

QUAND DEUX DROITES SONT « A PEU PRES » PARALLELES OU LE VERSANT GEOMETRIQUE DU « PRESQUE » EGAL

Catherine HOUEMENT et Alain KUZNIAK
IUFM de Haute Normandie et IUFM d'Alsace
DIDIREM Paris 7

Résumé: Nous étudions les rapports entre les paradigmes géométriques et le statut et la nature des nombres utilisés dans les problèmes de géométrie au collège. Sur un exemple, nous montrons que de nombreuses ambiguïtés viennent obscurcir l'apparente clarté des énoncés géométriques les plus classiques. Nous insistons sur l'intérêt que présente l'explicitation, au moins pour l'enseignant, de l'espace de travail géométrique utilisé pour gérer certaines contradictions inhérentes à l'enseignement de la géométrie au collège.

Introduction

L'école propose à l'élève l'étude et la découverte de plusieurs « mondes mathématiques », en particulier un monde numérique et un monde géométrique. Les objets premiers du monde numérique, les nombres entiers naturels, correspondent déjà à une abstraction (celle de la quantité visible) et ils sont désignés par des symboles particuliers (les nombres écrits en chiffres). Ces représentations ont été construites et organisées en un système symbolique qui permet d'écrire n'importe quelle quantité entière. Ces représentations sont détachées de la réalité dans la mesure où rien de perceptif ne rappelle le souvenir¹ de la quantité exprimée dans une expression comme 23.

Le monde géométrique ne se dégage pas aussi facilement du réel, dans la mesure où les premières représentations restent longtemps elles-mêmes des objets spatiaux. Le monde de la géométrie plane s'appuie sur des représentations (photo, dessin) sous lesquelles il faut retrouver l'objet d'abord réel auquel il se réfère, puis l'objet stylisé qui est lui même le support matériel de l'objet géométrique de référence.

Certains pédagogues, comme Van Hiele, ont basé leur approche de l'enseignement de la géométrie sur différents niveaux d'appréhension des figures. Le premier niveau

¹ Notons qu'il a existé à la Renaissance des exemples de « dessins mnémotechniques » pour aider à retenir la quantité que les chiffres symbolisent (par exemple un dessin du chiffre n dessiné avec n angles ou n tirets). Cité par Ifrah page 512 (*Histoire Universelle des Chiffres*. Paris : Seghers 1981)

concerne une approche globale, puis suivent des niveaux plus analytiques et un accès possible à des niveaux plus formels. Dans cette optique, le dessin reste donc essentiel dans une problématique d'enseignement.

Mais le dessin, objet physique, est construit dans un espace mesuré par le « monde numérique ». Cette approche numérique des objets de la géométrie vient interférer avec les règles propres au « monde géométrique » et va en compliquer la gestion au niveau du Collège.

L'activité géométrique se donne ainsi à voir et à faire dans un environnement complexe que nous nommerons « espace de travail de la géométrie »² et dont nous préciserons par la suite certaines composantes utiles pour aborder les problèmes d'approximation.

Pour développer une mise en cohérence des différents rapports que la géométrie élémentaire (géométrie euclidienne de R^3) entretient avec la réalité, nous avons ainsi introduit trois paradigmes : la Géométrie I (géométrie naturelle), la Géométrie II (géométrie axiomatique naturelle), la Géométrie III (géométrie axiomatique formaliste).

Plutôt que de pratiques géométriques, nous avons préféré parlé de « paradigmes géométriques » dans la mesure où ces trois paradigmes présentent une cohérence interne au moins au niveau des modes de connaissances : nous ne reviendrons pas sur la synthèse entre *intuition* (au sens de insight), *expérience* (aussi bien matérielle que mentale, sur des objets réels ou virtuels) et *déduction* (au sens de mode de production justifié de nouvelles connaissances indépendamment d'intuitions ou de nouvelles expériences), nous renvoyons le lecteur à nos précédents articles. Cette cohérence ne signifie pas que ces trois paradigmes se suffisent à eux mêmes pour traiter des questions sur le réel : on comprend aisément que certaines questions de Géométrie I, qu'on pourrait naïvement dans un premier temps limiter à une géométrie pratique, ne trouvent une solution (théorique) que grâce à la Géométrie II, solution dont il faut alors tester le caractère opérationnel dans la réalité.

La question étudiée dans cet article est la suivante : comment s'insère le « monde numérique » dans ces différentes géométries ? Ou encore, comment s'articulent calcul numérique, mesure et paradigmes géométriques ? Une première réponse à cette question, en termes d'espace de travail, nous permettra de préciser certains problèmes d'enseignement et d'envisager des pistes de solutions. Elle précisera pour le lecteur les notions que nous venons d'introduire brièvement.

I. Un exemple classique.

Considérons le texte suivant, extrait d'un article de *petit x* (Jacquier 1995). Il s'agit des deux premières questions d'un exercice de Brevet des collèges donné dans l'académie de Nice en 1991.

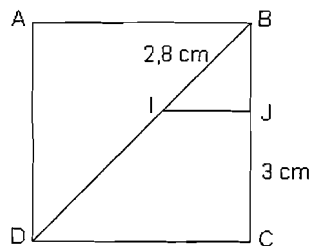
² Kuzniak 2001

Construire un carré ABCD de côté 5 cm.

1) Calculer BD.

2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm
puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.

La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite
(DC) ?



La difficulté de cet exercice réside dans une confrontation directe entre l'évidence intuitive fournie par le dessin (les droites sont parallèles) et les conclusions contraires (les droites ne sont pas parallèles) tirées de calculs utilisant à la fois des mesures et des nombres. Nous allons préciser cette contradiction en envisageant d'abord les réponses susceptibles d'être données par les élèves.

Le problème demande d'abord un dessin effectif (la construction du carré). L'élève est plongé dans le monde des constructions : il reporte des longueurs, il utilise des instruments. La forme du dessin lui renvoie perceptivement un écho de réussite (ou d'échec) sur la réalisation du carré. La première question, calculer BD, incite à un détachement du réel : le carré est là, bien visible, et pourtant il ne s'agit pas de mesurer sa diagonale, mais de la « calculer ». L'œil et la main, la règle et l'équerre qui ont assuré la réussite de la construction (des 5 cm et de l'angle droit) ne sont plus sollicités, ainsi en décide le texte.

L'élève peut être ainsi conduit implicitement à modifier son espace de travail : les instruments classiques n'y sont plus pertinents.

I.1. Calculer BD

La demande de calcul déplace le problème dans le cadre numérique. Cette évolution ne peut se faire sans un jeu de cadre fondé sur le théorème de Pythagore : la mise en relation d'un angle droit avec des nombres. Si l'élève n'a pas les moyens de se détacher de la figure (par exemple pour lui, le théorème de Pythagore n'est pas disponible) : il mesure sur la figure et donne une réponse (ou ne répond rien). Mais, pour les autres, quel résultat annoncer et conserver pour la suite : la valeur $\sqrt{50}$ (ou $5\sqrt{2}$) ou une valeur décimale, plus contrôlable par la règle graduée sur le dessin ? Dans le langage du professeur, doivent-ils garder une valeur exacte ou une valeur approchée ? Dans notre approche, quel ensemble de nombres insérer dans l'espace de travail ?

Une analyse en terme de contrat laisse supposer que seuls les élèves maîtrisant le contrat lié au terme calcul annoncent et conservent la valeur exacte, les autres peuvent une fois montré leur connaissance du théorème de Pythagore, préférer utiliser la valeur approchée plus adaptée au monde des constructions.

I.2. Les droites sont-elles parallèles ?

La demande de construction proposée par la question 2) replonge tous les élèves dans le monde du dessin et ouvre un nouveau « champ numérique » : celui des nombres avec un chiffre après la virgule. Cette précision numérique peut être interprétée de deux façons : comme mesure exacte ou comme mesure approchée dans la mesure où le choix de la mesure de BI (décimale avec un chiffre après la virgule) pourrait faire croire qu'on fixe le type d'approximation tolérée pour les mesures de longueur.

Cela peut être compris comme une incitation à travailler dans le champ des décimaux avec un chiffre après la virgule, le seul domaine pertinent dans le domaine des constructions sur la feuille de papier. Cette hypothèse s'appuie sur un effet pointé par Birebent (2001), y compris pour les professeurs eux-mêmes : la confusion entre l'utilisation d'une valeur entière pour une mesure et la croyance à sa nature exacte (versus l'utilisation d'une valeur non entière et la croyance immédiate à son caractère approché).

La question elle-même « La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ? » ne bénéficie pas de la mise en garde du type de celle de « Calcule » de la première question. Aucun élément ne précise à l'élève le type d'analyse souhaitable pour répondre : analyse du dessin ou analyse des propriétés géométriques exprimées textuellement .

I.3. Une grande variété de réponses

Des réponses appuyées directement ou non sur le dessin sont possibles: « (IJ) est parallèle à (DC) ; je le constate sur le dessin » ; une autre façon d'engager le dessin dans la réponse, tout en faisant part au professeur d'une de ses connaissances géométriques, consiste à dire que sur le dessin l'angle BJI est droit, comme l'angle BCD, ce qui permet de déduire le parallélisme.

Les autres réponses vont utiliser le cadre numérique. Supposons que ce cadre numérique repose sur le théorème de Thalès très prégnant à ce niveau de la scolarité. L'élève étudie par exemple les deux rapports $\frac{BI}{BD}$ et $\frac{BJ}{BC}$; il est donc amené à comparer par exemple $\sqrt{2}$ et 1,4. On pourra dégager deux types d'approches

- *une approche numérique pure* : dans ce cas l'élève accepte de se détacher complètement de la figure, il estime avoir intégralement traduit le problème dans le cadre numérique ; il conclura alors en fonction de la réponse fournie à la question 1) et de la gestion qu'il fait des approximations numériques ;
- *une approche numérique non aveugle* : l'élève peut répondre que les droites sont parallèles tout en étant persuadé que $\sqrt{2}$ n'est pas décimal car il gère mal la contradiction entre le dessin géométrique minutieusement exécuté et le résultat numérique.

Notons que la non-décimalité (a fortiori l'irrationalité) de $\sqrt{2}$ n'est pas nécessairement mise en jeu par les élèves dans l'exercice. Il est possible de répondre en repérant seulement le décalage entre la valeur décimale annoncée et celle susceptible de rendre compte de $\sqrt{2}$. Il existe une solution qui occulte complètement toute

interrogation sur les racines carrées et utilise la contraposée du théorème de Pythagore : si les droites (IJ) et (CD) sont parallèles, alors le triangle BIJ est isocèle (angle B de 45°) et rectangle en J ; et donc $BI^2 = 2,8^2 = 2^2 + 2^2$; ce qui est contradictoire. Cette solution privilégie l'interrogation sur l'orthogonalité des droites plutôt que le parallélisme.

II. Point de vue d'élèves et de futurs Professeurs des Ecoles.

II.1. L'exercice dans une classe de troisième

Ce problème a été posé dans une classe de troisième³ (22 élèves) une semaine après l'introduction de l'existence de $\sqrt{2}$ comme mesure d'une longueur dont on ne peut connaître que des valeurs décimales approchées. Après trente minutes de résolution individuelle, pour la question 2), la moitié de la classe concluait que les droites étaient parallèles, l'autre que non. Un questionnement du professeur sur la différence de réponses a fait rebondir la recherche du côté numérique : « *parce que les nombres ne sont pas justes* » ; « *c'est pas des nombres qui tombent bien* », « *c'est des valeurs approchées* », « *mais il faut des valeurs exactes pour être sûr* ». Un deuxième temps de recherche leur a permis de revenir avec un crayon de couleur sur leurs premières réponses.

Après ce deuxième temps, 12 élèves annoncent le non parallélisme, 8 ne concluent pas et 2 hésitent.....

Si tous annoncent d'abord $\sqrt{50}$ à la question 1, un grand nombre d'entre eux (19) juxtaposent à cette réponse exacte une valeur approchée.

Pour la question 2, la plupart des élèves comparent les rapports $\frac{BI}{BD}$ et $\frac{BJ}{BC}$
soit $\frac{2,8}{BD}$ et 0,4. Tous utilisent leur calculatrice.

II.2. Une analyse des résultats

Pour la question 1), tous les élèves fournissent la réponse $\sqrt{50}$. Ils se sont donc délibérément situés en dehors de la réalité du dessin propice à un mesurage, réalisant un changement de cadre en se plaçant dans un cadre numérique qui théorise la géométrie. Ainsi, pour nous, ils identifient une demande de réponse en Géométrie II, qui exige une déduction théorique à partir de mesures fournies : ils se situent dans la Géométrie II. Cependant, ils ont, pour dix-neuf d'entre eux, associé une valeur annoncée approchée par le symbole \approx : quel statut accordent ils à ce symbole, quel statut donnent-ils à la valeur décimale fournie pour BD ?

Pour la question 2), la plupart des élèves réalisent de nouveau un changement de cadre : ils transforment l'étude du parallélisme en l'étude d'un rapport numérique inhérent au théorème de Thalès.

³ Merci à Hélène Colonna, professeur de mathématiques au collège de Fleury sur Andelle, pour sa collaboration.

Seul, un élève, Dany est resté dans un cadre géométrique : « *Oui les droites (IJ) et (DC) sont parallèles parce que si on prolongé le segment [IJ] il serait perpendiculaire au segment [AD] et que quand 2 droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parrallèles entre elles* »⁴. Pour nous, Dany se situe délibérément dans une Géométrie I, validée par la perception, l'expérience au besoin instrumentée (par la règle graduée, l'équerre, etc.). Cette géométrie ne se réduit pas à des constats ; elle s'enrichit de déductions, mais elle est toujours finalement confortée par le recours au sensible, ici le dessin support. On notera cependant que Dany ne se contente pas de constater expérimentalement que les droites sont parallèles, il injecte des connaissances géométriques (deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles).

Les autres élèves semblent au moins dans un premier temps se détacher nettement de la figure ; ils concluent sur une relation entre les deux droites sans du tout s'appuyer sur la figure ; ils choisissent « naturellement » un espace de travail adapté au paradigme géométrique qui, d'une certaine façon, « exclut » la figure. Là sans doute intervient aussi un effet de contrat, que le professeur de la classe nous confirme en effet après la séance en déclarant « *il est pratiquement acquis qu'à ce stade de l'année en troisième, la figure n'est pas une preuve* ». La conclusion des élèves est déduite de l'utilisation d'un théorème, valide dans un système d'axiomes et de règles de production de propriétés (le raisonnement hypothético déductif). Les élèves se situent dans ce que nous appelons la Géométrie II.

Toujours est-il que des élèves restent perplexes sur la conclusion à donner concernant le non parallélisme et ceci même après le deuxième temps de recherche où le nombre d'absences de conclusion reste grand. Ainsi, Elsa reprend le rapport $\frac{2,8}{\sqrt{50}}$ et annonce $\approx 0,39595 \approx 0,4$: elle conclut d'abord à l'égalité des rapports, puis au parallélisme ; dans le deuxième temps, elle barre la valeur 0,4, l'égalité des rapports et écrit : « *Je ne sais pas si elles sont parallèles car si on arrondie $\frac{BI}{BD}$, c'est égale à $\frac{BJ}{BC}$, mais comme la valeur exacte justifie si deux droites sont parallèles, alors je ne peux pas dire si elles sont parallèles* »⁵

Elle exprime bien là toute sa perplexité devant la fluctuation de la réponse.

L'élève Cathy, qui utilise $BD \approx 7,1$ cm, calcule $\frac{2,8}{7,1}$ et trouve $\frac{2,8}{7,1} \approx 0,394$ pour le rapport $\frac{BI}{BD}$, elle barre alors le 1 du 7,1 et trouve 0,4 ; elle conclut au *parallélisme*. L'approximation numérique semble ici guidée par la vision de la figure.

François calcule $\frac{2,8}{7}$ et annonce $\frac{2,8}{7} \approx 0,4$ pour le rapport $\frac{BI}{BD}$: il conclut au *parallélisme* (comme deux de ses camarades). Après l'intervention du professeur, il écrit : « *Les droites (IJ) et (DC) sont parrallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne sont pas // si on prend la valeur exacte* ».

⁴ l'orthographe est celle d'origine

⁵ idem

Les libres expressions des élèves posent bien le problème : existe-il une « géométrie de l'arrondi » et une « autre de l'exactitude » ? et comment permettre à l'élève de s'y retrouver ?

II.3. L'exercice en formation de professeurs des écoles

Le même exercice a été proposé à des étudiants professeurs des écoles de première année avant toute révision de géométrie. Ils pouvaient utiliser une calculatrice. L'objectif était de savoir ce qui restait de l'enseignement et du travail systématique au collège sur ce genre d'exercices une fois les effets de contrat sinon disparus du moins éloignés.

Nous n'envisageons ici que les résultats d'un groupe de vingt-neuf étudiants qui ont pu aussi s'exprimer sur les incertitudes ou les difficultés qu'ils avaient rencontrées dans l'exercice.

Pour la première question, comme les élèves de troisième, les étudiants associent pour onze d'entre eux une valeur approchée à $\sqrt{50}$, et dix se limitent à l'expression exacte. Il est à noter que huit ne donnent aucune réponse calculée et n'entrent ainsi pas dans le contrat de la Géométrie II.

De ce fait, il y a une plus grande diversité des productions des étudiants à la question 2 :

Cinq d'entre eux ne s'engagent pas sur la réponse ou concluent en Géométrie I en supputant pour certains une demande d'exhibition d'un théorème ; par exemple Valentine déclare « *je sais que pour la question 2, je suis censée utiliser le théorème de Thalès mais je ne m'en rappelle plus donc je ne risque pas de répondre* » ; ou encore Valérie qui utilise règle et équerre pour répondre « 7 cm » et « *les droites (IJ) et (DC) sont parallèles car (IJ) forme un angle droit avec (JC)* », mais avec le commentaire « *je ne me souviens plus de quelle façon répondre à la question 1. Je sais que Pythagore entre probablement dans la résolution mais comment ?!* ».

Sept étudiants utilisent le théorème de Pythagore pour tenter de résoudre la question 2, soit seul, soit combiné avec Thalès. Ce fait ne s'est pas produit avec les collégiens qui ont tous utilisé Thalès.

Pour la question 2, sur l'ensemble du groupe, douze ont conclu au parallélisme, neuf au non parallélisme, six n'ont donné aucune conclusion et deux n'ont pas traité la question.

Chez sept étudiants apparaît de manière explicite le problème de la gestion de l'approximation qui est au cœur de ce problème.

Delphine « *Mes incertitudes [sur le parallélisme] proviennent du fait qu'il faut arrondir $\sqrt{2}$* », ou Véronique « *Quand on utilise un théorème et que l'on ne dispose que de distances de construction et des composées de racines carrées, a-t-on le droit d'arrondir les nombres pour pouvoir conclure ?* ».

Pour Aurélie « *le rapport est à peu près le même, on peut dire que les droites sont parallèles* » mais pour Sylvain la conclusion est différente « *Les résultats sont très proches mais pas égaux donc les droites ne sont pas parallèles* » qui ajoute dans les commentaires « *Il faut être précis dans les résultats* ».

A la fin de cette étude, nous pouvons insister sur les questions suivantes. Quels nombres sont licites dans la géométrie ? La conclusion d'une question sur la relation entre deux droites dépendrait-elle de la précision de la mesure d'un segment ? Comment concilier ce que nous renvoie le dessin (un parallélisme) et le résultat attendu théoriquement ? Existe-il une vraie géométrie pour le « presque » parallèles ?

Cette polysémie du dessin et les pratiques géométriques variables qu'elle génère doivent être davantage mises en relation et organisées dans l'enseignement. De même la gestion de l'approximation géométrique et de son pendant numérique est une question qui clairement perturbe les élèves : elle semble réglée de manière implicite par des effets de contrats, mais ces effets ne résolvent pas le fond le problème. La gestion de l'approximation reste à envisager aussi en formation des maîtres, ne serait ce que pour clarifier la vision des futurs enseignants.

III. Gérer la contradiction

III.1. Notre approche

L'étude de l'exercice précédent souligne toute l'ambiguïté de la géométrie du collège, elle montre aussi la grande sensibilité des élèves au problème de l'approximation et leur maturité par rapport à celui-ci : cela transparaît dans leurs remarques. Ainsi, s'impose la nécessité d'une clarification explicite pour laquelle nos cadres géométriques et l'interprétation en termes d'espace de travail nous semblent bien adaptés.

Notre approche tente d'une part de redonner une place explicite au dessin, d'autre part de donner une cohérence aux différentes pratiques géométriques juxtaposées au long de la scolarité des élèves de l'école au collège. Elle propose d'intégrer un versant numérique pour faciliter la gestion de l'approximation des mesures.

Dans la Géométrie I, les élèves peuvent se fier à leurs sens, éclairés par l'utilisation des instruments qui garantissent le parallélisme ou l'existence de l'angle droit. La référence au concret que représente le dessin valide les propositions. Le cadre numérique n'intervient que lié au mesurage : les mesures sont données ou le plus souvent prélevées grâce aux instruments. En ce sens les mesures ne sont qu'approchées, avec une approximation qui n'est pas précisée en général sauf si on définit un intervalle de confiance (notamment dans le cas des techniques de bâtiment). La Géométrie I n'est pas vide de connaissances ; mais peu importe la façon dont elles sont fondées, dans la mesure où elles assurent la fidélité à la réalité. Les diverses techniques pratiques des corps de métiers trouvent leur place dans cette géométrie (voir par exemple la corde à treize nœuds des jardiniers, les gabarits des archéologues pour retrouver le diamètre d'une assiette cassée...).

Dans la Géométrie II, la référence au dessin n'est plus aussi prégnante, la figure est interprétée en référence à la démonstration et peut faire basculer dans un cadre numérique par le choix des théorèmes utilisés, par exemple ici Thalès. Le jeu de cadres n'avait pas de fonctionnalité en Géométrie I, il en trouve une dans ce paradigme. Pour l'élève, la Géométrie I entre de manière dialectique dans la Géométrie II comme une

composante de l'espace de travail, en ce sens qu'elle fournit un lieu où interfèrent images et connaissances théoriques.

Cependant, la Géométrie II, quand elle les met en jeu, ne tolère que des mesures exactes. Celles-ci seront donc soit données par l'énoncé, soit déduites via un raisonnement hypothético-déductif et conservées sous leur forme exacte. Sous un autre aspect, on peut aussi affirmer que cette Géométrie est sans mesure puisqu'elle répertorie, dans une axiomatique de base, les seuls savoirs qui pourront être utilisés indépendamment de tout recours à un nouveau retour à la réalité de l'espace mesuré. Son véritable espace de travail est donc différent de celui de la Géométrie I puisqu'il est en particulier invariant par similitude et que les objets qui le composent *sont déterminés par leur définition*.

Mais comme la Géométrie II réalise une modélisation de la réalité, cela implique le statut particulier et instable du dessin pour les vérifications : en ce sens la Géométrie II n'est pas aveugle, contrairement à ce que des effets de contrat simplifié déclenchent chez les élèves. La coupure avec les sens sera assumée par la Géométrie III avec les risques pédagogiques que l'on connaît. Dans cette Géométrie, les dessins apparaissent clairement comme des outils heuristiques mais, pour parvenir à ce niveau d'abstraction, le passage maîtrisée par une géométrie intermédiaire (la Géométrie II) est certainement pédagogiquement nécessaire.

Mais revenons à un élève qui, faute d'une explicitation des paradigmes géométriques, n'a pas la conscience d'une géométrie approchée par deux paradigmes distincts, il reste dans la géométrie la plus proche de la pratique, la plus naturelle, la Géométrie I. Mais dans cette géométrie, les mesures doivent bénéficier d'un intervalle de confiance. Autrement dit dans cette géométrie, les droites peuvent être ou non parallèles, cela dépendra de la précision

Pour que les élèves assument cette perturbation (pourtant nécessaire) de l'approximation, le paradigme de la Géométrie II est incontournable : ce nouveau paradigme permet une explicitation de certains degrés d'approximation géométrique. Il ouvre la perspective d'une autre géométrie, qui ne détruirait pas les bénéfices de la perception, de l'intuition ou de l'expérience, et dont les mesures ne seraient accessibles par aucune approximation classique. Ce nouveau type d'approximation doit s'articuler à un nouvel ensemble de nombres qui permet la notion de mesure idéale : les nombres réels et notamment les non-décimaux dont il restera à prouver qu'ils ne se limitent pas aux seuls rationnels.

La justification théorique de cette approche qui construit Géométrie et Nombre est contenue dans la construction même de la Géométrie III dans l'optique d'Hilbert où le corps des nombres réels résulte de la construction géométrique. Elle apparaît aussi mais dans un autre sens, dans les constructions de la Géométrie III où le corps des réels préexiste et donne ses propriétés à l'espace géométrique.

A côté de ces approches théoriques, la Géométrie II par son statut intermédiaire de schématisation du réel permet à l'élève de donner un sens et une place naturelle à l'approximation et en particulier à ces nombres non décimaux.

III.2. Retour sur l'exercice

Une des difficultés de l'exercice étudié est qu'il propose deux tentations de détour face à la tâche attendue :

- un détour par le dessin qui consiste à lire sur le dessin (une « approximation géométrique »),
- une approximation numérique non explicitée qui consiste à prendre une valeur décimale pour un irrationnel.

Ces détours correspondent en réalité à des choix d'espaces de travail inadaptés aux paradigmes géométriques dans lesquels le contrat implicite classique place les questions.

La production demandée du dessin *carré*, image réelle représentant l'objet géométrique *carré*, définit implicitement un premier espace qui est l'espace graphique de la feuille de papier. Mais cet espace n'est qu'un espace de travail imparfait pour la Géométrie II, il ne peut fournir les résultats demandés de façon intrinsèque. En ce sens le dessin de départ n'est qu'une approximation de la figure géométrique, sans que le degré d'approximation soit maîtrisable.

La question 1) rend implicitement à cet espace graphique son statut d'espace de travail incomplet qui ne permet pas la validation : il s'agit de calculer la longueur BD.

La question 2) amène à compléter la figure : ce qui est matériellement possible dans l'espace de travail de la Géométrie I. Il se trouve que la mesure exacte de BI peut ici être exactement construite dans cet espace de travail (domaine des mesures de la règle : décimaux avec un chiffre après la virgule), ce qui peut alors amener l'élève à une confusion entre espaces de travail de la Géométrie I et de la Géométrie II ou de confusion entre les statuts de l'approximation : ici la mesure 2,8 est exacte alors qu'obtenue par un mesurage, elle ne serait qu'approchée.

A notre avis, cette confusion ne peut être levée que par la prise de conscience, par l'élève, de l'existence de deux champs paradigmatiques de la géométrie : le premier fournit dans un premier temps son espace de travail à l'autre, mais la différence doit être explicitée. Ce n'est qu'à cette condition, nous semble-t-il, que les différents statuts de l'approximation peuvent prendre leur sens aussi bien dans le champ numérique que dans celui géométrique : il existerait ainsi un espace de travail propre à la Géométrie I intégrant les nombres décimaux pour le « presque parallèles », ce qui réconcilierait Elsa et François avec eux-mêmes. Rappelons en effet leurs propos :

Elsa « *Je ne sais pas si elles sont parallèles car si on arrondit $\frac{BI}{BD}$, c'est égale à $\frac{BJ}{BC}$, mais comme la valeur exacte justifie si deux droites sont parallèles, alors je ne peux pas dire si elles sont parallèles* »

François « *Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne le sont pas si on prend la valeur exacte* ».

Cette question n'est d'ailleurs pas qu'une interrogation banale d'élèves. Elle a fondé des théories de l'approximation géométrique au début du XXe siècle et fait aujourd'hui l'objet de recherches intenses en informatique. Nous renvoyons à notre article paru dans l'Ouvert n°105 sur les approximations géométriques dans lequel nous rappelons notamment une mesure simple du degré d'approximation des constructions

géométriques : Lemoine (1902) propose en effet un espace de travail sans mesure pour prendre en charge une approximation géométrique, sans collusion avec l'approximation numérique. En nous inspirant de l'analyse de la « pensée approximative » faite par Guilbaud⁶ (1985), nous parlerons de gestions différentes de l'approximation géométrique.

III.3. La question de logiciels dynamiques

Nous aborderons ce point sous forme d'une interrogation. La conception de certains logiciels géométriques a dynamisé l'approche de la géométrie, en donnant l'impression qu'ils proposaient un bon espace de travail pour accéder à une géométrie plus théorique.

« Disposer d'un monde dont les lois ne seraient plus dictées par la nature mais par les mathématiques elles mêmes est aujourd'hui un rêve qui peut devenir réalité. Les technologies informatiques permettent d'inscrire dans la matière la liaison entre un modèle formel et un modèle phénoménal accessible aux sens et à l'expérience.

On a donné le nom de *micromondes* à ces environnements. »

(Balacheff 1999 qui cite ensuite plus loin les micromondes LOGO et CABRI).

Mais il nous apparaît que ces logiciels restent dans la Géométrie I et nécessitent, pour une interprétation fonctionnelle, la connaissance de l'existence de ces deux paradigmes. Examinons en effet les exemples suivants.

Grâce à la gestion des approximations numériques par la partie calculatrice du logiciel CABRI, le théorème de Thalès peut être mis en défaut. On peut construire des triangles ABC tels que ce logiciel affirme le parallélisme de (EF) et (BC), E étant sur [AB] et F sur [AC], alors que les rapports de Thalès ne sont pas égaux (cf. exemple 1 de l'annexe). De même, CABRI affirme le parallélisme de (EF) et (BC) quand E et F sont respectivement définis comme milieux de [AB] et [AC] ; mais, quand E est défini comme milieu de [AB], si on déplace F manuellement sur [AC], on peut ne trouver aucune position de F pour laquelle CABRI réponde oui à la question : « (EF) et (BC) sont-elles parallèles ? » (cf. exemple 2 de l'annexe) .

Au même titre que les techniques papier crayon, mais avec beaucoup plus de commandes automatisées, LOGO comme CABRI sont des espaces de travail de la Géométrie I, et les mathématiques ne régissent pas complètement ces mondes. Ces espaces sont utiles au développement de l'heuristique en Géométrie II, ils permettent d'y fonder l'expérience, mais ils ne livrent encore que des approximations d'« objets géométriques » théoriques.

Seule différence peut-être avec le papier crayon, l'approximation est ici plus contrôlable, il doit être possible de configurer le logiciel pour définir un niveau d'approximation qui éloigne les risques de confusion.

⁶ On donne: 1) une valeur approchée
d'encadrements

2) un encadrement

3) une suite indéfinie

Il nous semble que les logiciels dynamiques permettent d'atteindre le niveau 2 de la pensée approximative géométrique, celui de l'encadrement, alors que les instruments usuels dans leur utilisation classique se limitent au niveau 1, celui de la valeur approchée⁷. La maîtrise totale de l'approximation supposée par le niveau 3 semble difficile à atteindre, et peut-être inutile, dans un contexte de Géométrie I.

Conclusion

L'enseignement de la géométrie fait apparaître de l'école au lycée des malentendus didactiques entre élèves et professeurs notamment du côté du rapport au réel du géométrique. Nous avons proposé dans nos précédents articles d'envisager la géométrie élémentaire sous forme de trois paradigmes donnant une cohérence aux différentes formes de réponses fournies par l'histoire ou les différents acteurs du système éducatif. Nous avons montré en quoi la définition de ces trois paradigmes prenait en partie en charge la question de la gestion de l'approximation liée aux mesures géométriques et conduisait même à la définition d'une approximation géométrique tolérable dans au moins les deux premiers paradigmes. Cette définition nous semble particulièrement nécessaire pour entrer dans le monde des nombres réels en utilisant des situations géométriques.

Mais la connaissance de cette explicitation de la géométrie en différents cadres géométriques n'est pas suffisante : nous avons montré dans cet article en quoi le choix d'un espace de travail adapté au cadre géométrique était nécessaire à une expertise géométrique qui intègre la compréhension du « presque ».

Bibliographie

BALACHEFF N. (1999) Apprendre la preuve. In Sallantin J., Szezeciniarz J.J. (eds) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. 197-236. Paris : PUF

BIREBENT A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français*. Grenoble : thèse de l'université J.Fourier.

GUILBAUD G.Th. (1985) *Leçons d'à peu près*. Paris : C.Bourgois.

HOUEMENT C. et KUZNIAK A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques. *petit x* n°51. 5-21. IREM de Grenoble.

HOUEMENT C. et KUZNIAK A. (2000) Formation des Maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 20/1. 89-116. La Pensée Sauvage.

⁷ Il existe des analyses plus sophistiquées de l'utilisation du crayon et des instruments usuels. Voir notre article dans l'Ouvert..

HOUEMENT C. et KUZNIAK A. (2002) Approximations géométriques. *L'Ouvert* n°105. 19-28. IREM de Strasbourg.

KUZNIAK A. (2001) Espace(s) de travail de la géométrie. *Actes du colloque premier cycle*. IREM de Montpellier.

JACQUIER I. (1995) Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *petit x* n°41. IREM de Grenoble.

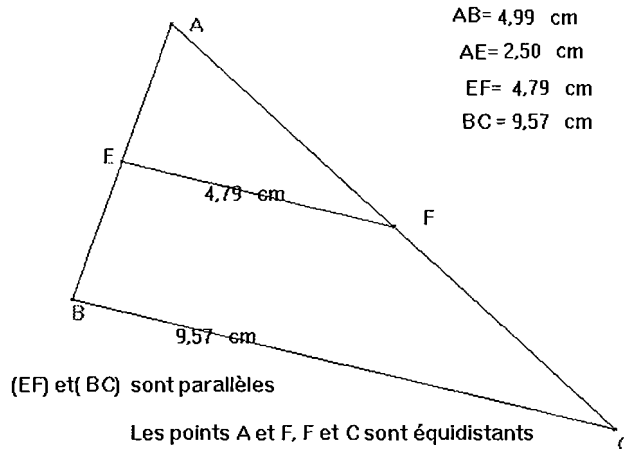
LEMOINE E.M.H (1902) *Géométoprographie ou Art des Constructions géométriques*. Scientia.

REYNES F. (2000) La notion de mesure exacte : de l'impossibilité physique à la nécessité mathématique, les conditions d'une rupture inévitable. *petit x* n°53. 69-79. IREM de Grenoble.

VAN HIELE P.M. (1959) La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP* n°198. 199-205.

ANNEXES

Exemple 1



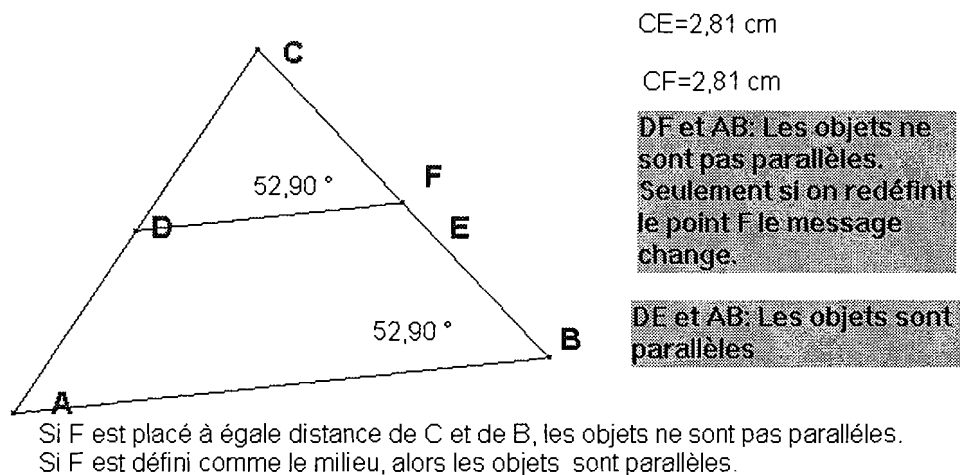
Les objets sont construits dans cet ordre :

les points A, puis B, puis C, ensuite les segments AB, AC, BC
 le point E sur le segment AB, le point F sur AC, et le segment EF
 écriture de la longueur des segments AE, AB, EF et BC
 la question sur le parallélisme de (EF) et (BC)

Principe. Si l'approximation des longueurs est donnée au centième, on fait varier B de façon à ce que 100 AB soit impair. Ensuite on fait varier C pour que 100 BC soit aussi impair. On déplace E et F jusqu'à ce que CABRI affirme le parallélisme des droites (EF) et (BC). Puis on contrôle l'équidistance de A,F et de F,C. Il y a une contradiction par rapport au théorème de Thalès

Exemple 2

D est le milieu du segment AC, E est le milieu du segment CB, F est libre sur BC



En fait, il est possible d'obtenir de nombreux exemples de ce type, car comme nous l'a confirmé un membre de l'équipe des concepteurs, CABRI répond en traitant le dessin et non à partir d'un raisonnement sur les propriétés..