrer  $\alpha$  à l'aide des longueurs  $l_a$  et  $l_b$ ; à chaque couple de valeurs  $(l_a, l_b)$  correspond une valeur unique de  $\alpha$ . On peut ainsi générer une famille de rotations planes de même centre  $A$ , réalisables à partir du même parallélogramme articulé.

<sup>3</sup> Il s'agit en particulier, de l'inégalité triangulaire stricte ( $x + y < z$ ) relatives aux longueurs des côtés des triangles rigides extérieurs au parallélogramme articulé.

## II. Une Étude Didactique de la Machine de Sylvester

### II.1. Cadre théorique

#### II.1.1. Introduction

L'objet de l'étude, se situe dans une problématique d'apprentissage des transformations. Notre intérêt porte en particulier, sur le domaine des transformations des figures dans la perspective de la transition 9<sup>e</sup>-10<sup>e</sup> (3<sup>e</sup>-2<sup>nd</sup>e en France). A cet effet, nous nous référons essentiellement à la théorie des situations didactiques de Brousseau selon laquelle,

L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste *par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.*

(Brousseau G., 1986)

Une des principales tâches de notre étude est de concevoir et d'organiser ce milieu, système antagoniste de l'élève qui « ...joue donc un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme référence et objet épistémologique (...) (ibid., 1990, pp. 320-321) »

Mais c'est en tant qu'outils de résolution de problèmes que se manifestent généralement les connaissances des élèves. Aussi nous présentons dans ce paragraphe quelques types de problèmes qui nous semblent didactiquement significatifs des transformations géométriques par rapport à une transition 9<sup>e</sup> – 10<sup>e</sup> (3<sup>e</sup> – 2<sup>e</sup> en France) L'étude est essentiellement axée sur la rotation plane.

#### II.1.2. Des précisions sur le cadre théorique

##### Niveau d'étude de l'objet "transformation"

Les transformations géométriques étudiées ici sont considérées comme *transformations de figures*, c'est-à-dire comme « comme relation entre deux configurations géométriques ou une relation entre deux parties d'une même configuration (le caractère fonctionnel est absent), (Laborde et Grenier 1987, p.66) » ; on n'est pas encore au niveau conceptuel « application ponctuelle du plan sur lui-même (ibid., 1987, p.66) ».

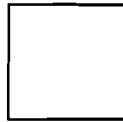
##### Transformation et problématique dessin/figure

La problématique « dessin/figure » a été abordée dans de nombreux travaux<sup>4</sup>, l'exemple donné par Balacheff (1999) nous paraît assez explicite à ce sujet.

---

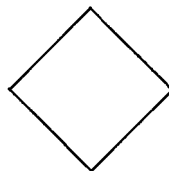
<sup>4</sup> Notamment ceux de Parzysz (1988), de Duval (1994 et 1995) de Laborde et Capponi (1995), Chaachoua (1997), Balacheff (1999).



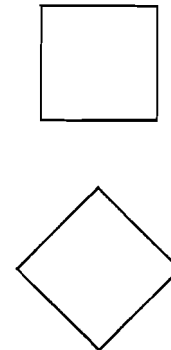
*fig. a*

Outre le registre graphique, une figure, comme construction mentale, peut avoir sa source dans le registre langagier, dans un discours évocateur d'une configuration particulière. A l'énoncé «un carré est un parallélogramme ayant un angle droit et dont deux côtés consécutifs sont égaux » pourra être attachée la même figure que celle attachée au dessin ci-dessus (*fig. a*).

Cependant, cette correspondance n'est pas assurée. Tel sujet associera la même figure à la proposition et au dessin ci-dessus (*fig. b*), mais il rejettera comme carré le dessin représenté ci-dessous, en prenant en compte des données spatiales non pertinentes du point de vue de la lecture géométrique. (Balacheff, 1999, p. 217)

*fig. b*

Cet exemple permet d'émettre a priori, que tout facteur favorisant ou inhibant la lisibilité d'une figure à partir d'une de ses représentations dans le registre figuratif est facteur pertinent dans l'appréhension d'une transformation à travers son action sur cette figure. Dans le cas spécifique de la rotation, l'étude de cette transformation qui fait passer du premier dessin au second (ou réciproquement) à travers des reproductions liées au choix de la position relative des deux dessins (*fig.11*), nous semble significative non seulement du processus d'apprentissage de la rotation mais aussi du passage du dessin à la figure.

*fig.11*

## II.2. Quelques types de problèmes

Les types de problèmes retenus dans cette étude sont représentés à l'aide du schéma de Vergnaud (1986, pp.51-71) sur les structures additives<sup>5</sup>. Dans ce schéma (*fig.12*), nous substituons au triplet (*état initial, transformation, état final*), le triplet (*figure objet, transformation, figure image*) noté ( $F_o, f, F_i$ ).

<sup>5</sup> Le schéma de Vergnaud est considéré ici comme un modèle de représentation qui ne renvoie ni aux mêmes types de problèmes ni aux mêmes objets d'étude.



fig.12

### II.2.1. Problèmes classiques

Le type de problèmes représenté par le schéma (fig.13) est le plus répandu dans les pratiques de classes comme le montre l'étude de Carvalho et Laborde sur les exercices de manuels relatifs aux transformation géométriques « (...) 172 sur 233 des questions étudiées portent sur la construction d'images (...) Seules 3 questions portent sur la caractérisation géométrique de l'image (Carvalho et Laborde, 1999) ». Pour un tel problème, la figure objet ( $F_o$ ) est donnée ainsi que la transformation en jeu ( $f$ ) par la donnée de son (ou ses) élément(s) caractéristique(s)<sup>6</sup>; le type de tâches proposé aux élèves est de déterminer la figure image.

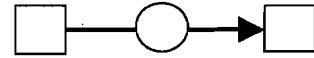


fig.13

Il s'agit en général des tâches de reproduction de figures, de construction à l'aide d'instruments de géométrie de la transformée de ( $F_o$ ) ou encore la reconnaissance de la transformée de ( $F_o$ ) parmi plusieurs figures candidates.

### II.2.2. Type de problèmes "boîte noire"

L'idée de "boîte noire" en géométrie repose essentiellement sur des situations-problèmes dans lesquelles la tâche de l'élève est de trouver un procédé de construction d'une figure donnée (Charrière, 1996, pp. 217-233).

Le type de problèmes représenté par le schéma ci-contre (fig.14) est tel que le couple de figures objet et image, ( $F_o$ ,  $F_i$ ) homologues par la (ou les) transformation(s) en jeu est donné.

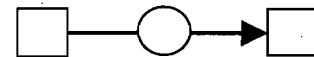


fig.14

Le type de tâches proposé aux élèves pourrait être alors :

- la détermination des propriétés géométriques de la (ou des) transformation(s) en jeu; en particulier la reconnaissance et (ou) la caractérisation géométrique d'une transformation ciblée;
- la détermination d'un procédé de construction de la figure image ( $F_i$ ) à partir de la figure objet ( $F_o$ ).

<sup>6</sup> Par exemple, pour la symétrie centrale, l'élément caractéristique est le centre de symétrie, pour la rotation les éléments caractéristiques sont le centre et l'angle.

Nos deux études de cas relèvent de ce type de problèmes. Dans le cas spécifique de la rotation, des situations pourraient être envisagées dans la perspective d'un processus didactique faisant appel à l'environnement de la machine de Sylvester. En effet, le fonctionnement de cet appareil articulé sur son support plan réalise la rotation mais ne simule pas un mouvement de rotation<sup>7</sup>. Dans ces conditions, l'exécution des tâches citées plus haut exige des élèves certains comportements pertinents pour les apprentissages liés à l'étude de la rotation en tant qu'objet.

- Mettre en relation les figures objet et image afin de découvrir les propriétés relatives à la transformation en jeu.
- Emettre des conjectures et les valider :
- S'engager dans un processus de modélisation de la transformation réalisée par la machine de Sylvester.

### II.2.3. Autres types de problèmes

D'autres types de problèmes sur les transformations de figures peuvent être représentés par le schéma de Vergnaud. Pour la rotation plane par exemple, on peut adopter le même modèle de représentation pour, la réciproque d'une rotation, la composée de deux rotations de même centre ou non. Ils ne seront pas développés car notre centre d'intérêt ici, est le type de problèmes "boîte noire".

## III. Deux Cas d'Étude

### III.1. Une situation de réinvestissement de la rotation

#### III.1.1. Objet d'étude

Cette mise en situation d'élèves de 3<sup>e</sup> d'un collège<sup>8</sup> avait comme objet d'étude certains aspects du rapport *enseignement/apprentissage* à propos de la rotation. Il s'agissait d'analyser le fonctionnement de ce qui a été (ou supposé être) appris par les élèves après avoir reçu un enseignement de la rotation en 4<sup>e</sup>. A cet effet, nous nous sommes intéressé en particulier, aux types de contrôles exercés par les élèves dans des tâches de reconnaissance et/ou de caractérisation de la rotation à partir de deux figures homologues.

#### III.1.2. Brève présentation de l'environnement de Cabri-géomètre

Cabri-géomètre est un logiciel de géométrie qui permet « de construire au moyen d'opérateurs (primitives de construction) des objets géométriques en faisant intervenir des relations entre ces objets (Bellemain, 1996, p.177) ». Chaque objet dans Cabri-géomètre est associé à une classe de représentations graphiques.

---

<sup>7</sup> Cf. Sangaré, (2000), p. 195.

<sup>8</sup> Il s'agit d'un collège de la région de Grenoble en 1994.

L'utilisateur peut construire à l'écran un dessin en lui donnant des spécifications géométriques. Grâce à la manipulation directe, il est possible de désigner sur l'écran les éléments nécessaires à la construction d'un objet.

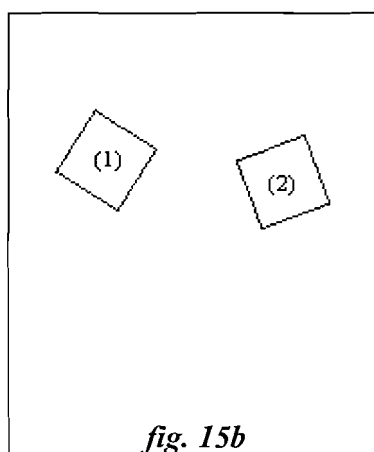
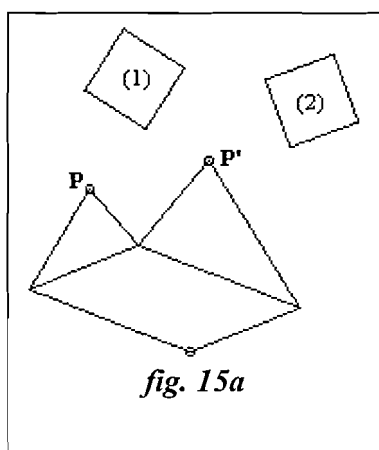
Une barre de menus déroulants permet de créer de nouveaux opérateurs directement intégrables et disponibles, les "*macro-constructions*". Le logiciel permet, selon les objectifs d'apprentissage, de faire un choix approprié des menus en supprimant certains opérateurs. D'autre part, il existe une instruction nommée *Journal de session* qui permet d'enregistrer toutes les opérations menées par l'utilisateur. Par exemple, pour la construction de la médiatrice d'un segment donné, l'activation du *Journal de session* permet de visualiser de façon chronologique toutes les instructions données à la machine pour exécuter cette tâche.

### III.1.3. Description synthétique du dispositif expérimental

L'expérimentation concerne le type de problèmes "boîte noire". Elle a eu lieu avec 12 élèves, la classe était organisée en trois équipes de 4 élèves chacune codées respectivement A, B, C. Chaque équipe se divisait en deux binômes pour les tâches qui doivent être effectuées dans l'environnement Cabri-géomètre. Les élèves de cette classe avaient travaillé de façon régulière avec Cabri-géomètre durant toute l'année scolaire mais n'avaient eu aucun contact avec la machine mécanique de Sylvester. La séquence comportait quatre étapes dont nous donnons une présentation synthétique.

- **Etape 1** : Le professeur présente brièvement aux élèves la machine mécanique de Sylvester sous son aspect *boîte noire*. A partir d'une figure tracée par le «*point directeur P*», il trace la figure correspondante à l'aide du «*point traceur P'*». Quelques élèves sont désignés au hasard pour aller effectuer ce type de tâches à l'aide de la machine.

- **Etape 2** : Il s'agissait d'une tâche de prédiction sur la transformation en jeu dans l'environnement de la machine mécanique de Sylvester. Une feuille de dessin comportant deux carrés homologues par la rotation réalisée par la machine mécanique était installée sur le support de la machine. Les deux carrés étaient dans la couronne circulaire des points constructibles par la machine c'est à dire, l'ensemble des points accessibles aux *points directeur et traceur P et P'* (**fig.15a**). D'autre part, une copie conforme de la feuille installée sur la machine était fixée sur la table de travail de chacune des trois équipes (**fig.15b**).



Consignes :

Lorsque le point  $P$  décrit le carré (1), le point  $P'$  décrit le carré (2). Le carré (2) est l'image du carré (1) par une certaine transformation quand vous faites fonctionner la machine.

- Trouvez cette transformation. Vous avez le droit d'aller manipuler la machine.
- Vous n'avez pas droit aux instruments de géométrie. Mais un autre groupe d'élèves dispose de ces instruments. Rédigez un message pour ces élèves en leur demandant d'effectuer les vérifications que vous souhaiteriez faire pour déterminer la transformation. (Durée : 20 mn)

• **Etape 3 :** Elle était consacrée à une tâche de vérification dans l'environnement Cabri-géomètre. A cet effet, chaque équipe se scindait en deux binômes. Chaque binôme avait un poste de travail dans l'environnement de Cabri-géomètre où était disponible un modèle simulé de la machine de Sylvester avec les deux carrés homologues à l'image de la figure (*fig.14a*).

Consignes :

Cherchez dans le dossier «Expé » le fichier «Sylvester » et ouvrez-le.

Dans cette fenêtre de votre ordinateur, vous avez une machine de Sylvester simulée dans Cabri-géomètre, semblable à celle que vous venez de manipuler et une figure semblable à celle que vous avez étudiée dans l'activité précédente.

- Faites les vérifications que vous souhaitez effectuer. Vous pouvez procéder à d'autres vérifications si vous le jugez nécessaire.
- Après avoir effectué ces vérifications, vous devrez retrouver les deux autres camarades de l'équipe pour rédiger sur une affiche, une réponse définitive de l'équipe avec les justifications. (Durée: 30 mn)

• **Etape 4 :** Un bilan des deux activités est mené par le professeur prenant en compte le travail des élèves. Il portera sur :

- les conjectures émises par les élèves à propos de la transformation en jeu ;
- les différents contrôles exercés sur ces conjectures.

### III.1.4. analyse de la tâche

#### La transformation en jeu

Il s'agit de la rotation en  $3^e$  donc définie par trois éléments caractéristiques : le centre, l'angle géométrique dont les mesures de degrés sont comprises entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  et le sens qui est indiqué au cas par cas. La tâche des élèves est de reconnaître et caractériser la rotation à partir de deux figures homologues.

Par rapport aux autres transformations enseignées au collège (symétrie orthogonale, symétrie centrale et translation), la rotation s'avère en général plus complexe à appréhender de façon visuelle<sup>9</sup>. En effet, la perception visuelle permet le plus souvent de localiser un élément de symétrie (un centre ou une droite symétrie) de déceler la conservation d'une direction de droites lorsqu'il s'agit d'un couple de figures homologues polygonales usuelles (triangle, quadrilatère convexe, etc.). Par contre, il

<sup>9</sup> A ce sujet, nous nous référons aux résultats de Duval, (1995), pp. 195-196.

n'est pas aisé de repérer de visu l'angle d'une rotation à partir d'un couple de figures homologues sauf peut-être dans des cas particuliers.

### Les variables didactiques

Pour la situation, nous avons déjà analysé le type de tâches "boîte noire". Pour le problème mathématique, nous faisons le choix de deux variables didactiques : *la figure à transformer* et *la position relative des figures objet et image*. Pour chacune d'elles une valeur est fixée pour les raisons ci-dessous.

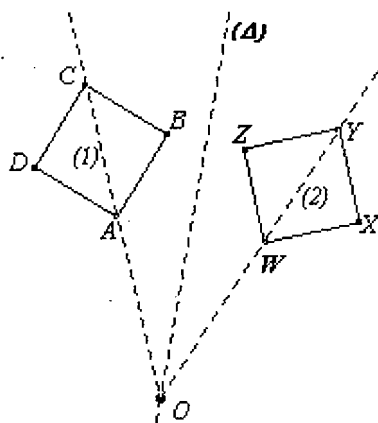
**La figure en jeu dans la rotation :** La figure choisie est le carré, figure usuelle dans les pratiques de classes en 3<sup>e</sup>. D'autre part il s'agit d'un polygone convexe régulier admettant plusieurs éléments de symétrie (un centre et 4 axes de symétrie). Ces propriétés du carré offrent la possibilité de provoquer des interférences avec les autres transformations enseignées au collège afin que les élèves puissent aller au-delà de la simple perception visuelle. Par exemple lorsqu'il s'agit d'un triangle scalène, les élèves peuvent facilement repérer de façon visuelle les bonnes correspondances entre les sommets homologues à cause de l'inégalité deux à deux des longueurs des côtés (ou des angles).

D'autres figures régulières possèdent également ces caractéristiques, par exemple le cercle. Mais son étude nous paraît plus complexe que le carré pour les élèves de 3<sup>e</sup>.

**La position relative des figures objet et image :** Pour mieux expliquer le choix de cette variable, nous utilisons une reproduction de la figure avec les caractéristiques géométriques cachées des élèves (*fig. 16*).

La figure formée par les carrés objet et image (1) et (2) est réalisée par la machine mécanique ou par la machine simulée dans Cabri-géomètre. Elle vérifie les propriétés suivantes :

- Elle admet un axe de symétrie passant par le centre de la rotation en jeu, la droite ( $\Delta$ ).
- Les droites supports respectives d'une diagonale,  $[AC]$  du carré (1) et d'une diagonale,  $[WY]$  du carré (2) sont sécantes en le centre  $O$  de la rotation en jeu qui représente le seul point fixe de la machine mécanique (ou simulée dans Cabri-géomètre) dans son fonctionnement.



*fig. 16*

Ce choix est justifié par les raisons suivantes :

- Cette position relative des figures objet et image fait que le carré (1) se transforme en le carré (2) par plusieurs rotations. Mais la seule qui est l'enjeu de la situation est celle attestée par la machine de Sylvester ; sur la figure (*fig. 16*), elle peut être repérée par les couples de sommets homologues  $(A, W)$ ,  $(B, X)$ ,  $(C, Y)$  et  $(D, Z)$ . La machine offre alors la possibilité aux élèves d'avoir une preuve pragmatique sur l'existence de la transformation.

- Par ailleurs le passage du carré (1) au carré (2) peut s'effectuer par la symétrie orthogonale d'axe ( $\Delta$ ) passant par  $O$ . De plus cette symétrie orthogonale coïncide avec la rotation en jeu sur deux sommets du carré (1),  $A$  et  $C$ . C'est pour cette raison que nous avons autorisé les allers et retours entre la machine et la table de travail pour donner aux élèves la possibilité d'émettre et de réfuter de façon pragmatique, certaines conjectures à l'aide de la machine mécanique. Ainsi, cette disposition des figures objet et image permet a priori d'éviter de façon précoce le rejet des autres isométries enseignées car la symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont dans le milieu pour la situation proposée.

D'autre part, le choix de faire vérifier par les élèves dans l'environnement Cabri-géomètre les conjectures émises sur la machine mécanique avait deux objectifs :

- Eviter au niveau des élèves, certains *bruits* non pertinents par rapport aux vérifications à effectuer comme par exemple les erreurs sur les mesures (de longueur ou d'angle).
- Repérer les éventuels changements de comportement des élèves par rapport à l'objet rotation lors du passage de l'environnement de la machine mécanique à l'environnement de Cabri-géomètre. Par exemple est-ce que le rapport des dimensions de la figure à transformer va-t-il être pris en compte ou non par certains élèves ?

### III.1.5. Principaux résultats

De l'analyse des productions d'élèves, nous retenons ici trois résultats qui nous semblent être des indices significatifs des conceptions d'élèves en fin de collège à propos des transformations en général et de la rotation en particulier.

- **$C_1$  : «*Toute transformation serait une isométrie.*»**

Certains élèves considèrent que toute transformation est une isométrie mais, la validation est entièrement effectuée de façon perceptive. Ce modèle d'appréhension des transformations a été observé au niveau des équipes A et B par une analyse des protocoles relatifs à l'activité de prédiction sur la nature de la transformations en jeu.

Equipe A :

*Ale. : Il faut regarder si ça (carré 2) est égal à ça (carré 1).*

*Edi. puis Car. : Mais si !... C'est son image... donc ils ont même mesure.*

Equipe B :

*Man. : Est-ce le carré 1a les mêmes mesures que le carré 2 ?*

*Cel. : Mais c'est son image !*

Ce modèle d'appréhension d'une transformation est dû probablement au fait qu'au collège, les transformations enseignées sont toutes des isométries. En conséquence, dans l'apprentissage des transformations, la conservation ou non des distances n'apparaît pas comme problématique chez les élèves.

- **$C_2$  : «*Si la transformation cherchée n'est ni une symétrie orthogonale, ni une symétrie centrale, ni une translation, alors c'est une rotation*»**

Il s'agit là d'un modèle d'appréhension de la rotation fondé sur le principe d'élimination des autres transformations connues des élèves. Il est apparu de façon assez claire dans le protocole relatif à la tâche de prédiction au niveau des équipes A et B :

Equipe A :

Edi. : *Il faudrait voir...si...non !*

Ale. : *Vas-y !*

Edi. : *Je pensais...sais pas...il pourrait avoir une droite qui passerait par tous les milieux. Et dans ce cas ça serait pas une rotation.*

Ale. : *Une médiatrice alors ?*

Edi. : *Voilà.*

.....

Prof. : *Tout à l'heure vous avez éliminé quoi ?*

Edi. : *La symétrie axiale et la symétrie centrale.*

Car. : *B' est là...C' est là...*

Ale. : *C'est une translation*

Les autres membres du groupes : *Non !*

Equipe B :

Cel. : *On dirait une symétrie axiale !*

(elle pose son avant-bras sur la feuille en guise d'axe).

Fre. : *Mais on n'a pas le droit de tracer.*

Ils vont à la machine mécanique ; la manipulent.

Man. : *C'est pas une symétrie donc c'est une rotation.*

.....

Fre. : *C'est pas une translation*

Man. : *D'accord !*

Paul. : *Par rapport à un vecteur ?*

Cel. : *Mais non ! C'est pas parallèle.*

...

Cel. : *Et la symétrie centrale ?*

Man. : *Centrale ? C'est par rapport à un point ?*

Cel. : *Ça ce serait opposé donc comme ça*

(elle montre le prolongement d'une diagonale du carré (1)).

Fre. : *Non ! Normalement il devrait être là.*

Ensuite, c'est l'équipe C qui met en œuvre ce modèle d'appréhension des transformations par le rejet des autres transformations. Cependant, ce rejet s'appuie sur des invariants spatio-graphiques tels que la position relative des figures objet et image, les relations entre les côtés des deux figures comme le montre le texte libellé sur leur affiche :

Equipe C :

*La transformation cherchée est la rotation car l'image (2) n'est pas l'inverse de la figure (1), aucun côté de l'image (2) n'est parallèle à la figure (1)...*

Nous disons que ce modèle d'appréhension de la rotation est fortement lié au contrat didactique dans la mesure où pour des élèves de fin de 3<sup>e</sup>, les transformations étudiées sont au nombre de 4 : la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la translation et la rotation. D'autre part, à ce niveau scolaire, la rotation est déterminée par trois éléments caractéristiques, le centre, l'angle et le sens de rotation, alors que les autres isométries étudiées sont déterminées par un seul élément caractéristique.



Par ailleurs, l'angle est l'un des invariants géométriques les plus difficiles à appréhender par les élèves<sup>10</sup>. De surcroît, la machine de Sylvester ne simule pas un mouvement de rotation autour de son point de fixation.

Dans ces conditions, le nombre limité de transformations vues au collège (4 en tout) auquel s'ajoute la complexité de faire appréhender par les élèves les invariants spécifiques de la rotation, semblent conduire au niveau de la relation didactique, à l'acceptation tacite d'une règle contractuelle régissant l'exécution d'une tâche de reconnaissance d'une rotation à partir de deux figures homologues. Cette règle peut se formuler de la manière suivante :

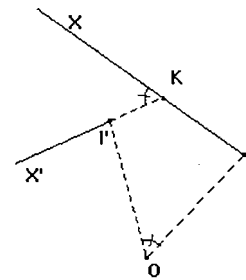
**RC<sub>r</sub> :**

- La transformation cherchée est parmi les 4.
- Pour prouver que c'est une rotation, il suffira de prouver que ce n'est pas l'une des 3 autres transformations.

• **C<sub>3</sub> :** «Pour trouver une détermination de l'angle d'une rotation, il faut trouver au préalable son centre»

Il s'agit d'un modèle d'appréhension induit probablement par les pratiques de classes qui font apparaître le plus souvent l'angle de rotation uniquement à partir de ses représentants issus du centre de rotation lié à la mise en œuvre de la définition généralement donnée<sup>11</sup> dans les procédés de construction de transformés de points ou de figures. Dans ces conditions, il s'avère assez difficile pour les élèves d'appréhender l'angle de rotation en dehors du centre de rotation.

Les pratiques de classes pourraient faire évoluer la technique de détermination de l'angle d'une rotation à partir d'une demi-droite et de sa transformée même si celles-ci ne passent pas par le centre comme on peut le voir dans la figure ci-contre (*fig.17*). La demi-droite  $[IX)$  est transformée en la demi-droite  $[I'X')$  par la rotation de centre  $O$  qui transforme  $I$  en  $I'$ . L'angle de rotation repéré au centre de la rotation par son représentant  $\widehat{IOI'}$  est représenté aussi par  $\widehat{KXK'}$ .



*fig. 17*

Enfin le passage de l'environnement mécanique à l'environnement de Cabri-géomètre n'a pas provoqué de changement de comportement significatif de la rotation en jeu.

## III.2. Un premier enseignement de la rotation

### III.2.1. Objet d'étude

A la différence de la situation précédente, celle que nous analysons ici est une situation d'introduction la rotation. L'expérimentation relative à ce premier

<sup>10</sup> Sur ce point, voir Balacheff N. 1988, pp. 371 -374.

<sup>11</sup> Il s'agit de la définition d'une rotation par son centre, son angle géométrique et son sens.

enseignement de la rotation s'effectue à travers un jeu entre deux environnements, celui de la machine mécanique de Sylvester réalisant la rotation et celui du papier/crayon avec les instruments usuels de géométrie.

Elle avait deux objectifs essentiels :

- faire découvrir les propriétés géométriques de la rotation par des élèves n'ayant reçu aucun enseignement sur cette transformation;
- trouver un procédé de construction de l'image d'une figure par la rotation réalisée par la machine mécanique.

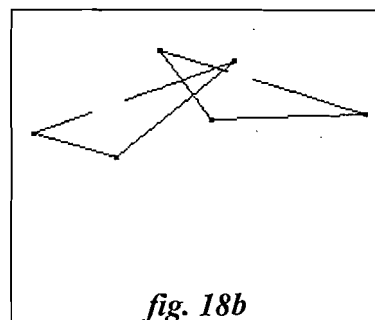
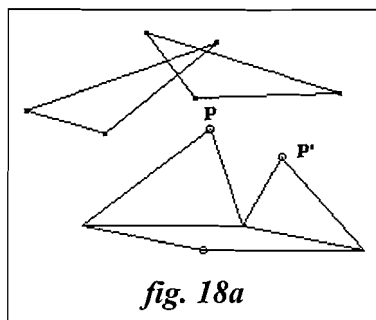
### III.2.2. Un résumé du scénario

L'expérimentation s'est effectuée<sup>12</sup> avec 16 élèves maliens à la sortie de la 9<sup>e</sup> année<sup>13</sup>. L'enseignement de la rotation commence au Mali en 10<sup>e</sup> année<sup>14</sup>. Les élèves n'avaient jamais travaillé en géométrie dans un environnement de machine mécanique ni dans un environnement informatique. Au second cycle fondamental ( qui correspond à peu près au collège en France), l'enseignement des transformations porte sur la projection parallèle<sup>15</sup>, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale, la translation et l'homothétie. La classe était organisée en équipes de 4 élèves chacune.

Par rapport aux objectifs fixés, l'expérimentation comportait deux séquences dont nous donnons une description succincte.

#### Première séquence

La séquence commence par une séance de familiarisation avec la machine. Elle est suivie d'activités portant sur la comparaison de la transformation réalisée par la machine de Sylvester avec celles connues des élèves. Cette comparaison devrait s'effectuer par rapport à leurs propriétés géométriques respectives. A cet effet, chaque équipe disposait sur sa table de travail (*fig.18b*) d'une copie conforme de la feuille de dessin installée sur la machine mécanique (*fig.18a*). Un crayon de couleur blanche était fixé en P, le crayon en P' était de couleur jaune.



<sup>12</sup> L'expérimentation a eu lieu en août 1998 à Bamako.

<sup>13</sup> La 9<sup>e</sup> au Mali correspond à peu près à la 3<sup>e</sup> en France.

<sup>14</sup> La 10<sup>e</sup> au Mali correspond à peu près à la 2<sup>e</sup> en France.

<sup>15</sup> Nous considérons ici le terme "transformation" au sens de Robert A. (1995, p. 25) selon lequel, elle ne fait pas de différence entre applications et transformation.

Les consignes étaient les suivantes :

Consignes :

*La feuille fixée sur votre table de travail est une reproduction identique de celle qui est sous la machine.*

*Connaissez-vous une transformation plane qui transforme la figure  $F_0$  en la figure  $F_1$  ?*

- *Si oui laquelle? Expliquez votre réponse.*
- *Si non, dites pourquoi?*
- *Pouvez-vous citer des propriétés de cette transformation? Justifiez à chaque fois votre réponse.*
- *Vous pouvez aller à la machine au plus trois fois au cours de cette séance.*
- *Vous pouvez utiliser les instruments de géométrie uniquement sur la feuille de votre table de travail.*
- *Toutes vos réponses doivent être rédigées sur la feuille de tâches. (Durée: 25 mn)*

### **Deuxième séquence**

Il s'agit de trouver un procédé de construction de l'image d'une figure par la rotation réalisée par la machine mécanique. La séquence s'est déroulée selon les mêmes dispositions que dans la première. Les consignes étaient les suivantes:

Consignes :

*La feuille fixée sur votre table de travail est une reproduction identique de celle qui est sous la machine.*

- *Trouvez un procédé de construction de  $F_1$  à partir de  $F_0$ .*
- *Rédigez votre solution sur la feuille de tâches en décrivant le procédé de construction utilisé.*
- *Vous pouvez aller à la machine au plus trois fois au cours de cette séance.*
- *Vous pourrez accéder à la feuille installée sur la machine après la rédaction de votre solution. (Durée: 25 mn)*

### **III.2.3. Éléments d'analyse a priori**

Les situations proposées aux élèves s'appuient principalement, sur le fait que la machine de Sylvester doit jouer le rôle de "boîte noire". Cette contrainte constitue de notre point de vue un moyen qui permet de placer les élèves dans l'environnement papier/crayon avec les instruments usuels de géométrie, en situation de recherche d'un procédé de construction du transformé d'un triangle par la transformation visée. Cette recherche s'effectuera a priori à travers les interactions entre les deux environnements.

La mise en rapport de la transformation en jeu avec celles qui ont été étudiées par les élèves au second cycle fondamental, doit permettre aux élèves de rejeter ces dernières. La stratégie attendue s'appuie sur un ensemble articulé de comparaisons entre des invariants perceptifs et géométriques. Par exemple, l'action de la transformation sur la forme des figures, ou encore la position relative des deux figures homologues sont des invariants perceptifs qui s'avèrent le plus souvent insuffisants pour caractériser une transformation; par contre, les effets sur les longueurs, les angles le parallélisme de

droites, ou sur deux droites perpendiculaires, etc., relèvent des invariants géométriques de la transformation. C'est ainsi que la valeur de l'angle ( $47^\circ$  environ), la position du point de fixation de la machine par rapport au couple de figures ( $F_o, F_i$ ) n'incitent pas à corroborer une conjecture faite sur l'une des transformations vue au second cycle fondamental. Ainsi, les résultats obtenus à l'issue de cette comparaison pourraient être significatifs de la recherche par les élèves, d'invariants spécifiques à la transformation en jeu.

Par ailleurs, la limitation à trois "allers et retours" entre la machine et la table de travail, résulte du souci de faire apparaître certains facteurs qui conditionnent la prise en charge du problème par les élèves. Ce nombre de fois nous semble suffisant pour permettre aux élèves en début de séance, d'appréhender puis de vérifier de façon pragmatique les bonnes correspondances (détermination des sommets homologues par exemple). Cette contrainte permet aussi, d'éviter que les élèves ne s'enferment dans des stratégies fondées uniquement sur des "essais - erreurs" ou encore sur des << rapports spatiaux intériorisés avec un milieu objectif évoqué (Berthelot R. et Salin M-H., 1992, p.41) >>. Limiter ce nombre nous paraît constituer une condition minimale pour que les élèves se détachent du milieu physique de la machine, afin de s'engager dans un processus de modélisation géométrique de la transformation visée favorisant ainsi l'émergence de connaissances théoriques<sup>16</sup>.

### III.2.4. Principaux résultats

Nous présentons ici les résultats significatifs des objectifs fixés pour cette séquence.

#### La machine comme "un jeu d'instruments de géométrie"

La machine de Sylvester a été perçue comme un appareil dont l'action sur les figures pourrait être obtenue en papier/crayon, par un procédé de construction à l'aide "d'un jeu d'instruments usuels de géométrie". Ainsi, la machine a été modélisée comme une sorte "d'opérateur instrumenté" qui agit sur les figures du plan. C'est cette appréhension qui ressort de cet extrait du protocole, relatif aux échanges de propos entre l'élève (R2) et l'enseignant (E):

- R2 : La machine joue le rôle des instruments comme compas, équerre, règle...
- E : Le rôle des instruments de géométrie. Peux-tu préciser ton idée un peu?
- R2 : je ne sais pas comment le dire quoi...

#### La machine comme "réalisatrice d'une transformation"

Certains élèves ont interprété l'action de la transformation en comparant les figures objet et image. Les propos tenus au cours de cette interprétation ont permis de mettre en évidence certains éléments de modélisation géométrique construits par les élèves.

D'abord "la machine réalise une transformation":

- R3' : La machine fait des transformations...
- E : Des transformations? Dans ce cas, il y en a plusieurs que la machine fait?
- R1 : Non, il y a une seule transformation.

<sup>16</sup> Cf. Henry M., 1997, pp. 5-36.

- E : Pourquoi?  
Silence
- R1 : C'est à dire quoi, si on met le crayon blanc et s'il trace un côté quoi, ça donne un seul côté avec le crayon jaune; donc les côtés sont les mêmes...même si on fait des va et viens avec la machine.
- R3' : Pour ça, il a raison.

Ces propos sont assez significatifs du niveau conceptuel des élèves sur les transformations c'est à dire le niveau "transformations de figures du plan". A un côté de la figure objet, on associe un côté unique de la figure image ; à un point remarquable<sup>17</sup> on associe un point remarquable unique; à une figure on associe une figure unique; ils ne sont pas encore au niveau conceptuel des "transformations des points du plan".

Ensuite, "La machine réalise une isométrie" comme l'indiquent ces extraits du protocole:

- R4 : Les côtés de la figure et de son associée ont même longueur.
- R1 : Les angles respectifs sont égaux.
- R1 : S'il y a un angle droit au crayon blanc, la machine fabrique aussi un angle droit sous le crayon jaune.
- R3' : Oui, on peut dire que la machine joue le rôle d'une isométrie.
- E : Tout le monde est d'accord?
- Classe : Oui!

Enfin, "La transformation en jeu est liée à une famille de triangles isocèles" comme l'attestent cet extrait du protocole et illustrée par la figure (fig.19)

- R1 : Je mesure les angles P. Ça fait 44 degrés.
- E : Qu'est-ce qui fait 44 degrés?
- R1 : Angle APA'; angle BPB'; angle CPC'.
- R1 : Pour les angles A, B', C, C', B' et A', ils sont tous égaux à 67 degrés à peu près
- E : (à R1) Bon, est-ce que tu peux résumer ce que vous avez trouvé?
- R1 : Bon, Monsieur les angles P sont les mêmes pour les trois triangles isocèles; ensuite, les angles A, B', C...c'est à dire les angles de base qui sont les mêmes.

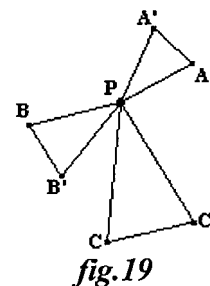


fig.19

Notons aussi que la mesure de l'angle au sommet désigné par P (fig.17) diffère selon les équipes, 44° pour certaines ou 46° pour d'autres. Ces différences ont été considérées comme étant dues à des erreurs de mesure. Cependant, il semble que derrière cet argument, les élèves ont voulu éviter des mesures fractionnaires<sup>18</sup> pour les angles de base des triangles isocèles de la famille. Cet évitement a été contrôlé sur le plan théorique par la propriété relative la somme des angles triangle appliquée au cas particulier du triangle isocèle. C'est ce que cet extrait du protocole semble corroborer :

- E : Alors comment vous avez fait?
- Maï : On a calculé.

<sup>17</sup> Nous désignons par point remarquable, tout point qui peut être appréhendé de façon perceptive sur une figure complexe, point d'intersection de deux lignes, extrémités d'un segment, sommet d'un polygone, etc.

<sup>18</sup> Rappelons que l'angle au sommet P au moment de l'expérimentation mesurait 47° environ.

- *E1* : Explique-nous votre calcul.
- *Maï* : Bon on sait que l'angle  $P$  est 46 degrés. Bon,  $B$  est égal à 180 degrés moins 46 degrés, divisés par deux, ça fait 67 degrés.
- *R3'* : C'est comme ça même qu'on a fait.

### Emergence de trois procédés de construction

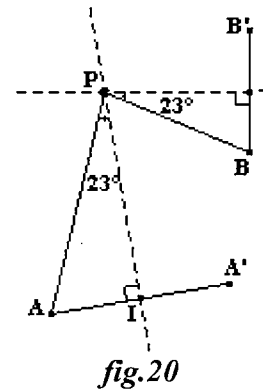
L'analyse des productions d'élèves a permis de mettre en évidence trois procédés de construction du triangle image à partir du triangle objet mis en œuvre au cours de cette séquence. Ils s'appuient sur des propriétés relatives à la famille de triangles isocèles liée à la transformation en jeu.

#### Procédé fondé sur les médiatrices des bases des triangles isocèles :

Le programme de construction est le suivant (**fig.20**):

- Tracer la droite  $(\Delta_A)$  telle que l'angle de  $[PA)$  et  $(\Delta_A)$  soit égal à  $23^\circ$  (moitié de la mesure de l'angle  $\hat{P} = 46^\circ$ ) dans le sens induit par la machine mécanique.
- Tracer la demi-droite  $[AX)$  perpendiculaire à  $(\Delta_A)$  qui la coupe en  $I$ .
- Construire le point  $A'$  sur  $[AX)$  tel que  $I$  soit le milieu de  $[AA']$ .

L'angle de  $23^\circ$  a été considéré ici comme un "outil auxiliaire" de construction de la droite  $(\Delta_A)$  et non comme invariant lié de façon intrinsèque à la transformation en jeu.



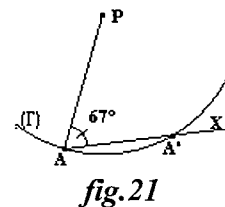
Ainsi, la détermination de la droite  $(\Delta_A)$  constitue pour ces élèves une condition nécessaire et suffisante pour la construction du transformé  $A'$  de  $A$ .

Nous expliquons ce comportement par le fait que la configuration "famille de triangles isocèles semblables" a été réduite à la configuration "famille des médiatrices des bases". Cette dernière s'est avérée opératoire par rapport à la tâche assignée aux élèves. Mais elle s'est érigée en facteur d'inhibition pour l'émergence de l'invariant géométrique qui caractérise le mieux la rotation à savoir l'angle. Nous qualifierons cette étape de "pré-caractérisation" dans un processus de conceptualisation de la rotation.

#### Procédé fondé sur "l'angle de base du triangle isocèle" :

Le programme de construction est le suivant (**fig.21**):

- Tracer la demi-droite  $[AX)$  dans le sens induit par la machine mécanique telle que l'angle  $((AP), (AX)) = 67^\circ$ .
- Tracer le cercle  $(I)$  de centre  $P$  passant par  $A$ .
- $[AX)$  et  $(I)$  se recoupent en un point qui est  $A'$ .



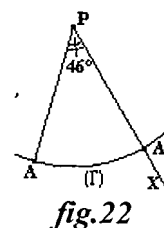
Ce procédé utilise l'angle en tant qu'invariant de la transformation. Cependant, il n'utilise pas la détermination souhaitée, celle de l'angle de rotation. Néanmoins, ces deux déterminations sont liées par la relation angulaire particulière relative à un triangle isocèle.

**Procédé fondé sur "l'angle au sommet du triangle isocèle" :**

Il s'agit du procédé habituellement utilisé pour construire le transformé d'un point par une rotation définie par son centre, une mesure de l'angle et le sens.

Le programme de construction est le suivant (*fig.22*):

- Tracer la demi-droite  $[PX)$  dans le sens induit par la machine mécanique telle que l'angle  $((PA), (PX)) = 46^\circ$ .
- Tracer le cercle  $(I)$  de centre  $P$  passant par  $A$ .
- $[PX)$  et  $(I)$  se coupent en un point qui est  $A'$ .



*fig.22*

Signalons que ce procédé est apparu lors de la phase de bilan, suite à la construction d'un autre sommet du triangle objet par le procédé fondé sur "l'angle de base du triangle isocèle".

#### IV. Conclusion

La première étude a porté sur une situation de réinvestissement concernant la rotation dans un jeu entre l'environnement mécanique de la machine de Sylvester et celui du logiciel de géométrie Cabri-géomètre. Les résultats obtenus montrent que les connaissances disponibles chez les élèves après un premier enseignement de la rotation, ne permettent pas de reconnaître cette transformation à partir de ses propriétés intrinsèques. Mais appréhender une rotation à partir de deux figures homologues suppose au préalable l'appréhension de l'invariant qui le caractérise le mieux, l'angle. On retombe dans ces conditions, dans le vieux débat<sup>19</sup> des années 1960-1970. En conséquence, il faut d'autres approches pour que la rotation ne soit pas un cas isolé au sein de l'objet d'enseignement "transformations" en scolarité obligatoire et au lycée.

Le second cas d'étude a porté sur une situation relative à un premier enseignement de la rotation dans un jeu entre l'environnement mécanique de la machine de Sylvester et celui du papier/crayon. Les élèves ont su modéliser soit à l'aide d'instruments de géométrie, soit à partir d'un 2 "couple de figures", ce que réalise la machine mécanique comme transformation. Ils ont pu rendre opérationnelles les connaissances acquises dans l'élaboration et la mise en œuvre de trois procédés de construction de l'image d'un point. Ces procédés s'appuient tous, sur "la résolution d'un triangle isocèle" considéré ici comme "élément générique" d'une famille de triangles isocèles. Le procédé fondé sur "l'angle au sommet du triangle isocèle" est le seul conforme à nos pratiques de classes. Cependant, il ne s'agit pas de rejeter de façon systématique les deux autres, le processus de modélisation doit se poursuivre sinon, les élèves se cantonneraient uniquement dans une *géométrie pratique*. Il s'agira de passer des invariants graphiques d'un dessin attestés par une habileté technique, aux invariants géométriques d'une transformation attestés par des propriétés théoriques (Balacheff N., 1999, pp. 219-221). Une des pistes pour ce passage est de faire établir les propriétés géométriques auxquelles se réfèrent les procédés de construction et étudier les liens logiques qui existent entre elles. C'est l'une

<sup>19</sup> Il s'agit des débats relatifs aux rapports qu'entretiennent du point de vue transposition didactique, les notions d'angle et de rotation.

des conditions pour faire entrer les élèves dans le domaine hypothético-déductif. C'est également l'un des préalables pour que l'organisation des connaissances construites au regard de l'objet d'enseignement, ait du sens pour les élèves.

Engager les élèves dans des activités de modélisation géométrique suppose l'existence un milieu potentiellement propice à l'exercice de ce processus mental en rapport avec les objectifs d'apprentissage. Certes, le cahier est à la fois la mémoire individuelle de l'élève et la mémoire collective de la classe, exprimées sous forme de traces écrites et figuratives. Mais les activités géométriques en scolarité obligatoire ne peuvent se borner au seul papier/crayon. Cet environnement de représentation et de traitement de la géométrie ne peut être pertinent pour toutes les situations significatives de l'apprentissage dans ce domaine, le passage, "*géométrie pratique/géométrie théorique*" n'y est qu'en partie élucidé. La mise en rapport du papier/crayon avec d'autres environnements offre plus de possibilités pour concevoir des problèmes significatifs de ce passage, en exploitant au mieux les limites, les insuffisances de chacun des environnements disponibles. Cela constitue de notre point de vue, un facteur pertinent pour concevoir des situations de modélisation géométrique. Il offre également à l'enseignant des opportunités pour provoquer des ruptures de contrat, une des conditions nécessaires à un apprentissage provoqué par adaptation.

## Références Bibliographiques

BALACHEFF N. (1999), "Apprendre la preuve" in " La preuve à la lumière de l'intelligence artificielle ", pp. 197- 236, Sallantin, J.F. Szczeciniarz, J.J. (eds).

BALACHEFF N., (1988), Processus de preuves chez les élèves de collège, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier de Grenoble 1.

BARTOLINI BUSSI M. (1998), Drawing Instruments: Theories and Practices from History to Didactics, Documenta Mathematica - Extra Volume ICM 1998, vol, 3,735-746.

BELLEMAIN F. (1996), "Micromonde, manipulation directe et enseignement de la géométrie : un éclairage pour comprendre l'évolution de Cabri-géomètre vers Cabri-géomètre II", pp. 171-188, In : Université d'été « Cabri-géomètre » de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie, EIAH-Leibniz, IREM de Grenoble, IUFM de Grenoble, Université Joseph Fourier de Grenoble.

BERTHELOT L. et SALIN M-H. (1992), "L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire", Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux 1.

BROUSSEAU G. (1990), " Le contrat didactique, le milieu " Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol.9/3, pp. 309-336. Grenoble : La Pensée Sauvage

BROUSSEAU G. (1998), "Théorie des Situations Didactiques", Textes rassemblés et préparés Balacheff N. Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Wirfield, Recherche en didactique des mathématiques, pp. 225-237, La Pensée Sauvage éditions.



CARVALHO N.T.B. et LABORDE C. (1999), "Transformations géométriques et configurations en 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> : une première classification des tâches proposées aux élèves et leur répartition dans deux manuels", *Petit x*, n° 52, pp. 43-71.

CHAACHOUA H., (1997), "Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes", Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier Grenoble 1.

CHARRIÈRE P.M. (1996) "Vivre une démarche scientifique à l'aide de « boîtes noires », in Actes de l'université d'été « Cabri-géomètre », de l'ordinateur à la calculatrice (p.217-233). De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie, EIAH-Leibniz, Université Joseph Fourier de Grenoble.

CHASLES M. (1860), " Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences", Paris, 51, 1860, pp. 855-905.

DUVAL R. (1994), "Différents fonctionnements d'une figure dans une démarche de géométrie", *Repères – IREM*, N° 17, pp. 249-280.

DUVAL R. (1995), "Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels", Peter Lang.

EDWARDS, L.D. (1989), "Children's Learning in a computer Microworld for Transformations Geometry", Doctor of Philosophy in Science/Mathematics education, University of California at Berkeley.

GRAS R. (1983 ), "Instrumentation de notions mathématiques, un exemple : la symétrie", *Petit x*, N°1, p. 7-39 .

GRENIER D. (1988), "Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième", Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier (Grenoble 1).

GRENIER D. et LABORDE C., (1987), "Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale" in *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du Colloque de Sèvres, mai 1987, pp. 65-86. Grenoble : La pensée sauvage.

HENRY M. (1997), "Les premiers apprentissage en géométrie et en probabilités : des processus de modélisation comparables", In *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 1996-1997, pp. 5-36, Grenoble : IMAG.

JAHN A.P. (1998), "Des transformations de figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde", Thèse, Université Joseph Fourier Grenoble 1.

JORDAN C. (1964), *Mémoires sur les groupes de mouvements*, 1862, œuvres, IV Vol., pp. 231-302.

LABORDE C. et CAPPONI B., (1995), "Modélisation à double sens" in Actes de la 8<sup>ème</sup> Ecole d'été, pp. 265-278, I.R.E.M. de Clermont-Ferrand.

LEBESGUE H. (1941) " Leçons sur les constructions géométriques" professées au Collège de France en 1940-1941, Réimpression autorisée de l'édition originale 1987 - Gautiers -Villars, 1949, Editions Jacques Gabay.

PARZYSZ B., (1988) "Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures". Education, Studies in Mathematics, Vol.19, n°1, pp. 89-122.

ROBERT A., (1995) "L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES", vol. I – Géométrie, Ellipses.

SANGARÉ M.S. (2000) "La rotation : Approche cognitive et Didactique. Une étude de cas au Mali", Thèse Université du Mali, I.S.F.R.A. Bamako.

VERGNAUD G. (1989), Psychologie du développement cognitif et Didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives, Petit x, n°22, pp. 51-67.

Le supplément du Plot, Systèmes articulés n°1 (transformateurs géométriques), octobre 1983, IREM d'Orléans

Le supplément du Plot, Systèmes articulés n°2 (traceurs de courbes), décembre 1983, IREM d'Orléans

#### *Autres ouvrages consultés*

MODELO COSTRUITO (1992), Presso il Liceo scientifico A. Tassoni, dal Nucleo di Ricerca, in Storia e Didattica della Matematica, Università di Modena Italia.

CUNDY H.M. et ROLLET A. (1978) "Modèles mathématiques", pp. 241-256, CEDIC.