LA RESOLUTION DE PROBLEMES PAR CLASSES

Lucia GRUGNETTI - Université de Parme, Italie
François JAQUET - IRDP, Neuchâtel, Suisse

AVANT PROPOS

Ce texte est le compte rendu d'un atelier présenté lors de la 49e rencontre de la CIEAEM (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) tenue à Setúbal, Portugal, en juillet 1997. Une quarantaine d'enseignants, du primaire en majorité, ont participé à cet atelier. Par groupes, ils ont résolu le problème proposé, conduit une réflexion a priori et a posteriori, analysé quelques solutions proposées par des classes et, finalement, discuté des apports de la résolution de problèmes dans le cas d'une dévolution totale de la tâche à la classe.

Ce texte paraîtra sous cette forme dans les actes de la rencontre.

INTRODUCTION

La situation proposée aux participants à l'atelier est celle des élèves qui participent à des concours de mathématiques par classes et qui doivent, en un temps limité, livrer une seule solution pour chaque problème de l'épreuve.

Selon le règlement de ces concours, le maître doit quitter la classe pour toute la durée de l'épreuve. Il est remplacé une autre personne neutre dont le rôle officiel se limite strictement à la distribution des textes, au contrôle du temps accordé aux élèves et au recueil des copies. En général, les maîtres procèdent par échanges, chacun va surveiller l'épreuve d'une autre classe qui participe également au concours.

Les problèmes exigent en général de longues recherches et sont trop nombreux pour qu'un élève soit capable de les résoudre seul dans le temps imparti.

L'obligation de donner une seule réponse par problème au nom de la classe, l'absence du maître, la nature et le nombre des problèmes déterminent le "contrat" de travail et font de ces problèmes de concours une activité où les interactions sont absolument nécessaires et gérées par les élèves seuls.

LES OBJECTIFS

Les compétitions mathématiques par classes qui se multiplient ces dernières années à un rythme accéléré ne sont pas un phénomène de mode. Elles s'inscrivent naturellement dans l'évolution actuelle des conceptions de l'apprentissage issue des recherches en didactique des mathématiques. Leurs objectifs en témoignent, généralement formulés de manière explicite comme ceux du *Rallye mathématique transalpin*, par exemple :

Résoudre des problèmes c'est faire des mathématiques

L'enseignement des mathématiques, comme on le sait bien, ne se limite pas à la maîtrise de techniques de calcul ou à la mémorisation de connaissances qu'il est relativement aisé de faire acquérir. C'est la résolution de problèmes qui constitue le fondement et le but des apprentissages, en donnant du sens aux situations à mathématiser. Le contexte du rallye est stimulant, les problèmes proposés sont consistants et originaux, les conditions font que les élèves s'y engagent et prennent en charge leur résolution.

Le débat est un élément essentiel en mathématiques

Très souvent, c'est le maître qui sait et qui informe l'élève de la pertinence de son travail, dans un rapport d'autorité. Il faut pourtant donner aux enfants l'occasion d'argumenter, de discuter des solutions, de soutenir les affirmations qu'ils avancent, de valider leur travail mathématique. Dans le rallye, la classe doit précisément choisir une solution et une seule pour chaque problème. Ce n'est pas toujours facile, mais la confrontation est garantie. C'est l'ouverture d'un débat scientifique.

La capacité à travailler en équipe est aujourd'hui essentielle

Pouvoir s'organiser à plusieurs, se répartir le travail, gérer du temps, apporter sa contribution personnelle, accepter celle des autres et pouvoir entrer dans leurs points de vue sont des capacités difficiles à acquérir mais de plus en plus nécessaires pour s'adapter à la société actuelle. Il y a trop de problèmes à résoudre pour un seul élève dans une épreuve de rallye. Là encore, les règles du jeu garantissent la coopération et la valorisation des interactions entre élèves.

L'observation des élèves en activité de résolution de problèmes est une forme d'évaluation enrichissante

Le rôle du maître en classe de mathématiques est souvent celui d'un correcteur, d'un animateur, d'un gestionnaire, très impliqué dans les apprentissages de ses élèves. Les règles du concours lui confèrent un autre rôle, celui d'observateur extérieur (dans sa propre classe ou celle d'un collègue lors des épreuves finales).

La confrontation est une source de renouvellement

L'apport extérieur de problèmes est stimulant pour les maîtres, les élèves et, plus généralement, pour l'activité mathématique en classe : des idées nouvelles, des pistes à exploiter, des échanges, des comparaisons, des défis à relever, des analyses communes, etc. Le rallye n'est pas qu'une compétition, c'est aussi l'occasion d'examiner des résultats par le détail, de faire apparaître à grande échelle des types de procédures, de représentations, de difficultés rencontrées par les élèves.

L'ELABORATION DES PROBLEMES

Un des objectifs des concours mathématiques est de faire résoudre des problèmes aux élèves. Mais pas n'importe lesquels! Et les premières questions à se poser concernent le choix de ces problèmes. Doivent-ils se distinguer de ceux qu'on trouve dans les manuels, qu'on propose en classe, qu'on utilise pour évaluer les connaissances ou les compétences des élèves ?

Ils doivent évidemment satisfaire aux critères généraux de qualité qu'on exige actuellement des situations d'apprentissage de connaissances mathématiques :

•La langue de leur énoncé doit être claire et rigoureuse pour éviter les implicites et les non-dit liés à des pratiques locales.

•On souhaite un style plaisant, adapté au niveau de langage des élèves, en rupture avec les formulations bien souvent stéréotypées des exercices d'application traditionnels.

•Au plan mathématique, il faut s'assurer de leur pertinence, de l'existence d'une ou plusieurs solutions, de l'adéquation des connaissances requises pour les résoudre au développement des élèves.

•Au plan didactique, les critères de choix sont également fort nombreux : possibilités d'exploitation dans le cadre du programme, compatibilité avec différents modes de gestion de la classe, potentialités de différenciation, intérêt des stratégies de résolution et des représentations susceptibles d'apparaître.

Les critères de choix spécifiques des problèmes de concours, sont déterminés avant tout par les contraintes du «contrat» ou le règlement de la compétition :

•La limitation du temps conduit à éviter des situations trop ouvertes qu'il serait impossible de développer sur la durée de l'épreuve, et par conséquent, à proposer des problèmes dans lesquels les élèves doivent pouvoir s'engager rapidement.

•En l'absence du maître (comme l'exigent les principes d'organisation) on ne peut pas compter sur ses relances, ni sur d'autres aides extérieures pour débloquer une situation.

•Il ne peut y avoir aucune ambiguïté sur les questions. Leur interprétation doit être la même pour tous, puisque la correction est commune et aboutit à un classement.

•Le concours collectif exige une grande variété de sujets et de difficultés, afin que chaque élève de la classe puisse participer efficacement, selon ses capacités, à l'une ou à l'autre des résolutions.

•Pour des raisons de régularité de la compétition, on ne peut expérimenter les problèmes à grande échelle sans risquer de les dévoiler et de favoriser ceux qui en auraient connaissance.

•Pour les mêmes motifs, il faut éviter de proposer des sujets proches de ceux des manuels officiels, des anciennes éditions du concours, de «traditions locales», etc. Cette dernière contrainte est la plus forte : le concours doit présenter de "vrais" problèmes, que tous les participants rencontrent pour la première fois, pour lesquels ils ne disposent pas de stratégies déjà élaborées au cours de séquences d'enseignement antérieures.

Toutes les conditions évoquées ci-dessus montrent les difficultés de la conception de sujets d'épreuves et l'illusion qu'il y aurait à penser que la tâche est réalisable par une seule personne. C'est l'occasion, pour les chercheurs et enseignants engagés de travailler ensemble.

Comme on le verra lors de l'analyse des résultats, les problèmes proposés dans les concours présentent encore, parfois, des imperfections ou ambiguïtés, dont certaines ne se révèlent qu'à l'examen des procédures d'élèves. L'élaboration des énoncés et leur amélioration peut ainsi donner lieu à des recherches ultérieures, à des observations fines, à des entretiens individuels, etc...

ÉTUDE DE CAS

Le problème choisi pour l'atelier est issu de la première épreuve, de mars 1997, du 5e *Rallye mathématique transalpin*. Il a été résolu par des groupes d'élèves de 9 à

12 ans (degrés 4, 5 et 6), dans 250 classes de Suisse romande, France et Italie. Les analyses conduites dans ces différentes régions ont révélé une parfaite similitude des différentes procédures de résolution adoptées par les élèves. Ce problème s'est aussi révélé particulièrement intéressant pour la formation des maîtres, par la diversité des stratégies de résolution apparues et par la richesse des représentations sur lesquelles se construisent ses procédures de résolution. En voici l'énoncé :

Chameaux et dromadaires

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes.

Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une.

Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.

Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?

Expliquez votre réponse.

Analyse a priori

Lors de l'atelier, la résolution du problème par les participants et l'analyse a priori issue de la discussion a conduit à de nombreuses observations, qu'on peut résumer ainsi :

•Le problème est jugé intéressant par sa présentation plaisante, son originalité et son contenu mathématique.

•L'énoncé paraît clair. Certains jugent toutefois que la demande de dessiner un homme sur chaque chameau n'apporte rien au problème et peut même constituer un piège inutile.

•Les méthodes de résolution varient sensiblement entre les groupes de participants. Ceux qui enseignent l'algèbre ou l'utilisent régulièrement dans leur pratique professionnelle résolvent un système de deux équations à deux inconnues. Ceux qui enseignent à l'école primaire ou n'ont plus de pratique algébrique utilisent des procédures arithmétiques ou travaillent par essais et corrections successives.

L'analyse a priori de l'épreuve, faite lors de la rédaction du problème, devait tenir compte des contraintes de l'épreuve et, en particulier, de l'attribution des points aux différentes présentations des solutions attendues des élèves. La voici, sous la forme adoptée par les textes échangés entre les auteurs de l'épreuve, au moment de l'adoption finale des problèmes :

«*Domaine de connaissances* **:**
- arithmétique élémentaire, «équation».

Analyse de la tâche **:**
- trouver le nombre d'animaux par l'opération 52 : 4 = 13;
- travailler par essais successifs, les organiser;
- ou déduire de la différence entre 13 et 19 qu'il y a 6 chameaux;
- justifier ce raisonnement.

Procédures et explications **:**
- incompréhension de la tâche : 0 pt
- découverte du nombre d'animaux seulement (13) : 1 pt
- plusieurs essais, sans la bonne réponse (par exemple: 5 chameaux et 8 dromadaires, conduisant à 52 pattes, 18 bosses et 5 hommes) 2 pts

- la solution : 6 chameaux et 7 dromadaires, sans le nombre d'hommes
  ou 6 hommes, sans explications 3 pts
- la solution : 6 hommes, avec explications 4 pts

Niveau **:** 4, 5, 6 (élèves de 9 à 12 ans)»

L'analyse a posteriori

Les participants à l'atelier ont travaillé sur un choix d'une quarantaine de copies rendues par des groupes d'élèves. Le temps disponible n'a pas permis d'en faire un classement rigoureux, mais les différentes catégories de procédures sont cependant apparues clairement.

Nous donnons ici les résultats des 86 classes de Suisse romande et du Tessin :

•9 classes n'ont pas compris la tâche, ou ont fait des essais infructueux. (0 pt)

•21 classes ont découvert le nombre d'animaux, 13, en divisant 52 par 4, puis elles n'ont pas réussi à résoudre le problème des bosses : «13 animaux et 19 hommes»; «13 animaux et 13 hommes», «13 animaux et 3 chameaux», «9 chameaux et 9 hommes». Les «9 hommes» sont presque toujours trouvés en divisant 19 par 2. (1pt)

•2 classes sont arrivées à la réponse mais avec des contradictions, du genre : «6 hommes, 12 chameaux et 1 dromadaire» ou ont donné plusieurs solutions. (2 pts)

•Pour 17 classes, la solution était incomplète («6 chameaux et 7 dromadaires», sans le nombre d'hommes) ou sans explication satisfaisante autre que la répétition de l'énoncé. (3 pts)

•37 classes ont trouvé «6 hommes», avec des explications satisfaisantes. (4 pts)

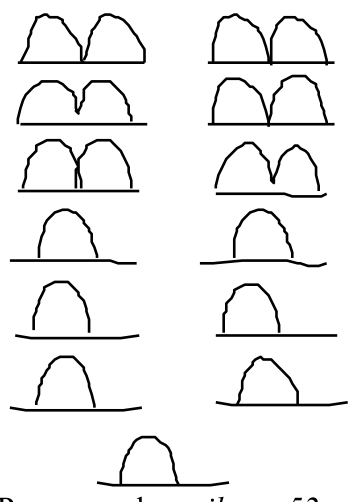
Les résultats ci-dessus permettent d'affirmer que le problème est bien adapté aux possibilités des élèves de 9 à 12 ans car, à quelques exceptions près, chaque groupe est capable de s'y engager avec un certain succès. Mais, au-delà des taux de réussite, l'analyse plus détaillée des 86 copies des classes romandes et d'une cinquantaine d'autres de la région de Parme, en Italie, ont fait apparaître plusieurs catégories de procédures de résolution. Nous les présentons ici, par quelques extraits caractéristiques d'explications des groupes d'élèves :

1. Calcul du nombre des animaux par la division 52 par 13, puis tentatives par essais systématiques :

« Cléopâtre a dessiné 6 hommes en tout.

Pour trouver les hommes, nous avons divisé le nombre de jambes par quatre qui est le nombre de jambes d'un animal. Nous avons fait des essais jusqu'à trouver 6 et 7. Si on multiplie l'un par 1 et l'autre par 2 et si on additionne, on trouve le nombre de bosses en tout.»

2. Calcul du nombre des animaux au moyen de la multiplication 4 x 13, puis dessin d'une bosse par animal, les six bosses restantes sont réparties sur 6 animaux : les chameaux.



«On a fait 13 x*4 = 52. Ça fait 13 chameaux ou dromadaires. Après on a fait le dos des chameaux ou des dromadaires, après on a mis une bosse sur chaque chameau. Il reste 6 bosses qu'on a mis sur six chameaux. Après on a vu qu'il y avait six chameaux. Donc six hommes. Réponse 6 hommes.»*

Remarques :

L'utilisation du «ou» dans la phrase «Ça fait 13 chameaux ou dromadaires» témoigne d'une maîtrise de la conjonction selon l'acception des logiciens. Il s'agit d'un «ou» non exclusif, correspondant à la réunion de deux collections.

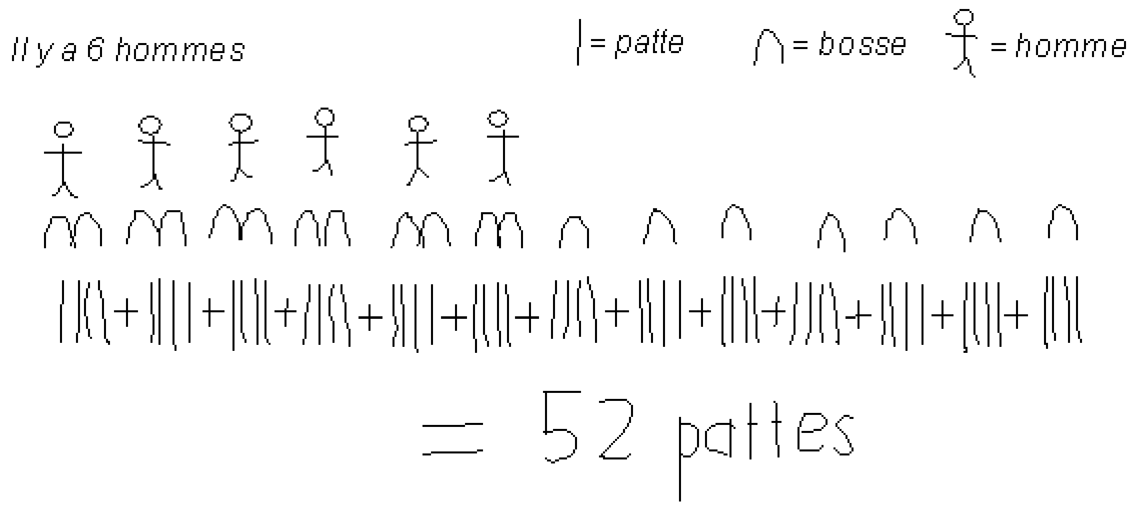
Dans d'autres protocoles, c'est le «et» qui est utilisé. Par exemple : «*il y a 52 jambes, chaque chameau et dromadaire a 4 jambes, donc 52 en tout.*»

3. Dessin de tous les animaux, puis dessin de deux bosses par animal, les sept bosses en trop sont biffées.

«*J'ai dessiné tous les animaux sans tenir compte s'ils étaient dromadaires ou chameaux. J'ai dessiné 2 bosses sur chaque animal et après je les ai comptées. Il y avait 26 bosses alors que dans la consigne il y est indiqué 19 bosses. J'ai fait le calcul 26 -19 = 7, donc il y a 7 bosses de plus alors j'ai biffé les 7 bosses en trop et cela m'a donné 6 chameaux et 7 dromadaires. Donc il y a 6 hommes sur les chameaux.*»

Remarques :

Cet élève a dit avoir trouvé le nombre d'animaux par un dessin. De nombreuses classes ont aussi procédé de cette manière, de tous les degrés. Par exemple, dans le cas suivant, même la première division a été faite par le dessin de groupes successifs de 4 pattes, jusqu'à 52 :



4. Calcul du nombre des animaux par la division de 52 par 4, accompagnée d'un dessin pour déterminer la répartition des bosses. Dans ce cas, le raisonnement permettant de découvrir le nombre de chameaux n'est pas expliqué, mais le résultat est vérifié par une hypothèse qu'on pourrait qualifier d'«absurde» :

«...Il y a 6 chameaux parce que si on remplace un chameau par deux dromadaires, parce que chacun a une bosse, il n'y aura plus 13 animaux, mais 14. Par conséquent, les hommes sont 6, comme les chameaux.»

5. Calcul du nombre des animaux par la division de 52 par 4. Pour les bosses, la méthode consiste à diviser 19 bosses par 2 pour trouver un premier nombre hypothétique de chameaux, puis à le transformer pour que le nombre d'animaux corresponde à 13. On procède alors par substitutions successives d'un chameau par deux dromadaire, afin de maintenir constant le nombre de bosses.

«Cléopâtre a dessiné 7 hommes car il y a 52 jambes, divisées par 4, qui deviennent 13 animaux.

En divisant 19 par deux, le nombre des bosses, on obtient 9 chameaux et un dromadaire (ceci n'est pas le nombre des animaux). Alors on retire le neuvième chameau et avec ses 2 bosses on obtient 2 dromadaires. Il y a alors 11 animaux (ça ne suffit pas). On retire le huitième chameau avec lequel on obtient 2 dromadaires, qui, additionnés aux 3 dromadaires obtenus avant et aux 7 chameaux font 13. Alors on cherche le nombre de chameaux (7) qui est égal au nombre des hommes.»

Remarques :

Dans ce protocole, les élèves ont substitué, étape par étape, deux dromadaires à un chameau. Ils ont commis une petite erreur de comptage dans leurs substitutions mais le raisonnement est correct.

6. Calcul du nombre des animaux par la division de 52 par 4, le nombre de chameaux est trouvé par la division entière de 13 par 2.

$$\begin{array}{r|l} 52 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{4} & 13 \\ 12 & \\ \underline{12} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{12} & 6 \textit{ chameaux} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \textit{ dromadaires} \\ \underline{\times 4} \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \textit{ chameaux} \\ \underline{\times 4} \\ 24 \\ +\ \underline{28} \\ 52 \end{array} \qquad \textit{Il y a 6 hommes}$$

Remarques :

Plusieurs groupes ont trouvé 6 chameaux en divisant 13 par 2. La plupart d'entre eux ont vérifié que le nombre de bosses correspondant était 19. D'autres, comme le groupe précédent, n'ont pas vérifié le nombre de bosses, mais le nombre de pattes !

C'est l'analyse a posteriori qui permet ici de révéler une faiblesse de l'énoncé dans le choix de la variable «nombre de bosses». En remplaçant par exemple 19 par 22 bosses, on pourrait éviter que des raisonnements tout à fait insuffisants comme celui-ci conduisent à la bonne réponse.

7. Calcul du nombre des animaux par la division de 52 par 4, suivi d'une recherche exhaustive des compositions des 13 animaux.

« 52 : 4 = 13 Il y a de toute façon 13 animaux : *ch* *dr*

13 = 1 + 12 *X* *car maximum 2 animaux*

13 = 2 + 11 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 3 + 10 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 4 + 9 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 5 + 8 X on n'arrive pas à 19
bosses
Comme il y a 6 chameaux, il y aura 6 hommes. 13 = 6 + 7 !!
13 = 7 + 6 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 8 + 5 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 9 + 4 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 10 + 3 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 11 + 2 X on n'arrive pas à 19
bosses
13 = 12 + 1 X car maximum 2 animaux »

Remarque :

Les deux compositions : 1 + 12 et 12 + 1 sont éliminées pour une raison linguistique : le pluriel utilisé dans l'énoncé, qui a ici priorité sur l'argument numérique du nombre de bosses.

CONCLUSIONS

L'intérêt des analyses de productions collectives d'élèves est évident. C'est l'avis de tous les participants à l'atelier, ainsi que de tous ceux qui ont déjà pu se pencher sur ces textes, lors de la correction des épreuves, lors de la recherche de nouveaux énoncés et, plus largement lors de séquences de formation des maîtres où sont étudiées les procédures des élèves.

Une analyse a priori est absolument indispensable pour tout problème de concours et, plus généralement, pour toute situation problématique d'apprentissage en mathématiques. Elle permet de préciser les notions et connaissances visées, de prévoir les obstacles à surmonter, de régler les variables didactiques en fonction du niveau des élèves, de définir certaines règles du contrat, dont la production d'explications et justifications des solutions trouvées collectivement.

La richesse de l'analyse a posteriori dépend de la qualité du travail d'analyse préalable. Les deux sont étroitement liées et interdépendantes afin de faire évoluer les problèmes en adaptant leurs énoncés et présentations.

L'examen des travaux de groupes permet d'imaginer l'intensité des interactions entre élèves lors de la phase de résolution de problèmes. Dans le cas des concours, les correcteurs ne peuvent malheureusement pas aller au-delà des productions écrites qui en résultent. Les surveillants de l'épreuve en savent plus. Les maîtres peuvent reprendre et développer les travaux de groupes ou analyser plus en profondeur les représentations des élèves par des entretiens individuels.

Les analyses produites lors des concours mathématiques par classes participent à l'accumulation et à l'évolution des savoirs et connaissances sur les problèmes proposés. Elles sont caractéristiques de la didactique des mathématiques, conçue comme une discipline scientifique.

BIBLIOGRAPHIE :

ABRANTES, P. (dir.). *Les interactions dans la classe de mathématiques,* Actes de la 49e Rencontre de la CIEAEM, Setúbal 24-30 juillet 1997, (A paraître, 1998).

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.). *JEUX 4, de l'intérêt des problèmes de rallyes,* Publication de l'APMEP, n°. 97, Paris 1995.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.). *Fichier EVARISTE* Publication de l'APMEP, n°. 98, Paris 1995.

Cohen, G. et al. *Récrémaths, Les récréations mathématiques d'Evariste et Sophie,* POLE Ed. Paris 1995.

Comité International des Jeux mathématiques. *Panoramath 96,* Coédition CIJM. APMEP. ACL. Paris 1996.

Criton, M. et al. *50 énigmes mathématiques faciles.* (Annales des championnats de la FFJM) POLE Editions. Paris 1997.

Criton, M. et al. *50 énigmes mathématiques pour tous.* (Annales des championnats de la FFJM) POLE Editions. Paris 1997.

Grugnetti, L. (dir.), *L'évaluation centrée sur l'élève,* Actes de la 45e Rencontre de la CIEAEM, Cagliari 5-10 juillet 1993, CLAS Bergamo, 1994.

Grugnetti, L., Jaquet, F., Vighi, P., *Rallye mathématique à l'école primaire*, L'Educazione Matematica, (1e partie) n°. 3, 1995, pp. 113-123, (2e partie) n°. 1, 1996, pp. 1-12.

IREM d'Orléans, *Recueil analytique des exercices du Rallye mathématique du Centre, de 1986 à 1992.* IREM d'Orléans, N° 45, 1995.

Jaquet F., *2e Rallye mathématique romand*, Math-Ecole, n°. 162, 1994 pp. 17-21.

Jaquet F., *Dalla ricerca in didattica alla pratica in classe*, L'Educazione Matematica, n°. 2, 1993, pp. 48-66.

Jaquet F., *Entre addition et multiplication,* Math-Ecole, n°. 174, 1996, pp. 24-27.

Jaquet F., *5e Rallye mathématique transalpin,* Math-Ecole, n°. 176, 1996, pp. 20-28.