# DE L'ECOLE AU COLLEGE
# LES ELEVES ET LES MATHEMATIQUES

Roland CHARNAY
Professeur de mathématiques, IUFM de Lyon
Equipe de didactique des mathématiques, INRP

*L'article qui suit a été publié, dans une première version, dans le numéro 34 (de janvier 1998) de la revue « Activités mathématiques et scientifiques » éditée par la Mission Laïque Française. Nous remercions la Mission Laïque Française de nous avoir permis de reprendre cet article dans Grand N.*

De nouveaux programmes sont en vigueur pour l'école primaire et pour le collège. Le B.O. du 5 décembre 1996 (n° 44) publie une note de service intitulée « Mathématiques : articulation école-collège »[1], dont l'objet est « *de préciser, pour les enseignants du cycle des approfondissements de l'école primaire et pour ceux du premier cycle du collège, les aspects les plus significatifs à prendre en compte pour aider à une bonne articulation dans la mise en œuvre de ces nouveaux programmes* ».

Dans le prolongement de ces textes, il s'agit, dans cet article, de mettre en relief quelques éléments à prendre en compte dans le but d'assurer, pour les élèves, une meilleure transition entre ces deux temps de l'école obligatoire. En cherchant à expliciter les éléments de rupture, sans oublier de relever les éléments de continuité...

Pour apprécier la portée des modifications relatives à ce qui est enseigné, n'oublions pas les changements de contexte auxquels l'élève se trouve confronté. Au primaire, l'élève « sédentaire » (la plupart des activités se déroulent dans un même lieu) travaille avec un enseignant polyvalent pour qui les mathématiques sont rarement la discipline d'élection. Au collège, il devient « nomade » et appelé à travailler avec plusieurs enseignants dont chacun a une affinité particulière avec la discipline qu'il a choisi d'enseigner. Ajoutons qu'à l'école primaire le temps consacré aux mathématiques est moins compté qu'en sixième (5,5 h contre, en général, 3 h) et que sa gestion en est plus souple à l'école primaire (où le maître peut décider de la durée de chaque séance) qu'au collège (où la durée de chaque séance est fixée a priori).

Le passage d'un cycle à l'autre de la scolarité, et notamment l'entrée dans le secondaire, est toujours perçu comme un moment critique par les élèves. En effet,

[1] Cette note de service a été intégralement publiée dans le dernier numéro de Grand N (n° 61).

l'enseignement se modifie alors à différents niveaux : organisation, pratiques pédagogiques, caractérisation des disciplines enseignées et de leurs contenus ... Les échanges entre enseignants des deux cycles ne peuvent donc se limiter à une discussion (nécessaire) sur l'évolution des notions mathématiques. Dans les deux premiers paragraphes de cet article, nous proposons ainsi des éléments destinés à engager l'échange sur deux points : quelle est la perception des mathématiques chez les enseignants et les élèves du primaire et du collège ? sur quels points les méthodes pédagogiques évoluent-elles d'un cycle à l'autre ?[2]

**La perception des mathématiques évolue-t-elle de l'école au collège ?**

*Quelles idées les enseignants ont-ils sur les mathématiques ? Comment les perçoivent-ils ?*

Le questionnaire proposé ci-après concerne les conceptions des mathématiques que peuvent avoir les enseignants. Il peut être utilisé pour permettre à chacun, enseignant de primaire ou du collège, de se situer et donc de pouvoir échanger avec des collègues. On pourra évidemment, dans cette perspective, y ajouter d'autres items.

Voici un certain nombre d'opinions sur les mathématiques, extraites de différents ouvrages :

01 - « La mathématique apparaît comme un réservoir de formes abstraites »

02 - « Mathématique et rigueur sont synonymes »

03 - « Les mathématiques sont un langage universel »

04 - « Faire des mathématiques c'est essentiellement savoir élaborer des stratégies de recherche »

05 - « Le monde des mathématiques est un monde à part qui se suffit à lui-même »

06 - « Les mathématiques sont avant tout un ensemble de techniques de calcul »

07 - « En mathématique, il reste plus à découvrir qu'on n'a déjà trouvé »

08 - « Il est peu d'activités intellectuelles où l'on soit aussi complètement libre que dans les mathématiques »

09 - « Les mathématiques sont le privilège d'une élite restreinte qui prétend les comprendre »

10 - « Le premier caractère des sciences mathématiques est qu'elles sont un savoir réel portant sur les choses, mordant sur la matière »

11 - « Avant tout, les mathématiques apparaissent comme un ensemble de règles »

[2] Sur ces deux points, les propositions s'appuient sur un travail déjà ancien conduit, dans les années 80, par l'INRP, au cours d'une recherche intitulée « Articulation école-collège » (sous la direction de Jacques Colomb). Les quelques résultats rappelés ici sont surtout destinés à permettre des comparaisons avec les points de vue ou les constats qui peuvent être exprimés aujourd'hui. Les rapports de recherche sont disponibles à l'INRP (29, rue d'Ulm, 75005 Paris). Pour une information synthétique on pourra consulter l'article publié dans le n° 80 (juil-août-sept 1987) de la Revue Française de Pédagogie, sous le titre « Articulation école/collège : quels contrats disciplinaires en mathématiques ? »

*Indiquez les 3 opinions avec lesquelles vous êtes le plus en accord.*
*Indiquez les 3 opinions avec lesquelles vous êtes le moins en accord.*

Extrait de la recherche INRP « Articulation école-collège »

L'enquête réalisée par l'INRP faisait apparaître chez les enseignants de CM2 et de 6e une représentation assez voisine des mathématiques, même si les maîtres de CM2 insistaient davantage sur une vision des mathématiques comme « ensemble de techniques de calcul et de règles », comme « privilège d'une élite » et moins sur la « liberté » qu'on peut trouver dans leur exercice. Tous se retrouvent en effet pour associer « mathématiques et rigueur » et la moitié d'entre eux (en CM2 comme en 6e) les considèrent comme « langage universel » et comme activité où il s'agit d'élaborer « des stratégies de recherche ».

*Les enseignants du primaire et du collège assignent-ils les mêmes objectifs à l'enseignement des mathématiques ?*

Là encore, un échange peut être provoqué par la confrontation des réponses que chacun apporte à un même questionnaire, comme celui proposé ci-après (qui gagnerait sans doute à être actualisé et enrichi, par exemple par quelques questions touchant au rôle des mathématiques dans la vie quotidienne ou dans la compréhension du monde et aux connaissances géométriques qui permettent de maîtriser l'espace usuel et les formes les plus courantes).

Voici certains buts que l'on entend souvent assigner à l'enseignement des mathématiques.

*Indiquez les 3 plus importants pour les élèves du niveau auquel vous enseignez.*

01 - Développer l'esprit de recherche
02 - Acquérir des automatismes
03 - Savoir "se débrouiller" dans un problème
04 - Donner le goût des mathématiques
05 - Etre apte à suivre l'enseignement de la classe supérieure
06 - Comprendre une formulation mathématique
07 - Maîtriser le sens des opérations
08 - Développer l'esprit de rigueur
09 - Savoir justifier un résultat ou une démarche
10 - Apprendre à travailler avec d'autres
11 - Apprendre le vocabulaire des mathématiques
12 - Développer l'esprit critique
13 - S'exercer à l'explication verbale
14 - Acquérir des méthodes de travail

Extrait de la recherche INRP « Articulation école-collège »

Dans l'enquête de l'INRP, les maîtres de CM2 accordaient plus d'importance que les professeurs de 6e à la « maîtrise du sens des opérations », à « l'acquisition des automatismes » et paradoxalement au « développement de l'esprit de recherche », alors qu'en $6^e$, plus qu'au CM2, on mettait en avant « la justification des résultats et des démarches », « le développement de l'esprit de rigueur » et « l'acquisition de méthodes de travail ». « Savoir se débrouiller dans un problème » n'était retenu que par un enseignant sur cinq (en CM2 comme en $6^e$) et le « développement de l'esprit critique » par un sur dix. Les changements de programmes réalisés depuis lors et les travaux de recherche ou d'innovation ont-ils infléchi ces positions ? A chacun d'y répondre localement.

S'ils devaient être confirmés, ces résultats traduiraient un infléchissement dans les attentes respectives de l'enseignant de CM2 et de $6^e$ vis à vis de l'élève. Non seulement, en $6^e$, il faut trouver le bon résultat, mais il faut, davantage qu'au CM2, être capable de le justifier de façon plus rigoureuse. En passant du CM2 à la $6^e$, les élèves ont ainsi sans doute à ajuster leurs comportements... et peut-être cela devrait-il faire l'objet d'un travail explicite en début d'année. Cela peut également expliquer l'insistance plus grande en $6^e$ sur « l'acquisition de méthodes de travail ». Dans cette attente plus forte, ne faut-il pas lire plutôt l'indice d'une modification espérée des méthodes de travail que d'une revendication nouvelle de méthodes qui auraient été sous-estimée auparavant.

A chaque étape importante de sa scolarité, l'élève est ainsi confronté au difficile problème de l'intégration de nouvelles règles du jeu... qui, ne donnant pas lieu à des activités spécifiques, ne sont souvent perceptibles que par l'usage. Le regret souvent entendu d'un manque d'autonomie des élèves arrivant en $6^e$ peut, dans cette perspective, être interprété comme la réaction à une situation « d'insécurité » par rapport à des attentes mal identifiées. La construction de l'autonomie va de pair avec la clarification du contrat.

*Comment évolue la perception que les élèves ont des mathématiques ?*

Au cours de l'enquête citée précédemment, les élèves ont été interrogés sur leur intérêt pour les diverses disciplines enseignées. Au CM2, 7 élèves sur 10 disaient « aimer les maths » et pour 1 élève sur 4, c'était même « la discipline préférée ». Cet intérêt apparaissait en légère diminution, au cours de la $6^e$, puisqu'ils n'étaient alors qu'un peu moins de 6 sur 10 à déclarer « aimer les maths » et à peine plus d'un sur 10 à avouer les « préférer » aux autres disciplines. Mais la cote d'amour des mathématiques reste bonne au collège, ce qui est confirmé aujourd'hui encore par diverses enquêtes[3].

Dans le même temps, les élèves de $6^e$, s'exprimant sur leur perception de l'évolution de l'enseignement des mathématiques, insistent sur le fait que celui-ci leur apparaît davantage tourné vers l'apprentissage de choses précises (vocabulaire, règles, formules), vers la nécessité d'expliquer et de prouver ce qu'on avance... et accordant moins de place à la résolution de problèmes. Là aussi, il serait intéressant de savoir si leur opinion s'est aujourd'hui modifiée.

[3] Ainsi une enquête récente publiée fin 1996 par « Mon Quotidien », journal pour enfants, fait apparaître que, chez les 9-15 ans, pour près de 3 enfants sur 10, les mathématiques sont placés en tête des disciplines qu'ils préfèrent, avant l'histoire-géographie et l'éducation physique.

## LES METHODES PEDAGOGIQUES CHANGENT-ELLES ?

Des observations faites dans des classes de CM2 et de 6$^e$, appuyées par ce qu'affirment fréquemment les élèves, on peut sommairement retenir deux points principaux qui marqueraient le passage du CM2 à la 6$^e$, et qui paraissent encore largement d'actualité.

D'une part, le rythme de la séance d'enseignement est plus rapide en 6$^e$. « Ca va plus vite, on a moins de temps pour faire son travail, ... », notent souvent les élèves, ce qui s'explique aisément par ce que nous avons déjà signalé d'un temps plus contraint au collège.

D'autre part, la place et la nature des écrits évoluent sensiblement. Le temps consacré à l'écrit est plus long en 6$^e$ (on passe, en moyenne, sur les séances observées dans les années 80, de 17 mn à 23 mn d'écrit, pour des séances plus courtes). Et surtout, il y a davantage d'écrit définitif (mise au net des connaissances) et formalisé : le vocabulaire devient plus précis et plus complexe (peut-être en relation avec un accroissement du « savoir » par rapport au « faire »). Les élèves confirment cette perception (les trois quarts d'entre eux trouvent les mots employés plus difficiles). On retrouve d'ailleurs cette tendance dans les manuels. Ainsi, dans les deux ouvrages parmi les plus utilisés actuellement : en CM2, on trouve un huitième de page par leçon consacré à « l'aide-mémoire » et, en 6$^e$, deux pages par leçon sont consacrées à « l'essentiel ».

Il nous a paru important de rapporter ces quelques constats avant d'aborder des questions plus mathématiques. Les échanges entre enseignants ne doivent pas en effet rester sur le terrain (trop neutre ?) des contenus. Les conditions institutionnelles et pédagogiques dans lesquelles ceux-ci sont enseignés et travaillés ne peuvent pas être ignorées, pas plus que l'idée des mathématiques et de l'activité mathématique que chaque enseignant véhicule plus ou moins implicitement... et qu'il transmet donc également à ses élèves.

Dans la suite de cet article, nous avons choisi de privilégier quatre thèmes qui paraissent particulièrement « sensibles » pour la transition école-collège :

la résolution de problèmes ;
les fractions et les nombres décimaux ;
la proportionnalité ;
la géométrie.

## LA RESOLUTION DE PROBLEMES

Il est devenu banal d'affirmer que les connaissances mathématiques prennent du sens dans les problèmes qu'elles permettent de résoudre efficacement et qu'un élève possède ces connaissances lorsqu'il est capable de les mobiliser de lui-même (sans y être incité) pour résoudre des problèmes inédits pour lui.

Et pourtant, force est de constater que c'est là, dans cette capacité à mobiliser les connaissances acquises pour résoudre des problèmes, que se trouve le point le plus faible de l'enseignement des mathématiques à l'école. Ainsi, alors que différentes évaluations, sur des populations d'élèves de onze ans, montrent une stabilité des résultats en calcul sur plusieurs décennies, les observations faites à l'occasion de l'évaluation à l'entrée en sixième soulignent la faiblesse des résultats pour ce qui touche à la résolution de problèmes[4].

Les programmes de l'école primaire comme ceux du collège mettent pourtant la résolution de problèmes au cœur des apprentissages mathématiques, à la fois comme moyen pour l'acquisition de connaissances nouvelles (idée de *situation-problème*) et comme lieu de l'activité mathématique (l'idée de *problème ouvert* peut ici être évoquée).

La traduction des programmes en termes de « compétences » pour l'école primaire, de « compétences exigibles » pour le collège, nécessaire au regard de l'évaluation, ne doit pas être interprétée de façon contradictoire avec l'idée d'apprentissage par résolution de problèmes. Il convient en effet de distinguer les activités utilisées dans une démarche de construction des connaissances (ce qui suppose une vision suffisamment large des savoirs) et celles destinées à évaluer des compétences bien identifiées (ce qui conduit donc à isoler des éléments de savoir). Les premières doivent avoir une complexité suffisante pour légitimer l'utilisation de connaissances nouvelles, alors que les secondes auront un caractère beaucoup plus local. L'énoncé des compétences à acquérir n'exprime pas une pédagogie pour l'acquisition des connaissances, et il faut se méfier de l'émiettement du savoir auquel pourrait conduire un travail trop parcellisé, orienté seulement par la maîtrise de chaque compétence exprimée.

L'activité de résolution de *problèmes ouverts*[5] paraît particulièrement propice à développer chez les élèves la prise de conscience de ce qu'est une activité « mathématisante », et, par là même, de leur faire comprendre ce qu'on attend d'eux : chercher, essayer, conjecturer, mettre à l'épreuve, formuler une solution, débattre en commun de sa validité. Les attitudes développées dans ce type de travail devrait rejaillir sur les autres activités mathématiques.

Voici deux exemples d'énoncés qui peuvent être proposés à la fin de l'école primaire comme au début du collège.

1) *Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers, par exemple : 23 = 11 + 5 + 7*

*Trouver, parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum.*
*Et avec d'autres nombres ?*

2) *Chercher tous les patrons du cube.*

[4] C'est ainsi que l'évaluation à l'entrée en 6e effectuée à la rentrée 1996 fait apparaître que seulement 15,5 % maîtrisent des compétences « dites remarquables », celles-ci incluant précisément la capacité à résoudre des problèmes nécessitant l'organisation d'une démarche, la justification d'une réponse, le choix ou le rejet d'une solution donnée à un problème.
[5] Sur ce sujet, voir « Problème ouvert et situation-problème », IREM de Lyon (d'où sont tirés les deux énoncés présentés ici) et, pour l'école primaire, les ouvrages de la série ERMEL « Apprentissages numériques à l'école primaire », éditions Hatier.

**FRACTIONS ET NOMBRES DECIMAUX**

Toutes les évaluations le confirment : les connaissances concernant les nombres décimaux ne sont pas stabilisées à la fin de l'école primaire, comme en témoignent certains résultats de l'évaluation à l'entrée en $6^e$.

- Ainsi (rentrée 96), pour le nombre 403,651 :
le chiffre des dizaines est identifié par 64 % des élèves
ceux des dixièmes et des centièmes sont identifiés par un peu moins d'un élève sur deux.

Certains élèves semblent considérer que la virgule sépare deux nombres entiers, et traitent donc la partie décimale comme un entier (en remplaçant le suffixe « aine » par le suffixe « ième »).

- Le calcul du produit posé 62,34 x 45 (rentrée 96) n'est réussi que par un peu plus d'un tiers des élèves, alors que le calcul de produits ou de quotients d'entiers par 10 ou 100 fait apparaître des résultats très sensibles à la configuration des nombres proposés (ceux-ci pouvant varier d'environ 45 % à 65 % de réussite), ce qui caractérise des compétences en cours d'acquisition, témoignant une nouvelle fois d'une compréhension incomplète des écritures à virgule (repérage et signification de chacun des chiffres).

- On connaît, par ailleurs, les difficultés liées au rangement de décimaux ou encore au calcul de sommes et de différences. Ainsi à l'entrée en $6^e$, en 1995, un élève sur deux seulement donnait une réponse correcte au calcul de 7,24 - 4,3 (près d'un sur dix répondant 3,21). Ces difficultés confirment que les élèves ont souvent une maîtrise incomplète de la numération des décimaux (significations liées à la position des chiffres dans l'écriture à virgule et relations entre les valeurs attribuées à chaque rang dans cette écriture) qui renforce leur perception du décimal comme couple d'entiers.

Le domaine des nombres décimaux est ainsi sans doute l'un de ceux sur lesquels il y a le plus à faire dans le cadre de l'articulation entre CM2 et $6^e$, ce qu'on pourrait traduire par la préoccupation suivante : « Comment envisager l'apprentissage des fractions et des décimaux sur au moins trois ans, du CM1 à la $6^e$ ? »

Ajoutons que c'est aussi un domaine pour lequel interviennent, une nouvelle fois, des changements dans le programme du cycle III, puisque, après l'abandon du quotient de deux décimaux en 1980, le calcul du produit de deux décimaux ne figure plus dans celui de 1995. Le collège, et plus particulièrement la classe de $6^e$, auront donc à gérer cet apprentissage aussi bien au niveau de la technique qu'à celui du sens (ce qui constitue la difficulté principale). La reconnaissance des situations où le produit de deux décimaux est pertinent nécessite en effet un travail important à au moins deux titres : diversité de ces situations d'une part, rupture de sens avec le produit de deux naturels ou d'un décimal par un naturel (puisque l'assimilation de la multiplication à l'addition réitérée n'est alors plus pertinente).

A la suite de plusieurs travaux de recherche, il semble y avoir aujourd'hui un consensus relatif pour présenter les écritures à virgule de nombres décimaux comme une autre désignation de sommes de fractions décimales : *14,503 est une autre désignation de 10 + 4 + 5/10 + 3/1000 ou de 14 + 503/1000*, ce qui permet d'insister sur la signification de chaque chiffre à partir de sa relation avec l'unité... à condition que les élèves donnent du sens aux écritures fractionnaires.

On est amené à gérer sur plusieurs années, de l'école primaire au collège, l'apprentissage (en partie simultané) des fractions et des nombres décimaux.

Concernant les fractions, à l'école primaire on se limite à un travail sur des fractions simples usuelles (demi, tiers, fractions décimales) dans la perspective d'introduire les décimaux. Pour cela, la signification de a/b liée au partage de l'unité est suffisante : dans un contexte de mesure (longueurs, aires, ...), une image de $\frac{3}{4}$ est obtenue en partageant l'unité en 4 et en prenant 3 morceaux ($\frac{3}{4}$ est donc conçu comme « 3 fois $\frac{1}{4}$ »). En 6$^{e}$, cette signification devra être complétée : $\frac{3}{4}$ c'est aussi le quart de 3 (3 partagé en 4) ou la solution de l'équation $4x = 3$. Le « recollement » entre ces différentes significations n'est pas chose facile et doit donc être travaillé explicitement avec les élèves, pour qui a/b doit acquérir un statut de nombre.

A partir de là, une programmation de l'enseignement des décimaux peut être proposée, marquée par des évolutions des significations données aux écritures à virgule et par une extension progressive des compétences. Le tableau suivant résume cette programmation.

| | Significations du décimal | numération | calculs (sens et algorithmes) |
|---|---|---|---|
| CM1 | • autre écriture pour les sommes de fractions décimales<br>• repérage de points sur la demi-droite graduée | • décompositions en 1/10, 1/100, ...<br>• comparaison et intercalation en référence aux significations | • addition<br>• soustraction |
| CM2 | • approche du quotient de deux entiers<br>• lien avec l'expression de résultats de mesurage | • comparaison et intercalation (algorithme)<br>• encadrement à ... près | • produit d'un décimal par un entier<br>• quotient décimal d'un décimal par un entier |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | dans le système métrique (longueurs, masses, capacités) et changements d'unités | | |
| 6$^{e}$ | • reprise des différentes significations<br>• approche du nombre a/b<br>• lien avec l'expression de résultats de mesurage dans le système métrique (aires) et changements d'unités | • reprise des différents aspects<br>• décompositions utilisant 0,1 ; 0,01 , ...<br>• approximation et ordre de grandeur | • produit de deux décimaux<br>• quotient de deux décimaux |

Notons que le fait que le produit de deux décimaux ne soit plus au programme du cycle III n'interdit pas cependant que soient posés aux élèves des problèmes qui seront traités plus tard à l'aide de ce type de calcul. Les élèves peuvent en effet résoudre, au cycle III, par des procédures personnelles, un problème tel que celui qui consiste *à calculer le prix de 3,250 kg de fromage à 84,60 F le kg*. L'utilisation de procédures liées à la proportionnalité (calculs successifs du prix pour 3 kg et pour 250 g) suffit ici pour répondre à la question posée. Par la suite, le recours au produit 84,6 x 3,25 apparaîtra comme une économie pour l'élève (dans la mesure où il permet de traiter tout problème de ce type) et pourra prendre sens en référence aux procédures anciennes qu'il remplace.

### PROPORTIONNALITE

Des premiers traitements de *situations de proportionnalité* à l'école primaire, au travail sur des tableaux de nombres représentant une *relation de proportionnalité* et jusqu'à l'étude de la *fonction linéaire*, le chemin est long (du début du cycle III - et même avant - jusqu'à la fin du collège) qui conduit à une bonne maîtrise de ce domaine important aussi bien à l'intérieur qu'en dehors des mathématiques.

Dans la perspective de l'articulation école-collège, nous voudrions surtout insister ici sur le fait que les évolutions à gérer ne se limitent pas à des savoir-faire particuliers (prendre un pourcentage, exprimer un pourcentage, ...), mais doivent prendre en compte des changements dans les niveaux de conceptualisation, les niveaux de formulation et les types de procédures utilisables. Deux exemples suffiront à illustrer notre propos.

**Le premier exemple** est inspiré de l'évaluation à l'entrée en 6$^{e}$ en septembre 1996. Connaissant le prix de 8 disques (280 F) et de 3 disques (105 F), calculer les prix de 5 disques et de 6 disques, ainsi que le nombre de disques correspondant à 350 F. Les différentes questions sont réussies par 50 % à 60% des élèves.

Le travail sur les fractions comme nombre et comme rapport permet d'envisager à partir de la 6$^{e}$, pour aboutir à une maîtrise complète en 5$^{e}$, une résolution générale de problèmes de ce type (quels que soient les nombres en jeu, par exemple : 7 disques coûtent 44,80 F. Quel est le prix de 16 disques ?). Pour cela, les élèves pourront alors utiliser soit le coefficient de proportionnalité, soit la linéarité (aspect multiplicatif), cette dernière étant souvent considérée comme plus « naturelle » par les élèves.

Au cycle III, des problèmes de ce type peuvent cependant être déjà proposés, mais en cherchant plutôt, par le choix des nombres, à permettre aux élèves d'utiliser un « raisonnement proportionnel ».

Par exemple, au CM1 : 5 disques coûtent 42 F. Quel est le prix de 20 disques ? L'élève peut alors utiliser un raisonnement additif (20 disques, c'est 5 disques et encore 5 disques et encore..., donc 42 F et encore 42 F...) ou multiplicatif (20 disques, c'est quatre fois 5 disques, donc on paie quatre fois 42 F), raisonnements derrière lesquels le mathématicien reconnaîtra les propriétés de linéarité.

Au CM2 : *8 disques coûtent 92 F. Quel est le prix de 12 disques ?* L'élève peut prolonger le raisonnement précédent, en cherchant d'abord le prix de 4 disques (2 fois moins que 8) ou d'un disque (8 fois moins), avant de calculer le prix de 12 disques.

Le recours aux raisonnements basés sur « fois plus » et « fois moins », qui met en œuvre, *en acte*, les propriétés de linéarité (et, dans certains cas, le coefficient de proportionnalité) semble une étape importante dans la maîtrise de la notion de proportionnalité. Ainsi peut-on dire que le rôle de l'école primaire n'est pas d'enseigner la proportionnalité, mais de donner l'occasion aux élèves de « raisonner proportionnellement ». Ces compétences « en acte » développées à l'école primaire pourront ensuite être formalisées et étudiées pour elles-mêmes au collège.

Soulignons, à cet égard, que le recours exclusif et précoce au fameux tableau n'est pas sans danger. D'une part, il peut être associé à l'idée même de proportionnalité et créer ainsi un lien abusif, source d'erreurs. D'autre part, des expériences convergentes conduites en 6$^{e}$ montrent que les élèves ne recourent pas volontiers, d'eux-mêmes, à cet outil et que d'autres formulations, plus « littéraires », sont mieux à même d'accompagner leurs raisonnements.

**Le second exemple** concerne l'enseignement des pourcentages, lieu de difficulté particulière pour les élèves. La tradition, confortée par les manuels scolaires, incite les enseignants de CM2 à enseigner à ce sujet des connaissances qui figurent aux programmes des classes de 6$^{e}$ et de 5$^{e}$ : calculer 24 % d'une quantité en multipliant celle-ci par 0,24 ou par 24/100, traduire sous forme de pourcentage une proportion du type « 650 pour 1400 » en divisant 650 par 1400). Il serait sans doute plus profitable de mettre en place à l'école primaire quelques connaissances et procédures de base qui assureront une meilleure compréhension des algorithmes étudiés au collège, en particulier :

Assurer tout d'abord une première familiarisation avec l'idée de pourcentage : prise de conscience du fait que, dans de nombreux cas, une comparaison directe des nombres ne permet pas de conclure à une question portant sur la comparaison relative de deux populations.

Utiliser les procédures relatives à la proportionnalité, adaptées au contexte numérique particulier à traiter, pour conclure... sans pour autant avoir à mettre en place prématurément des algorithmes généraux.

Le problème peut ainsi être posé de *savoir s'il y a plus de café Arabica dans un mélange de 250 kg qui en contient 45 kg ou dans un mélange de 350 kg qui en contient 60 kg*. La solution générale de ce type de problèmes (quels que soient les nombres en jeu) sera maîtrisée en 5$^{e}$, voire en 4$^{e}$. Mais un travail fructueux peut être conduit en amont, pour dégager quelques idées importantes.

La première idée à mettre en place est qu'une réponse directe n'est pas possible.

La seconde idée est qu'il faudrait pouvoir se ramener à une quantité de référence commune (par exemple ici, 50 kg de mélange) en faisant une hypothèse de proportionnalité. On peut alors conclure : l'utilisation des propriétés de linéarité a suffi pour traiter le problème.

La troisième idée à développer, en examinant ce qui est utilisé dans l'environnement social, est que souvent on prend 100 comme référent commun, d'où les calculs possibles dans le cas cité ci-dessus :

| | | | |
|---|---|---|---|
| quantité de mélange 1 | 250 | 50 | 100 |
| quantité d'Arabica | 45 | 9 | 18 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| quantité de mélange 2 | 350 | 700 | 100 |
| quantité d'Arabica | 60 | 120 | 17,14 |

Ainsi, des problèmes divers, dont la résolution met en œuvre la notion de pourcentage, peuvent-ils être proposés à l'école et au collège :

- à l'école, avec des valeurs numériques adaptées, ils seront résolus à l'aide de *procédures personnelles* qui supposent seulement l'utilisation des raisonnements habituellement mobilisés par les élèves pour traiter les situations de proportionnalité ;
- au collège, avec des valeurs numériques quelconques, ils conduisent à la mise en place des *procédures standard*, à caractère général.

## GEOMETRIE

L'impression première, à la lecture des programmes, est qu'il y a peu de nouveauté en 6$^{e}$ par rapport à ce qui est travaillé à l'école primaire. La plupart des objets géométriques étudiés ont déjà été rencontrés par les élèves.

Il faut cependant se déprendre de ce qui pourrait bien n'être qu'une illusion. En effet, un changement de point de vue doit s'opérer. Pour être bref, on peut schématiquement décrire trois temps dans l'appréhension des objets géométriques par les élèves :

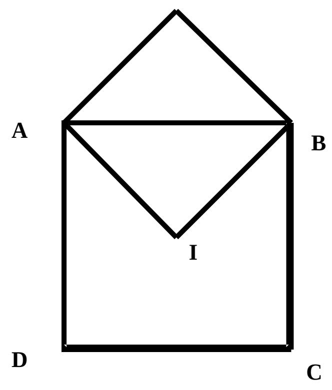
- le temps de la géométrie « perceptive » : un objet est carré, parce que, *globalement*, je le reconnais comme tel (début de l'école primaire) ;

- le temps de la géométrie « instrumentée » : un objet est carré parce que, à l'aide d'*instruments* adaptés (compas, équerre, règle), je peux en vérifier certaines *propriétés* (fin de l'école primaire) ;
- le temps de la géométrie « mathématisée » : un objet est carré parce que, en fonction d'*informations* initiales *données* ou d'informations *déduites*, je peux en énoncer certaines *propriétés* (collège).

Ainsi, pour la figure ci-contre, après avoir tracé le carré ABCD, repéré son centre I et le symétrique J de celui-ci par rapport à (AB) :

l'élève de CM2 utilisera par exemple l'équerre et le compas pour vérifier que AIBJ, ayant 4 angles droits et 4 côtés de même longueur, est un carré ;

alors que l'élève de $6^e$ ou de $5^e$ pourra, à partir de la propriété des diagonales d'un carré, prouver que AI=BI et que l'angle AIB est droit, puis en utilisant la symétrie que AIBJ est un carré (par exemple, comme losange ayant un angle droit)




L'articulation école-collège est au cœur du passage entre le second et le troisième temps, qui pourrait être aussi caractérisé, par le passage du *dessin* à la *figure*. C'est sans doute ce changement de point de vue, donc ce changement de contrat vis-à-vis notamment des moyens de preuve, qui devrait sous-tendre une bonne part des activités proposées aux élèves. La note de service évoquée au début de cet article apporte quelques éclairages sur ce point.

## CONCLUSION

De l'école au collège, l'univers de travail des élèves subit des modifications importantes... que les enseignants de telle ou telle discipline ne peuvent pas ignorer. En mathématiques, l'impression est souvent formulée qu'il n'y a rien de nouveau en $6^e$. Nous avons tenté de montrer, sur quelques exemples, que cette impression est erronée... et que si, pour de nombreuses notions, l'apprentissage en est commencé dès l'école primaire, il doit être poursuivi au collège dans une optique d'approfondissement, de structuration, voire d'évolution plus fondamentale de la manière de considérer certains concepts.

Il ne servirait à rien de demander un découpage « plus simple » qui désignerait les notions qui relèvent de l'école primaire et celles qui ne doivent être abordées qu'au collège (et pas déflorées plus tôt). Les concepts se construisent dans la durée, dans une durée longue qui a peu à voir avec les frontières institutionnelles. Mieux vaut donc réfléchir à cette gestion des apprentissages sur le long terme (parfois très long) et considérer plutôt, pour chaque concept, les modifications à prendre en charge dans les niveaux de conceptualisation, les types de procédures, les éléments de formulation (désignations, langage), les moyens de preuve reconnus comme licites.

Tout un programme pour un travail en commun des enseignants de primaire et de collège.

*Roland Charnay est l'auteur de « Pourquoi des mathématiques à l'école ? » aux éditions ESF et, avec Michel Mante, d'un ouvrage (en 2 tomes) destiné à la préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles (éditions Hatier). Il fait également partie de l'équipe ERMEL (ouvrages pour les maîtres des différents niveaux de l'école primaire, éditions Hatier).*