APPROCHE DIDACTIQUE DE LA QUANTIFICATION DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT TUNISIEN

Faïza CHELLOUGUI
Faculté des Sciences de Bizerte,
ISEFC de Tunis, LIRDHIST de Lyon 1

Résumé : Cet article a pour objectif d'étudier d'un point de vue didactique la place et le rôle des éléments de logique dans l'enseignement tunisien, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs universels et existentiels. Notre étude porte sur les types de formulations utilisées pour des expressions nécessitant une écriture quantifiée au lycée et dans la première année d'université en filière scientifique et se propose de repérer les exigences en matière de formalisme dans les raisonnements mathématiques et les difficultés afférentes rencontrées par beaucoup d'étudiants.

Mots clés : Didactique, quantificateur universel, quantificateur existentiel, raisonnement mathématique, formulation.

Introduction

Nous nous intéressons ici à la place et au rôle des éléments de logique dans l'enseignement tunisien en particulier en ce qui concerne les quantificateurs universels et existentiels. Nous présentons certains résultats issus de notre mémoire de DEA[1] intitulé : "Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique".

Nous nous proposons d'apporter des éléments de réponses à la question suivante : la quantification introduite à l'université en tant qu'un outil pour faciliter la compréhension et la manipulation des énoncés mathématiques risque-t-elle d'installer des ambiguïtés de formulations chez certains étudiants voire d'être une source d'erreurs ?

Nous émettons les hypothèses suivantes :

[1] Mémoire de DEA en didactique des mathématiques conduit sous la co-direction de V.Durand-Guerrier (Maître de Conférences à l'IUFM de Lyon) et M.Abdeljaouad (Professeur à l'ISEFC université de Tunis) soutenu en novembre 2001.

1) L'absence de l'apprentissage explicite de la quantification, dans l'enseignement secondaire tunisien induit des difficultés pour les apprenants dans leur raisonnement mathématique.
2) Un mauvais usage des quantificateurs ne permet pas une clarté conceptuelle dans la compréhension des énoncés mathématiques.

Notre article se compose de trois parties. Dans la première, nous présentons quelques éléments épistémologiques et théoriques de la quantification. La deuxième partie aborde une étude didactique de la quantification en s'appuyant sur une analyse succincte des programmes et des manuels tunisiens centrée sur les expressions utilisant les quantificateurs. Nous étayerons cette analyse de contenu par une observation de classe sachant que celle-ci révèle un aspect crucial du contrat didactique. La troisième partie est consacrée à l'expérimentation ; elle porte sur des copies d'examen d'étudiants scientifiques de première année que nous analysons en suivant des niveaux de catégorisation ; ceux-ci ont été élaborés en s'appuyant sur les différents types de formulations des énoncés dégagés à partir de l'étude des manuels et de l'observation de classe.

I. Quelques éléments épistémologiques et théoriques de la quantification en relation avec notre propos :

I.1. Introduction

Les systèmes logiques élaborés par les philosophes et logiciens d'Aristote[1] à Quine[2] (en passant par Frege (1848-1925) et Russell (1872-1970)) ainsi que le calcul des prédicats concernent explicitement les raisonnements mathématiques ; pourtant nous montrerons dans la deuxième partie du document, que ces notions ne sont plus un objet d'étude dans les programmes officiels de notre enseignement des mathématiques. Ainsi, dans les manuels scolaires de mathématiques nous rencontrons des formulations utilisant ce que les logiciens appellent calcul propositionnel, quantificateurs, langage quantificationnel, ceci sans prendre en compte explicitement les phénomènes de quantification intervenant dans les expressions.

I.2. Quantification et calcul des prédicats

Nous considérons une fonction propositionnelle F(x), celle-ci est constituée par deux variables : une variable d'objet (x) et une variable de prédicat (F) (F marque la place d'un prédicat quelconque et x celle d'un nom d'objet qui satisfera ou non le prédicat sur la variable x). Une manière d'opérer la transformation de F(x) en une proposition vraie ou fausse est la quantification. La quantification est mise au point pour la première fois techniquement et formellement par Frege (1879). Elle offre deux possibilités :

---

[1] Les œuvres logiques d'Aristote, qui remontent au IV^{e} siècle avant J.C, ont été regroupées dans un traité appelé l'Organon, ce qui signifie en grec "instrument", et met en évidence le fait que la logique d'Aristote a été conçue comme un outil au service de différents domaines.

[2] Williard.V.O.Quine est un philosophe et un logicien américain contemporain né en 1908.

➢ indiquer qu'il est possible de substituer à la variable d'objet tous les éléments de l'univers associés à la fonction. La quantification universelle correspond à un produit (conjonction)[3] qui aurait pour membres les propositions attribuant la propriété énoncée dans le prédicat successivement à tous les objets de l'univers considéré.

➢ indiquer qu'il est possible de substituer à la variable d'objet un au moins des éléments du domaine considéré. Le quantificateur existentiel résume une somme (disjonction)[4].

Dans le cas où cet univers, noté Ω, est fini et déterminé, nous aurons :

$$\text{pour } \Omega = \{x_1, x_2, .., x_n\}$$
$$(\forall x)\ Fx \Leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge .... \wedge Fx_n.$$
$$(\exists x)\ Fx \Leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee .... \vee Fx_n.$$

I.3. Syntaxe et sémantique de la quantification classique

a- La théorie de la quantification :

La théorie de la quantification est restée le système de référence dans les traitements ultérieurs du problème de fondement des mathématiques. Elle doit sa place centrale à la structure conceptuelle qu'elle introduit. Nous précisons qu'en 1880 Frege qui a placé la philosophie du langage et de la logique en position de philosophie première, insiste sur le fait que la découverte du concept moderne de la quantification a été l'instrument essentiel de cette philosophie. A travers l'étude de la théorie de la quantification, un ensemble de notions philosophiques est abordé telle que celles de référence, d'existence, d'identité, de prédication.

b- Langage quantificationnel :

Examinons maintenant l'appareil déductif du langage quantificationnel. Nous avons choisi de présenter le système de règles de déduction naturelles dû à Copi (1954) dont l'intérêt est de proposer des démonstrations formelles proches de celles utilisées en mathématiques. Copi s'inspirant de la théorie de la déduction naturelle du calcul des propositions due à Gentzen (1934), introduit quatre règles d'élimination et d'introduction pour les quantificateurs et de manipulation des expressions quantifiées en les formulant d'abord de façon simple et limitée aux fonctions propositionnelles à une variable libre ($\forall$-élimination, $\forall$-introduction, $\exists$-élimination et $\exists$-introduction). Nous indiquons ici à titre d'exemple la règle suivante, empruntée à la présentation du système de Copi par Hottois (1989) :

" $\forall$-élimination : c'est la règle d'*instantiation universelle* (UI).

$$\frac{(\forall x)\ fx}{fa}$$ (a : constante individuelle quelconque substituée à x)" (p.100)

---

[3] Le mot conjonction est symbolisé par les connecteurs propositionnels : '$\wedge$', '&', '.', 'et '.

[4] Le mot disjonction est symbolisé par les connecteurs propositionnels : 'V', 'ou '.

Cette règle qui peut s'interpréter par : "Ce qui vaut pour tous, vaut pour chacun", permet la démonstration formelle de la validité d'un certain type de syllogismes. Exemple : "Tous les hommes sont mortels ; Socrate est un homme ; Socrate est mortel".

(1) $(\forall x)\,(Hx \supset$[5] $Mx)$	Prémisse 1
(2) Hs	Prémisse 2
(3) $Hs \supset Ms$	UI sur (1)
(4) Ms	Modus Ponens[6] sur (3) et (2)

c- Permutation de l'ordre des quantificateurs universel et existentiel :

A la suite de Quine (1950) nous insistons sur l'importance d'un traitement sémantique des questions liées à la permutation de l'ordre des quantificateurs universel et existentiel. L'interprétation de définitions comportant une double quantification, la négation de celle-ci, la conversion d'un énoncé d'une langue naturelle en une langue formelle, comme la conversion inverse, peuvent être source d'incompréhension ou d'erreurs pour les apprenants dans l'enseignement des mathématiques. En effet, ces erreurs peuvent être suivies par des défauts et des difficultés d'interprétation de vocabulaires logico-mathématiques et des lacunes d'ordre opératoire[7]. L'utilisation par exemple des parenthèses dans le langage courant a une fonction secondaire, alors qu'elle a une fonction essentielle de groupement dans une formule logique. Cela apparaît dans l'exemple suivant : caractérisation de l'égalité des réels :

Si la différence de deux réels est inférieure strictement à tout réel strictement positif, alors ces deux nombres sont égaux. Cette expression correspond, dans la langue formelle, à :

$$\forall x \forall y\,(\forall \varepsilon > 0\ \ d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow x = y)$$

qui est vraie sur $\mathbb{R}$ contrairement à l'expression suivante :

$$\forall x \forall y\ \forall \varepsilon > 0\ (d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow x = y).$$

De même, la permutation des symboles pour un même prédicat utilisant les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ peut changer la valeur de vérité de la proposition sur laquelle elle est effectuée, et elle en change automatiquement le sens. Comme le montre l'exemple suivant sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$:

$\exists y\ \forall x\ \ (x \leq y)$: il y a un entier qui est plus grand que tous les autres entiers.

---

[5] "$\supset$" est un connecteur propositionnel, se lit "Implication". Il est aussi remplacé par : "implique", "si....alors...", "seulement si", "$\rightarrow$", "$\Rightarrow$".

[6] C'est la règle du Modus Ponens, dite aussi : règle du détachement ou règle de séparation. Elle traduit le fait que : "Si le premier, alors le second ; or le premier, donc le second" est un énoncé valide. Ce qui se traduit en langage propositionnel par : $[(p \supset q).p] \supset q$ est une tautologie (vraie pour toute interprétation de ses lettres).

[7] En accord avec les travaux de Gilbert Arsac et Viviane Durand-Guerrier, voir en particulier Arsac et Durand-Guerrier, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, pp.55-83, 2000.

$\forall x \ \exists y \ (x \leq y)$: tout entier a un entier qui est plus grand que lui.

II. Etude didactique de la quantification

Dans ce qui suit nous allons présenter une étude didactique de la quantification en nous basant sur une analyse succincte des programmes et des manuels tunisiens centrée sur les expressions utilisant les quantificateurs.

II.1. La quantification : une notion paramathématique.

Nous émettons l'hypothèse que la quantification est une notion paramathématique au sens de Chevallard (1985). En effet, elle ne fait pas l'objet d'un enseignement : c'est un objet de savoir auxiliaire, nécessaire à l'apprentissage des objets mathématiques proprement dits. C'est une notion-outil de l'activité mathématique.
Dans notre recherche, afin de mieux saisir cette notion paramathématique dans le champ de la didactique, nous attachons une importance particulière au concept de contrat didactique, aussi bien à travers le curriculum tunisien qui nous a servi de support pouvant expliquer certaines exigences des enseignants dans l'utilisation des quantificateurs qu'à partir d'une observation de classe qui nous a permis d'accéder à un mode de traitement des productions des apprenants lors d'un examen, en dehors de tout contexte expérimental.

II.2. L'utilisation des quantificateurs à travers les programmes officiels tunisiens

L'analyse des programmes permet d'accéder à l'aspect officiel de l'usage des quantificateurs. Nous faisons une étude succincte des quatre réformes qu'a connu l'enseignement secondaire tunisien des mathématiques : en 1958, 1969, 1978 et 1991.

L'enseignement des mathématiques selon la réforme de 1958 s'appuyait sur le contenu de manuels français où le vocabulaire logique était introduit : implication, équivalence logique, signification des quantificateurs "il existe" et "quel que soit".

La réforme de 1969 met l'accent sur la forme de la démonstration et plus de rigueur en matière de raisonnement, de quantification, de logique. Dans les programmes de la 5ème année secondaire[8], une importance particulière était accordée à la logique ; celle-ci constituait un objet d'étude en soi et devait être entendue comme une élaboration par l'élève lui-même d'un langage formel à partir de ses propres connaissances. Il était recommandé que l'élève note les règles d'emploi des quantificateurs, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements.

Aucun changement concernant l'enseignement de la logique n'apparaît dans la réforme de 1978. En revanche, en 1988, les programmes de cette dernière année ont introduits des modifications ; les quantificateurs sont utilisés avec prudence et sans qu'une référence explicite ne leur soit faite. De plus, la tendance à formaliser l'écriture mathématique est moins nette.

L'étude de la logique formelle disparaît avec la réforme de 1991. Les symboles utilisant les deux quantificateurs ($\forall$ et $\exists$) ne doivent pas être utilisés comme des symboles d'abréviation, ils sont remplacés par les expressions écrites correspondantes.

---

[8] Correspond au niveau Seconde dans l'enseignement français.

II.3. Etude de quelques chapitres des manuels tunisiens de $6^{ème}$ et $7^{ème}$ année secondaire [9].section : Mathématiques[10].

Les niveaux de scolarité utilisés présentent un intérêt pour notre recherche, puisque nous voulons étudier la place des quantificateurs à travers les connaissances antérieures des étudiants et la façon dont ils ont été abordés à la fin de l'enseignement secondaire. Notre objectif est d'essayer d'éclairer certains types de réponses aux exercices choisis pour notre partie expérimentale, en matière de formalisme.

Pour cette étude, nous avons choisi des chapitres comportant les notions de suites numériques et ceux concernant la continuité et les limites d'une fonction. Dans l'enseignement supérieur, certaines de ces notions sont réintroduites de la même manière qu'au secondaire et enrichies par d'autres notions, comme les suites numériques, les suites extraites, les suites de Cauchy, etc.
Ainsi, nous rencontrons des notions pouvant apparaître comme des généralisations simples d'autres notions déjà introduites dans l'enseignement secondaire et ne nécessitant en particulier aucun formalisme nouveau pour leur introduction comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires.

Le manuel tunisien adopte pour tous les chapitres les rubriques suivantes : "activités", "informations mathématiques" (définitions, théorèmes, corollaires, commentaires, remarques, etc.), "exercices résolus", "exercices de fin de chapitre non résolus", "retenons" et "remarques".

Nous nous intéressons aux types de formulations utilisés dans les manuels, en particulier sous la rubrique "informations mathématiques" et dans celle contenant des "exercices corrigés" (exercices résolus, activités résolues).

a- Catégorisation des formulations

Pour analyser les types de formulations utilisés dans différentes rubriques, nous avons mis en place une catégorie comportant 4 caractéristiques différentes de formulations.

1) Formulation portant une quantification explicite ; il s'agit d'une formulation utilisant explicitement les deux quantificateurs existentiel et universel.

2) Formulation portant un élément générique du type " soit un réel x....., si une fonction..." .

3) Formulation portant une quantification universelle implicite. Par exemple, une réponse dans un exercice résolu est ainsi formulée : "La fonction $f : x \to \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est croissante, alors si $x \leq 3$ on a : $f(x) \leq f(3)$..."

4) Formulation portant un conditionnel implicitement quantifié, où l'antécédent est implicitement quantifié alors que le conséquent est explicitement quantifié. Par exemple, la définition de limite finie d'une suite réelle est formulée ainsi : "Soit n_0 un entier naturel et U une suite réelle définie sur $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ et l un

---

[9] Ces niveaux correspondent respectivement aux 1[er] S et terminal S dans l'enseignement français.

[10] Le contenu des chapitres choisis est le même pour les sections : Sciences-Expérimentales et Techniques, des niveaux scolaires cités.

réel. On dit que la suite U admet pour limite l si, pour tout ε strictement positif, il existe un entier naturel p tel que :

$$(n \in I \text{ et } n > p) \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon."$$

Nous constatons qu'il n'y a aucune marque permettant d'énoncer que l'entier naturel "n" est pris universellement.

b- Etude du manuel de 6ème année secondaire :

Nous proposons les résultats de l'analyse[11] de quelques chapitres du manuel[12] de la 6ème année secondaire.

Ces résultats sont synthétisés dans un tableau appelé : Tableau 6ème, où nous avons groupé par ligne et pour tous les chapitres choisis les "définitions", les "théorèmes" (théorèmes et corollaires), les "commentaires", les "exercices corrigés" (exercices corrigés, activités résolues, démonstration de théorèmes), les "remarques" et les rubriques intitulées "retenons". Suivant les colonnes nous avons résumé la formulation mathématique utilisée dans chacune des rubriques selon sa caractéristique en associant le nombre correspondant.

La figure 6ème représente les histogrammes du pourcentage du nombre associé à chaque type de formulation par rapport au nombre total.

Tableau 6ème :

Récapitulatif du type de formulation mathématique de quelques rubriques dans les chapitres choisis du manuel.

Rubriques	Présence de quantificateurs explicites	Présence d'un élément générique	Présence d'un quantificateur universel implicite	Conditionnel implicitement quantifié
Définition	9	0	3	0
Théorème	11	6	0	1
Commentaire	11	0	4	4
Exercice corrigé	14	2	4	8
Remarque	6	2	5	0
Retenons	3	3	2	2
Total (t_i)	54	13	18	15
Pourcentage[13]	54%	13%	18%	15%

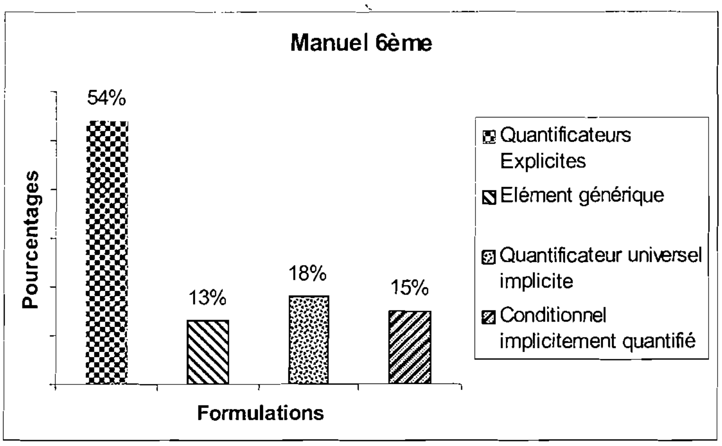
Histogramme 6ème :

[11] Pour une analyse détaillée de quelques chapitres du manuel de la 7ème année secondaire voir Chellougui (2000).

[12] Notre synthèse est portée sur les chapitres suivants : (1)Les suites réelles, (2)Limite d'une fonction, (3)Continuité d'une fonction, (4)Sens de variation. Extrêma.

[13] Le pourcentage, pour chaque type de formulation mathématique, est donné par : $(\frac{t_i}{\sum t_i} \times 100)$, avec $\sum t_i = 100$

Histogramme illustrant les résultats en pourcentage du nombre de formulations par rapport au nombre total.



c- Analyse des résultats

L'analyse de quelques rubriques des chapitres 1, 2, 4 et 7 du manuel de la $6^{ème}$ année secondaire et des chapitres 2, 3, 4 et 5 du manuel de la $7^{ème}$ année secondaire montre que la majorité d'entre eux est formulée avec des quantificateurs explicites (54% pour la $6^{ème}$ et 45% pour la $7^{ème}$), ceci plaide en faveur de la sensibilité des contenus du manuel à une bonne explicitation des quantificateurs. Le reste des formulations des rubriques se répartit, suivant les trois autres types, avec des pourcentages équivalents. Ainsi, dans le cas où les formulations seraient énoncées avec un conditionnel implicitement quantifié, un apprenant peut trouver de la difficulté. Par exemple, si les variables d'un antécédent d'une implication ne sont pas prises universellement (pour tout, quel que soit...) une simple justification avec quelques cas particuliers peut ramener l'apprenant au conséquent correspondant à cette implication. Bien que ce type d'énoncé soit apparu avec un pourcentage faible (15% pour la $6^{ème}$ et 21,5% pour la $7^{ème}$) dans les manuels, ceci nous incite à penser qu'il est possible que cette tâche soit utilisée par certains apprenants.

d- Conclusion

L'analyse succincte des programmes a permis de mettre l'accent, d'une part, sur la place attribuée à la logique formelle, dans l'enseignement tunisien, et d'autre part, sur l'emploi des éléments de logique dans le raisonnement mathématique. L'étude de quelques chapitres des manuels tunisiens de $6^{ème}$ et $7^{ème}$ année secondaire, centrée sur l'utilisation dans l'enseignement des quantificateurs, a permis de déterminer que plus de la moitié des formulations sont explicitement quantifiées. Cela traduit un effort remarquable des auteurs des manuels. Pour le reste des rubriques qui présentent des formulations portant un élément générique, une quantification universelle implicite ou un conditionnel implicitement quantifié, semblent claires pour les auteurs des manuels et peut être pour les enseignants, mais elles peuvent être sources de certaines difficultés dans la compréhension des connaissances mathématiques pour les apprenants.
Cette étude nous a permis d'évaluer le maniement des quantificateurs et d'apprécier la valeur et la place de ces outils dans les manuels de l'enseignement secondaire. Ceci nous a aussi permis d'anticiper les difficultés potentielles pour l'apprenant.

II.4. Observation de classe

a- Introduction

Nous proposons dans ce qui suit, d'une part, de montrer les exigences des enseignants du supérieur, sur les démonstrations et les réponses aux questions y compris en matière de formalisme, d'autre part, d'interpréter les besoins d'outils de logique, en tenant compte de l'utilisation des quantificateurs dans les formulations rencontrées.

b- Méthodologie

Nous avons effectué deux séances d'observations de classe à la Faculté des Sciences de Bizerte (FSB). Nous avons choisi pour cela deux cours en amphithéâtre présentés par deux enseignants différents de mathématiques et nous avons observé les expressions écrites et orales de ces enseignants.

Les recherches bibliographiques ont montré que : le rôle de l'écrit est fondamental dans le travail de l'enseignant : en effet le passage à l'écriture, avec le formalisme nécessaire, engendre à la fois une précision, une visibilité et une exigence de rigueur sur la production écrite. Concernant l'oral celui-ci doit permettre aux élèves une compréhension et une utilisation d'un langage approprié en mathématiques.

c- Grille d'observation

Nous avons élaboré une grille d'observation comportant en colonnes, six types différents de formulations mathématiques :

1) et 2) Expression écrite (respectivement orale) portant une quantification explicite.
3) et 4) Expression écrite (respectivement orale) portant une quantification implicite.
5) Expression écrite portant l'usage des symboles $\forall$ et $\exists$: Ceux-ci peuvent avoir un rôle bien précis et attribuent un sens rigoureux à l'expression ou bien ils peuvent être utilisés comme des abréviations commodes des expressions "quel que soit" ou "il existe".
6) Expression écrite ne présentant aucune quantification.

Cette catégorisation recouvre une partie de celle mise en place dans l'étude des manuels et dans notre partie expérimentale ; elle a été enrichie pour analyser les données recueillies lors de l'observation de classe.

d- Résultats obtenus

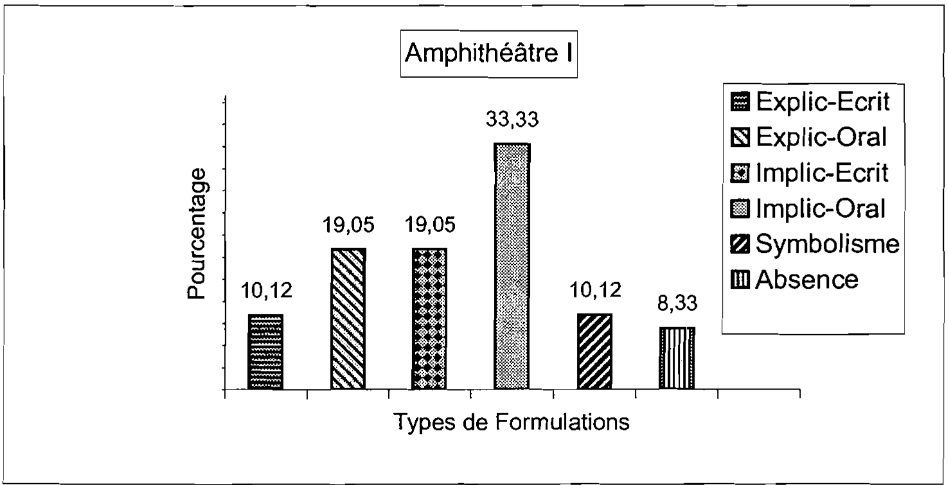
Dans cet article, nous ne présentons que les résultats relatifs à la séance d'observation de l'amphithéâtre I suivant le tableau I. Celui-ci, présente avec détail et pour chacune des rubriques, le type d'expressions employées et leur nombre (sous une même rubrique peuvent paraître différents types de formulations). L'histogrammes I illustre les résultats obtenus.

Tableau I

Types de formulations	Explicite Ecrit	Explicite Oral	Implicite Ecrit	Implicite Oral	Symbolisme	Absence
Définitions (3)	2	7	4	4	6	3
Théorèmes (5)	7	10	8	16	1	2
Preuves (2)	3	5	8	13	4	3
Exemples (5)	5	10	12	23	6	6
Total (t_i)	17	32	32	56	17	14
Pourcentage[14]	10,12%	19,05%	19,05%	33,33%	10,12%	8,33%

Histogramme I

Histogramme illustrant les résultats en pourcentage du nombre de formulations pour chaque type par rapport au nombre total, pour l'amphithéâtre I.



e- Analyse des résultats :

Nous présentons dans ce qui suit les résultats globaux relatifs aux deux amphithéâtres. Ces résultats montrent que, aussi bien dans l'amphithéâtre I que II, un nombre important de formulations utilisées sont des expressions orales implicitement quantifiées (56/168, soit 33,5%, pour l'amphithéâtre I et 60/162, soit 37%, pour l'amphithéâtre II). Ceci représente environ un tiers du total des expressions utilisées durant une séance de cours. Or, c'est dans une telle situation pédagogique, que les étudiants apprennent à acquérir et maîtriser les usages du langage.

Sur l'ensemble des expressions employées par les enseignants dans chaque amphithéâtre, le nombre de cell es où figure l'usage des symboles est 17/168 pour l'amphithéâtre I, soit 10%, et 8/162 pour l'amphithéâtre II, soit 5%. Nous remarquons que les symboles, interprétant les quantificateurs universels et existentiels, apparaissent plutôt comme des abréviations.

Ceci est ainsi exprimé dans les exemples suivants :

---

[14] Le pourcentage, pour chaque type de formulation mathématique, est donné par : $(\frac{t_i}{\sum t_i} \times 100)$, avec $\sum t_i = 168$

1) "…. dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnels $\Leftrightarrow \exists\alpha$ / $\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$ …."
2) "….$\exists$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_p, \lambda_{p+1}$ non tous nuls tels que…."
3) "…. si en plus : $\forall$ i $\dim E_i = p_i \in \mathbb{N}^*$; alors …."

Le symbole $\forall$ est fréquemment utilisé sans que le domaine de référence soit indiqué : la lettre "i" (dans l'exemple 3) a un statut incertain.

Par ailleurs, l'usage symbolique des quantificateurs est remplacé par des sous-entendus implicites qui, s'ils sont clairs pour un mathématicien, peuvent-être à l'origine de confusions pour certains apprenants.

Pour les formulations exprimées par une absence totale des quantificateurs, les résultats obtenus sont : 14/168 pour l'amphithéâtre I, soit 8,5%, et 7/162 pour l'amphithéâtre II, soit 4,5%. Nous donnons quelques exemples :

1. "Exercice : Deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas proportionnels.

   Réponse : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; α ? β ? $\alpha\vec{u} + \beta\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

   Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnels $\Leftrightarrow \exists\ \alpha\ /\ \vec{u} = \alpha\,\vec{v}$; $1.\vec{u} - \alpha\,\vec{v} = 0$ …"
2. "Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ une famille libre, alors :

   $y \notin < x_1, x_2, \ldots, x_p > \Leftrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_p, y\}$ libre.

   Rappel : $< x_1, x_2, \ldots, x_p >$ = ensemble engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$…."
3. "$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$est liée $\Leftrightarrow$ l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres."

Pour le deuxième exemple, l'expression formelle contient la lettre "y" sans statut, les étudiants ont bien du mal à préciser quel univers de référence cette lettre décrit.

Il peut aussi y avoir de nouvelles expressions déjà rencontrées au fur et à mesure de l'introduction de nouvelles variables, pas toujours signalées par l'enseignant. Autrement dit, l'enseignant s'attend à ce que l'étudiant accroisse ses connaissances, en associant un quantificateur adéquat à la nouvelle variable.

Concernant les formulations écrites explicitement quantifiées, les résultats obtenus sont : 17/168, soit 10%, pour l'amphithéâtre I et 19/162, soit 12%, pour l'amphithéâtre II. L'emploi explicite, par écrit, des quantificateurs si souvent évoqué par les enseignants peut être lié à ce que dans les manuels et les ouvrages mathématiques les définitions voire les théorèmes sont présents avec une expression explicitement quantifiée. Nous avons remarqué à travers notre étude des manuels sur quelques chapitres, que les théorèmes et les définitions sont ainsi formulés.

f- Conclusion :

L'étude de cette observation de classes a permis de mettre en évidence deux caractéristiques. Premièrement, les formulations orales sont dominantes. Deuxièmement, pour les autres types d'expressions (usage des symboles $\forall$ et $\exists$, implicite-écrit, explicite-écrit, absence), il y a une variété dans les formulations. D'une manière générale, l'usage des quantificateurs n'est pas vraiment conforme aux règles de la syntaxe logique. Concernant l'oral, ceci n'est pas surprenant a priori, compte tenu des différences de fonctionnement entre l'écrit et l'oral. Concernant l'écrit, nous retrouvons avec les conséquences didactiques prévisibles les phénomènes rencontrés dans les manuels du secondaire.

III. Expérimentation

III.1. Introduction

Dans cette partie, nous nous sommes intéressées principalement au fait de savoir si les étudiants utilisent les quantificateurs et comment ils les manipulent. Nous avons choisi pour notre expérimentation d'analyser des copies d'examen d'étudiants de première année de MPCI (Mathématiques. Physique. Chimie. Informatique) de la Faculté des Sciences de Bizerte module "Mathématiques I", en nous basant sur les formulations produites par ces étudiants afin de voir quelle place est accordée aux quantificateurs universel et existentiel. Nous avons choisi deux exercices nécessitant a priori la mise en œuvre d'une écriture quantifiée.
Le choix des copies n'est pas fait au hasard ; nous posons des critères que nous jugeons suffisamment importants pour notre propos, tels que: au moins un des exercices choisis soit abordé avec des formulations et une rédaction.

III.2. Les exercices choisis :

A partir du sujet d'examen, de MPCI de la Faculté des Sciences de Bizerte module "Mathématiques I", qui s'est déroulé à la fin du premier semestre de l'année universitaire 1999/2000, nous avons choisi deux exercices comportant une tâche qui nécessite a priori une utilisation des quantificateurs, dans le but de voir comment les étudiants mobilisent les symboles logiques et comment ils les utilisent. En examinant les variables de la situation, nous avons décidé de choisir deux exercices dont le premier a été proposé comme exercice n°1 (exercice d'analyse) dans l'examen et le second comme exercice n°4 (exercice d'algèbre). Le cadre est fixé par les énoncés et tout ce qui sera fait dans les réponses aux questions doit être compatible avec les énoncés, traduit de la manière appropriée. Pour les énoncés de chaque question, il est bon de les repérer avec précision et de bien définir et déclarer les variables : toutes les variables utilisées doivent être répertoriées, classées et reconnues comme appartenant à l'un des types définis. Par exemple, nous ne pouvons écrire "f(x)" sans avoir au préalable défini f comme fonction (type de fonction) et x comme variable d'objet (univers de référence).

Nous présentons, ci-dessous, les deux exercices retenus, tels qu'ils ont été posés aux étudiants.

1er Exercice :

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ *et* $\forall n \in I\!N,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+e^{u_n}}$

Soit f *la fonction numérique définie par* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$

1) *Montrer que :* $\forall n \in I\!N,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$.
2) *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* α *et que* $\alpha \in [\,0, \dfrac{1}{2}\,]$.

3) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\ |u_n - \alpha|$.

4) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$ *, puis la convergence de la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2ème Exercice :

Soit $*$ *la loi de composition interne définie dans* $\mathbb{R}$ *par :* $x * y = x + y - xy$

1) Vérifier que $*$ *est commutative, associative.*
2) Montrer que $*$ *possède un élément neutre.*
3) Chercher les éléments de $\mathbb{R}$ *, admettant un symétrique pour la loi* $*$.
4) Résoudre l'équation (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ *) :* $x * x = 1$.

III.3. Analyse des exercices

Pour chacun des deux exercices, nous présentons une analyse des trois premières questions, suivie des réponses attendues des étudiants relatives à la question 3.

a-1 Analyse de l'exercice n°1 :

L'objectif de cet exercice est de montrer la convergence d'une suite numérique définie par récurrence ; cette notion a été préparée au lycée, où elle n'est cependant pas abordée de manière formelle. Nous rappelons que les suites numériques sont enseignées dès les dernières années de l'enseignement secondaire ; elles font ensuite l'objet d'exposés détaillés au cours des deux premières années de l'enseignement supérieur. De nombreux travaux[15] ont montré que cette notion est source de difficultés récurrentes et résistantes en début du cursus universitaire. Sa présence à l'université a pour but de réorganiser des connaissances antérieures dispersées.

Cet exercice fait intervenir quatre objets mathématiques distincts; une suite "$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$", une fonction numérique "f ", une équation "f(x) = x" et un nombre réel "α" limite éventuelle de la suite. La quantification universelle est présentée explicitement seulement lors de l'écriture de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La formulation des questions est fermée (nous remarquons que la réponse à chaque question posée est donnée) et est du type "Montrer que....." avec souvent une question intermédiaire.
Dans cet exercice apparaissent des problèmes généraux tels que les problèmes d'unicité et surtout d'existence, faisant jouer une fonction et une suite, il s'agit alors de reconnaître le problème et de le résoudre. L'utilisation des quantificateurs permet un raisonnement méthodique, clarifié et adéquat.

La troisième question est assez délicate, elle présente une source de difficultés pour l'étudiant. En outre, la réponse présentera une pluralité de variables ainsi qu'un ordre des quantificateurs dans une même expression (pour permettre de répondre à la question ; "qui dépend de quoi"), pouvant amener à des confusions et induire en erreurs. En effet, il s'agit d'une question fermée, liée aux questions précédentes. Une méthode

[15] Aline Robert, R.D.M, Vol. 18, n°2, 1998.

est indiquée, pour la résolution, qui nécessite une connaissance explicite du théorème des accroissements finis, une autre méthode est possible, celle de la démonstration par récurrence. Cette question comporte au moins deux étapes, puisque d'une part, il y a application du théorème cité dans les énoncés à la fonction f et donc de reconnaître que f vérifie les hypothèses du théorème sur un intervalle bien choisi et explicité, d'autre part il y a une majoration de la valeur absolue de la dérivée de la fonction f sur l'intervalle] $0, \frac{1}{2}$ [et mise en œuvre des variables pour retrouver l'inégalité demandée.

a-2 Réponses attendues

Question3 : " En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \ ".$$

Il est possible qu'un étudiant arrive à formuler les conditions d'application du théorème des accroissements finis et les applique à la fonction numérique f mais qu'il ait des difficultés pour expliciter la valeur : $\frac{1}{4}$ du second membre de l'inégalité, en effet, pour cela il faut majorer la valeur absolue de la dérivée de f sur [$0, \frac{1}{2}$]. Or, il peut considérer que la conclusion du théorème des accroissements finis : "il existe c $\in$] α, x[tel que $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$", lui permet de choisir une valeur explicite de "c" telle que $|f'(c)| \leq \frac{1}{4}$. Le quantificateur existentiel serait alors pris dans le sens de quantificateur universel.

Il est probable que le statut des lettres perturbe le raisonnement de quelques étudiants : passer de n à x, de f à u et vice versa. L'usage des quantificateurs et le choix de l'intervalle sur lequel le théorème des accroissements finis sera appliqué risquent de poser des difficultés à savoir, quantification implicite, universelle ou existentielle.

Il est envisageable que l'étudiant formule le théorème des accroissements finis de la manière suivante : ".... il existe c $\in$] α, x[tel que $f(x) - f(\alpha) \leq f'(c)(x - \alpha)$" pour obtenir directement une inégalité, comme c'est marquée dans la question.

Comme la question porte sur les suites numériques, l'étudiant pourrait ne pas se servir de la variable x en écrivant directement "$f(u_n)$". Cela peut poser un problème de quantification car il faut savoir quantifier sur n et u_n.

b-1 Analyse de l'exercice n°2 :

L'énoncé de cet exercice comporte la définition d'une loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ où des éléments implicites sont au niveau de quantificateurs cachés. Nous nous intéressons aux trois premières questions (celles-ci sont universellement quantifiées d'une manière implicite) car elles nécessitent une écriture quantifiée et des notions variées, telles que la commutativité, l'associativité, l'élément neutre et l'élément symétrique. Ces notions qui ne sont plus enseignées au secondaire sont cependant abordables avec les connaissances antérieures de l'apprenant, elles correspondent à la fois à une nouvelle terminologie et à un nouveau formalisme mathématique.

b-2 Réponses attendues

*Question3 : "Chercher les éléments de IR, admettant un symétrique pour la loi *."*

Cette question semble compliquée, car il n'y a pas une solution immédiate, la mise en œuvre de calculs étant nécessaire.

Nous envisageons que les étudiants ne formalisent pas clairement la définition d'élément symétrique. En effet, la simplicité apparente des énoncés, cache une structure complexe qui apparaît lorsque les étudiants cherchent à produire leurs réponses.

Il est possible qu'un étudiant confonde entre les deux quantificateurs universels et existentiels.

III.4. Méthodologie.

Pour choisir les copies, nous avons retenu deux critères :

* Au moins l'un des deux exercices retenus, pour notre expérimentation, soit abordé avec des formulations et une rédaction, que nous avons jugées suffisamment importantes pour notre propos.

* Parmi les trois premières questions de chaque exercice, au moins deux sont traitées.

Ainsi, nous avons retenu 50 copies pour l'exercice n°1 et 70 copies pour l'exercice n°2. Nous avons codé les copies allant de C_{1-1} à C_{1-50}, pour le premier exercice et de C_{2-1} à C_{2-70} pour le second.

III.5. Catégorisation des réponses :

Pour chaque exercice, Nous avons élaboré une catégorisation des réponses produites par les étudiants comportant 4 niveaux d'analyse. Cette catégorisation sert de base à la sélection des réponses produites par les étudiants pour l'analyse que nous allons faire et elle porte sur plusieurs niveaux d'analyse.

Premier niveau : Présence explicite des quantificateurs

Il s'agit d'une formulation de la réponse utilisant explicitement les quantificateurs. Nous distinguons plusieurs formes :

- Quantificateur universel bien formulé : l'emploi du quantificateur universel est présenté d'une manière rigoureuse, du type "$\forall$ (x,y) $\in \mathbb{R}^2$" ou "Pour tout entier naturel n".
- Quantificateur existentiel bien formulé : la réponse présente une utilisation juste de ce quantificateur, du type, "il existe un entier naturel n", "$\exists\ \alpha \in [\ 0, \frac{1}{2}\ ]$ ".
- Confusion entre l'existentiel et l'universel, du type : "* est associative ; $\exists z \in \mathbb{R}$, x, y $\in \mathbb{R}^2$ tels que $(x*y)*z = x*(y*z)$ "
- Permutation entre l'ordre des quantificateurs, du type : "* possède un élément neutre ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\ e \in \mathbb{R}$ / $x*e = x = e*x$ ... "

• Formulations ambiguës portant des quantificateurs qui apparaissent fréquemment lors du passage de quelques cas particuliers à un énoncé universel sur un ensemble infini, du type :" $u_1=\frac{1}{2}$; $u_2<\frac{1}{2}$ et $u_3<\frac{1}{2}$ d'où $u_n\leq\frac{1}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$".

Deuxième niveau : Présence explicite partielle des quantificateurs

Ce niveau correspond au type de rédaction où l'utilisation du quantificateur universel est implicite alors que celle du quantificateur existentiel est explicite. Exemple :" Montrons que $\exists\ e\in\mathbb{R}\ /\ x*e = e*x = x$ ….. "

Troisième niveau : Présence implicite du quantificateur universel

Dans ce niveau, l'utilisation du quantificateur universel est non explicité, dans la formulation de la réponse nous distinguons les formes suivantes :

- Introduction d'un élément générique : "Soit un réel x"
- Le domaine de référence est sans importance : "Soit e l'élément neutre de la loi $*$: $x*e = x \Rightarrow x= x+e - x.e \Rightarrow -e+ xe = 0 \Rightarrow e(x-1) =0$ alors e=0 c'est l'élément neutre de la loi $*$."

Quatrième niveau : Absence des quantificateurs

Il s'agit des expressions, nécessitant une écriture quantifiée, où aucune présence des quantificateurs n'est signalée, du type :

" $x * y =x+y-xy$, et $y * x =y+x-yx$, $x * y = y * x$ donc $*$ est commutative ".

III.6. Analyse des résultats

Nous allons dans ce qui suit présenter les analyses de nos résultats[16] en considérant séparément la question 3 de chaque exercice. Nous ne sommes pas intéressés à définir les profils des étudiants, nous n'avons par conséquent pas fait de traitement statistique des résultats. Nous donnerons à la suite de chaque question une analyse qualitative de quelques copies.

a- Question 3 de l'exercice n°1 :

Les résultats en pourcentage[17] sont les suivants :

- Présence explicite des quantificateurs : 26%
- Présence explicite partielle des quantificateurs : 30%
- Absence des quantificateurs : 20%

Cette question nécessite des argumentations mobilisées telles que, l'utilisation du théorème des accroissements finis, majoration de la valeur absolue d'une fonction numérique sur un intervalle fermé. Nous signalons que dans 12 copies, soit 24 %, la question n'a pas été abordée.

---

[16] Nous proposons en annexe une classification des procédures produites par les étudiants pour la troisième question de chaque exercice.

[17] Ces résultats sont obtenus à partir du tableau n°1 présenté dans l'annexe.

L'existence d'un élément $c \in [\alpha, x]$ permet à certains étudiants de donner une valeur explicite de c :"c=0" pour pouvoir compléter le raisonnement. Nous prenons comme exemple, la copie suivante : C_{1-2} :

"Soit f est dérivable sur $]\alpha, x[$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [\alpha, x]$ tel que :

$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq f'(c)$; $|f'(0)| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq f'(c)\,|x-\alpha|$;

pour c=0, $\left|\frac{1}{1+e^x} - \alpha\right| \leq f'(0)\,|x-\alpha|$; pour $x = u_n$; alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\,|u_n - \alpha|$."

Nous retrouvons les mêmes inférences invalides utilisées auparavant pour la démonstration d'existence. Nous signalons que la réponse à cette question, nécessite une écriture quantifiée portant sur toutes les variables présentes : x, α, c, n, u_n, ce qui n'a pas été bien formulé par certains étudiants. Dans l'analyse de cette réponse, nous avons remarqué qu'aucune copie n'a présenté une formulation, jugée complète, où toutes les variables mentionnées sont en occurrences. Par exemple, il y a 6 copies, soit 12%, où la présence du quantificateur universel est explicite mais, seulement les variables n et α sont en occurrences. La copie C_{1-14} en est un cas :

"On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ et

$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à u_n et α,

on a : $f(u_n) - f(\alpha) = f'(\alpha)(u_n - \alpha) \Rightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}\,|u_n - \alpha|$, car $f'(\alpha) \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\,|u_n - \alpha|$, car $f(\alpha) = \alpha$ et $f(u_n) = u_{n+1}$."

b- Question 3 de l'exercice n°2 :

Cet exercice appartient au domaine de l'algèbre élémentaire, le vocabulaire employé n'est pas familier aux étudiants, vu que les notions de la loi de groupe, ne sont connues qu'en première année de l'enseignement supérieur. Cet énoncé contient un quantificateur universel double implicitement introduit, le domaine de référence des deux variables x et y est l'ensemble IR.

Les résultats obtenus en pourcentage[18], sont :

- Présence explicite des quantificateurs : 42,8%
- Présence explicite partielle des quantificateurs : 10%
- Présence implicite du quantificateur universel : 12,9%
- Absence des quantificateurs : 10%

La définition reste inconnue pour 4 étudiants, soit 5,7%, alors que 13 étudiants, soit 18,6%, n'ont pas abordé cette question, ceci nous paraît un nombre important qui ne peut pas être contrôlé.

La simplicité apparente de cet énoncé cache en fait une structure complexe qui apparaît lorsque les étudiants cherchent à le formaliser, même partiellement.

[18] Ces résultats sont obtenus à partir du tableau n°2 présenté dans l'annexe.

Notons dans les copies (33 soit 47,1%), où la question a été abordée, les lettres exprimant un réel et son symétrique sont universellement introduites, ce qui est logiquement invalide. Les formulations sont ambiguës et le problème n'est plus de déterminer les éléments admettant un élément symétrique mais de déterminer l'ensemble des éléments vérifiants une certaine condition, ce qui est incorrect. Nous citerons les exemples suivants :

La copie $C_{2\text{-}1}$:
"Les éléments de IR, admettant un symétrique pour la loi $*$;
$\{x,y \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall x$ et $\forall y \;\; x * y = x + y - xy \}$".

La copie $C_{2\text{-}23}$:
"Chercher les éléments de IR, admettant un symétrique pour la loi $*$ revient à chercher l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R} \quad x * y = y * x = e$ (avec y est le symétrique de x pour la loi $*$). $x * y = x + y - xy = 0 \;\Rightarrow\; x + y = xy$. Soit E l'ensemble des éléments de IR, admettant un symétrique pour la loi $*$.
$E = \{x,y \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = xy \}$".

La copie $C_{2\text{-}27}$:
"Les éléments de IR, admettant un symétrique pour la loi $*$;
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; I = \{ x * y = y * x = 0 \}$, I l'ensemble des éléments symétriques ;
$x * y = y * x \;\Rightarrow\; x + y - xy = y + x - yx = 0$ ".

Pour cette dernière copie, la réponse est interrompue, ceci est justifiée par des lignes vides et le passage à la question d'après.

III.7. Conclusion :

Dans notre partie expérimentale, qu'il s'agisse de problèmes d'algèbre ou d'analyse, nous avons observé les mêmes tendances : de nombreuses difficultés dans l'utilisation des quantificateurs. En effet, les résultats que nous avons obtenus et l'analyse des réponses produites par les étudiants montrent que, d'une part, l'ambiguïté concernant le maniement des quantificateurs (permutation de leur ordre, confusion entre l'universel et l'existentiel, etc.) et le statut des lettres sont bien réelles pour un nombre non négligeable d'étudiants ; d'autre part, les notions mathématiques en jeu sont mal maîtrisées, or l'utilisation correcte des quantificateurs est indispensable lorsque nous nous heurtons à des difficultés logiques (Arsac, Durand-Guerreier, 2000). De plus, ce sont les connaissances mathématiques qui permettent de répondre dans les cas où les règles classiques de déduction (Copi, 1954) ne s'appliquent pas. Nous avons vu que les étudiants qui reconnaissent ces cas, cherchent parfois à donner des réponses en mobilisant à chaque fois les énoncés et en démontrant un énoncé universel sur un ensemble infini à la suite de l'examen de quelques cas particuliers. De ce fait, certaines réponses pourraient servir pour étudier ou illustrer les conceptions des élèves et des étudiants sur quelques niveaux de formulations.

En outre, nous avons vu que de nombreux étudiants associaient la nécessité à l'expression implicitement quantifiée, mais que par contre, la quantification explicite n'apparaissait pratiquement jamais. Ceci renforce notre hypothèse selon laquelle les quantificateurs sont restés, le plus souvent, à un niveau implicite.

IV. Conclusion Générale

Nous avons montré l'importance de l'analyse logique des énoncés comme outil pour l'enseignant pour éclairer des ambiguïtés et des implicites éventuels dans son propre discours ou dans les énoncés qu'il propose à ses élèves et ses étudiants. L'approche épistémologique de la quantification nous a permis de nous forger des outils d'analyse permettant de mettre à jour les points suivants :

- Absence (il n'y a pas eu) de prise en charge explicite des questions de quantification.
- Des erreurs importantes chez les étudiants liées au maniement des quantificateurs qui engendrent des lacunes dans les connaissances mathématiques en jeu.

Dans la pratique enseignante la quantification explicite des énoncés universels a tendance à disparaître. Pour un enseignant de mathématique, c'est le contexte qui va permettre de décider comment l'énoncé doit être considéré. Or la transparence de ce contexte est, le plus souvent, loin d'être assurée et ceci est source de nombreuses difficultés (Durand-Guerrier, 1996).

Bibliographie

ARISTOTE *L'organon, De l'interprétation, Topiques, Premiers et Seconds Analytiques*, Traduction nouvelle et notes par Jean Tricot, Librairie philosophique J.VRIN (1983, 1989).

ARSAC G. (1996), Un cadre d'étude du raisonnement mathématique, *Dida Tech* Séminaire n°175, pp.69-100, Université Joseph Fourier Grenoble 1.

ARSAC G., DURAND-GUERRIER V. (2000), Logique et raisonnement mathématique variabilité des exigences de rigueur dans les démonstrations mettant en jeu des énoncés existentiels, in *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Equipe DIDIREM, Université Paris 7.

CHELLOUGUI F. (2000), *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique* , Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, Université de Tunis.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique Du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée sauvage éditions, Grenoble.

COPI I. (1954), *Symbolic Logic*, New York

DURAND-GUERRIER V. (1991), *Les difficultés en logique des étudiants de premier cycle universitaire, Première approche*, Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe, in *Petit X* n°50, IREM de Grenoble.

DURAND-GUERRIER V., et ali. (2000), *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : Eléments d'analyse pour les enseignants*, IREM de Lyon.

FREGE G. (1971), *Ecrits logiques et philosophiques*, Traduction et introduction de Claude Imbert, Paris, Seuil.

GENTZEN G. (1934), *Recherches sur la déduction logique*, Vol. 39, pp.176-210, Traduction par Jean Ladrière, Paris, PUF, 1955.

HOTTOIS G. (1989), *Penser la logique. Une introduction technique, théorique et philosophique à la logique formelle*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles.

QUINE W.V.O. (1950), *Méthodes de logique*, Traduction française Armand Colin, 1972.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 18, n°2, pp.139-190.

Curriculum et Réformes en Tunisie

Manuel Tunisien. (1979), *Mathématiques, 5ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Maths-Sciences et Maths-Technique,* République Tunisienne, Centre National Pédagogique (CNP).

Manuel Tunisien. (1998), *Mathématiques, 6ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 1.* République Tunisienne, CNP.

Manuel Tunisien. (1998), *Mathématiques, 7ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 1.* République Tunisienne, CNP.

Programmes Officiels de l'Enseignement du Second Cycle. (1969), Fascicule n°3, Discipline : Mathématiques, République Tunisienne.

Programmes de Mathématiques Enseignement Secondaire. (1976), République Tunisienne, Direction de l'Enseignement secondaire technique et Professionnel.

Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématiques. (1978, 1982, 1986, 1988, 1993, 1998), République Tunisienne, CNP.

ANNEXES

1) Proposition de corrigé :

Pour faciliter la lecture de nos analyses nous proposons ci dessous un corrigé possible pour les questions choisies pour ce document.

Question 3 de l'exercice n°1 :

f étant continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in [0,\frac{1}{2}]$; on étudie le cas où $\alpha<x$, l'autre cas $\alpha>x$ sera traité de la même manière, f est continue sur $[\alpha,x]$, dérivable sur $]\alpha,x[$ d'après le théorème des accroissements finis :
il existe $c\in]\alpha,x[$ tel que $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$.
Or pour $x \in [0,\frac{1}{2}]$, $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$, donc $|f'(x)| = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ et $|f'(x)|-\frac{1}{4} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4}$
$\Rightarrow |f'(x)| - \frac{1}{4} = \frac{4e^x - (1+e^x)^2}{4(1+e^x)^2} \Rightarrow |f'(x)|-\frac{1}{4} = -\frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2}$; par suite $|f'(x)|-\frac{1}{4} \leq 0$,
et alors $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
Puisque $c\in]\alpha,x[\subset[0,\frac{1}{2}]$ on aura $|f'(c)| \leq \frac{1}{4}$. Ainsi $\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$; $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.
D'après la question (1), on a : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\in[0,\frac{1}{2}]$. Soit $n \in\mathbb{N}$, on pose $x = u_n$; et alors $|f(u_n)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$, et d'après la question (2), on a : $f(\alpha)=\alpha$ donc $|f(u_n) - \alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

Question 3 de l'exercice n°2 :

On cherche l'ensemble des réels admettant un symétrique pour la loi *.
Soit $x\in\mathbb{R}$, on cherche s'il existe un réel x' tel que : $x * x' = x' * x = 0$.
Ce qui revient à résoudre l'équation en x' : $x*x' =0$.

$$x* x' = 0 \Rightarrow x+x'-xx' = 0 \Rightarrow x'(1-x) = - x \quad (\#)$$

Si x=1 alors l'équation (#) n'a pas de solution, d'où 1 n'admet pas de symétrique pour la loi *.

Si $x \neq 1$ alors $x' = \frac{x}{x-1}$; l'équation (#) admet donc une solution unique.

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\frac{x}{x-1}$ est l'élément symétrique de x pour la loi *.

2) Classification des réponses

a- Question 3 de l'exercice n°1

Tableau n°1

Niveau	**Procédures rencontrées**	**Total**
Présence Explicite des Quantificateurs	Mobilisation des énoncés. Dépendance des statuts des lettres. Le théorème des accroissements finis est utilisé avec une inégalité. Confusion entre l'existentiel et l'universel. ❖ f est dérivable sur] α, x[d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in[\alpha, x]$ tel que : $\left\lvert \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \right\rvert \leq f'(c)$; $\lvert f'(0)\rvert = \frac{1}{4}$; $\lvert f(x)-\alpha\rvert \leq f'(c)\,\lvert x-\alpha\rvert$; pour c=0, pour x = u_n; alors $\lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \leq \frac{1}{4} \lvert u_n - \alpha\rvert$ ".	4
	❖ On a $\forall n\in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in [0,\frac{1}{2}]$ f est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$ dérivable sur $]0,\frac{1}{2}[$ et $f'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ d'après le théorème des accroissements finis appliqué à u_n et α on a : $f(u_n) - f(\alpha) = f'(\alpha)(u_n - \alpha) \Rightarrow$ $\lvert f(u_n) - \alpha\rvert \leq \frac{1}{4} \lvert u_n - \alpha\rvert$ car $f'(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \leq \frac{1}{4} \lvert u_n - \alpha \rvert$.	9
Présence Explicite Partielle des Quantificateurs	1) Ecriture de $f(u_n)$ sans quantifier ni sur la suite u_n ni sur l'entier n. Il y a une utilisation explicite du quantificateur existentiel : "On a : $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ .....$\Leftrightarrow \lvert f'(x)\rvert \leq \frac{1}{4}$. On fait l'étude sur un intervalle $[\alpha, u_n]$ avec $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, d'après le théorème des accroissements finis on a : f est continue sur $[\alpha, u_n]$, f est dérivable sur $]\alpha, u_n[$ donc il existe $c \in]\alpha, u_n[$ tel que $f'(c)=\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n - \alpha}$ or $\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lvert f'(c)\rvert \leq \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$...."	6
	2) Mobilisation des énoncés. Incompréhension des statuts des lettres : "$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ est dérivable sur $[\alpha,x]$ donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists\, c\in]\alpha, x[$ tel que : $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(c) = \frac{-e^c}{(1+e^c)^2} < 0$ avec $c\in]\alpha, x[$;......... $\lvert f(x) - \alpha\rvert \leq \frac{1}{4} \lvert x - \alpha\rvert$; de même $\forall n\in \mathbb{N}$, $\lvert f(u_n) - \alpha\rvert \leq \frac{1}{4} \lvert u_n - \alpha\rvert$"	9

Absence des Quantificateurs	1) Mobilisation des énoncés. Utilisation d'une inégalité dans le théorème des accroissements finis, les conditions ne sont pas vérifiées. Abus dans l'emploi des lettres. "D'après le théorème des accroissements finis, $\mid f(b) - f(a) \mid \leq 1 \mid b-a \mid$ or $f(b)=f(u_n)= u_{n+1}$ et $f(a)=f(\alpha)=\alpha$; d'où $\mid u_n - \alpha \mid \leq \frac{1}{2}$; alors $\mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{1}{4} \mid u_n-\alpha \mid \leq \frac{1}{2}$." 2) Mobilisation des énoncés. Formulation erronée. "En utilisant le théorème des accroissements finis, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ on a démontré que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ or $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, $\mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq k\frac{1}{2} \mid u_n-\alpha \mid$ avec $k = \frac{1}{2}$ donc $\mid u_{n+1} - \alpha \mid \leq \frac{1}{4} \mid u_n-\alpha \mid$."	6 4
Question non abordée		12

Question 3 de l'exercice n°2 :

Tableau n°2

Niveau	Procédures rencontrées	Total
Présence Explicite des Quantificateurs	1) Mauvaise formulation de la définition: ❖ Les éléments de IR admettant un symétrique pour la loi $*$, $\{x,y\in \mathbb{R}^2 / \forall x$ et $\forall y , x * y = x + y - xy \}$". ❖ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $I = \{ x*y= y*x=0\}$, I est l'ensemble des éléments symétriques. ❖ Ceci revient à chercher l'ensemble des $x\in\mathbb{R} / \forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in \mathbb{R}\ x*y = y*x = e$; avec y le symétrique de x pour la loi $*$ .... 2) Confusion avec la notation de l'élément symétrique de la loi multiplicative : ou avec l'élément symétrique de la même loi: ❖ Soit $x^{-1}\in\mathbb{R}$;$x*x^{-1}=0\Rightarrow x+x^{-1} - x\, x^{-1} =0\ \ x^{-1}=\frac{x}{x-1}$ donc les éléments du symétriques sont $x^{-1}=\frac{x}{x-1}\ \forall x\in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. ❖ $\forall\ x\in\mathbb{R}, \exists\ x^{-1}\in\mathbb{R}$ tel que $x * x^{-1} = 0 = x^{-1}*x$; x^{-1}est l'élément symétrique . 3) Définition incorrecte, confusion avec l'élément symétrique de la même loi	6 5 6 3 3

	"Soit $x\in\mathbb{R}^*$ montrons que $\forall\ x\in\mathbb{R}^*$, x^{-1} existe pour la loi * $\Leftrightarrow x*x^{-1}=1$; $x*\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-x\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-1=\frac{x^2-x+1}{x}$ ......" 4)Formulation ambiguë portant le quantificateur universel : "$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$; x*y=e où y est l'élément symétrique".	1 6
Présence Explicite Partielle des Quantificateurs	1) Formulation ambiguë portant une quantification implicite : "Les éléments de $\mathbb{R}$ qui admettent un symétrique pour la loi *: x*y=e ; x * y =0 ; x + y - xy =0 $\Rightarrow$ x+y =xy, donc l'élément symétrique pour la loi * est égal à e =0". 2)Instabilité du statut des lettres, définition incorrecte : "Soit b le symétrique de x dans $\mathbb{R}$; b*(x*y)= b*(x+y-xy) ; (b*x)*y= b*x+ b*x - b*xy $\Rightarrow$ y =1+by-y $\Rightarrow$ b = $\frac{2y-1}{y}$ $\forall y\neq 0$...". 3)Application de la question n°4 : "Les éléments de $\mathbb{R}$ qui admettent un symétrique pour la loi * sont les éléments qui vérifient l'équation x*x=1 : $\{y\in\mathbb{R}$ / x*x=1}". 4)Confusion avec la loi additive : "Pour $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$; $\forall -x\in\mathbb{R}$, $\exists\ x\in\mathbb{R}$ / -x*y=-x+y-(-x)y ; donc tout élément de $\mathbb{R}$ admet pour la loi * un élément symétrique".	1 2 1 3
Présence Implicite du Quantificateur Universel	Instabilité du statut de la lettre y, la lettre x est une variable libre : "Cherchons y / x * y =0 , $\forall y\in\mathbb{R}$; x + y - xy =0 ......"	9
Absence des Quantificateurs	Les variables n'ont aucun statut : "Les éléments qui admettent des éléments symétriques sont : x*x' = e $\Rightarrow$ ....$\Rightarrow$ $x'=\frac{x}{x-1}$ $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$."	7
Définition inconnue		4
Question non abordée		13