

TROIS DISQUES DANS UN RECTANGLE
VARIATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES
AUTOUR D'UN ÉNONCÉ

Michelle Kittel
 Lycée Couffignal à Strasbourg

Gérard Kuntz
 IREM de Strasbourg

et de nombreux autres collègues
 dont les suggestions et les critiques
 ont considérablement enrichi l'article initial.

Résumé L'article relate les évolutions d'un énoncé visant à préciser la notion de fonction à partir d'une situation géométrique en environnement CABRI. Soumis à une classe de Seconde, à des PLC2 (Professeurs de Lycée et Collège stagiaires 2ème année), à des formateurs en mathématiques et en informatique, aux comités de rédaction d'un colloque et de revues, il a subi à chaque étape enrichissement et approfondissement. C'est un bel exemple de travail collaboratif.

Le paysan qui défriche une nouvelle aire bute sur d'agaçantes zones empierrées qui courent au long du champ. L'archéologue y décèle une structure ancienne que la photo aérienne dessine dans sa globalité au soleil rasant. Le regard informé et le choix d'un environnement favorable comptent pour beaucoup dans la mise en évidence d'une situation potentiellement riche. Il en est de même dans l'enseignement des mathématiques.

Voici un exercice de Seconde. Il invite à étudier et à comparer des aires. Son intérêt dépend beaucoup des consignes données. Si on exclut l'outil informatique, il met surtout en évidence la grande difficulté d'une majorité d'élèves de Seconde à calculer des expressions algébriques, à prévoir leurs évolutions et à les comparer. Avec un grapheur, la difficulté du calcul initial demeure. Il reste à interpréter les courbes que trace le logiciel : comment comparer deux aires dans ce cadre ? Sous cet éclairage, le problème demeure relativement pauvre bien qu'il mette en œuvre une démarche qu'il est indispensable de maîtriser. C'est avec un logiciel de géométrie dynamique. (Cabri par exemple) qu'il livre sa véritable profondeur. Les changements de cadres et de registres se multiplient. L'information prend toutes sortes de visages. Sa concentration sur les

différentes zones de l'écran est impressionnante. Les liens entre les différentes natures d'information sont palpables. Beauté, densité et variété de l'activité mathématique s'imposent au plus blasé.

Ce problème a une histoire.

L'idée initiale se trouve dans la « situation 22 » du classeur du professeur (Belin, classe de Seconde). Michelle Kittel en a tiré un énoncé pour le soumettre aux élèves de l'option « Mathématiques en environnement informatique » du lycée Couffignal à Strasbourg. Elle a résumé les observations faites en cours d'activité (on les trouvera plus loin).

J'ai proposé le texte de Michelle Kittel (sauf la question 4) lors d'une journée de formation aux PLC2 de l'IUFM de Clermont Ferrand, puis, plus tard, aux formateurs de mathématiques (IREM et IUFM) de l'Académie de Créteil et aux participants d'un atelier du Colloque de l'Irem de Brest. Au travers de cette activité (et de quelques autres), il s'agissait de réfléchir aux « modifications induites par l'environnement informatique dans l'enseignement des mathématiques ». De mesurer l'impact de certaines images informatiques et d'en évaluer l'influence possible sur les élèves. De travailler les notions de variable didactique et de changements de cadres et de registres (ils sont légion).

Devant l'accueil très positif réservé à cette activité lors des journées de formation, j'ai rédigé une synthèse des réflexions, des débats et des suggestions recueillies au contact des collègues. J'y ai ajouté des développements personnels ainsi qu'une analyse de l'activité de départ (ouvrage de Belin). L'ensemble a été débattu avec Michelle Kittel.

L'article ainsi rédigé a été soumis à Repères-Irem, à Petit'x et au colloque Argentoratum organisé en juillet 2002 par l'Irem de Strasbourg. Les différents comités de rédaction m'ont proposé des modifications nombreuses et pour certaines, profondes, subtiles et de grande ampleur, que j'ai accueillies avec intérêt.

L'article que voici résume les enrichissements successifs¹ apportés par ces différents acteurs à une situation de départ sans relief apparent. Il est une belle illustration d'un thème cher à Edgar Morin, « l'écologie des idées² ». *Un texte rédigé par un auteur est lancé dans le public. Il passe au crible de la réflexion et de l'imaginaire des lecteurs, des débats qu'il suscite, des articles qu'il inspire. Le texte initial, né des lectures, de l'expérience et des rencontres de l'auteur, lui échappe et vit sa vie propre, qu'il aurait difficilement imaginée.*

¹ En raison des enrichissements apportés à la situation de départ, Michelle Kittel projette de proposer une nouvelle version du problème à des élèves de Première S. La boucle est bouclée !

² « L'entropie et l'écologie des idées » dans « Pour sortir du vingtième siècle », pages 153-156.

L'article s'inscrit aussi dans un courant fécond et novateur, le « travail collaboratif³ », issu de la puissance de communication des nouvelles technologies. On y souligne le fait que *l'intelligence est collective et distribuée entre les personnes et les environnements (symboliques, techniques et physiques, naturels et artificiels)*. Cet article en est un témoignage.

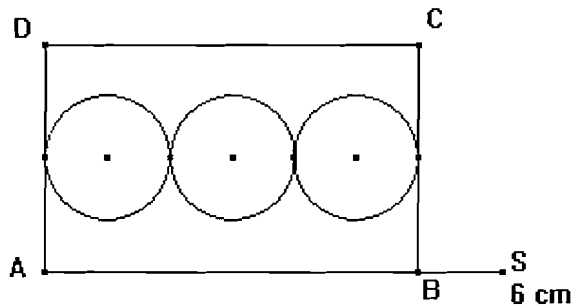
I. Analyse de l'activité initiale.

Voici le texte de la situation 22 du classeur du professeur (Belin, classe de Seconde).

ÉTUDE DE 3 DISQUES DANS UN RECTANGLE.

1. Définir une variable.

Ouvrir la figure FCT3DIS.FIG.



$$AB = x = 44,89 \text{ cm}$$

$$\text{Aire de } ABCD = 14,68 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire des 3 disques} = 6,27 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire restante} = 8,41 \text{ cm}^2$$

FIGURE DYNAMIQUE FCT3DIS.FIG (FOURNIE)

ABCD est un rectangle. Le point B appartient au segment [AS]. $AD = 3 \text{ cm}$.

On veut étudier les variations des aires des disques et de la partie coloriée du rectangle.

On choisit AB comme variable que l'on note x. On désigne par f la fonction qui à x fait correspondre l'aire des 3 disques et par g celle qui fait correspondre à x l'aire non coloriée du rectangle ABCD.

Déplacer B pour observer les éléments mobiles et les éléments fixes de la figure.

2. Représenter graphiquement les fonctions associées aux aires.

Sur quels intervalles les fonctions f et g sont-elles définies ?

Construire les points $F(x, f(x))$ et $G(x, g(x))$ (utiliser l'outil « report de mesure »).

Représenter graphiquement les deux fonctions f et g (utiliser l'outil « lieu »).

3. Comparer graphiquement les aires.

Pour quelles valeurs de x les trois disques occupent-ils plus de la moitié du rectangle ? (déplacer le point B et lire les valeurs recherchées sur le graphique)

³ Voir « Travail collaboratif en mathématiques au L.A.M.I.A. », Eliane Cousquer, Bulletin de l'APMEP n° 441.

4. Résoudre algébriquement le problème.

Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x .

Résoudre, par le calcul, l'inéquation correspondant à la partie 3.

Comparer les valeurs avec les valeurs approchées obtenues à la partie 3.

L'objectif de l'activité proposée semble être l'étude de fonctions d'origine géométrique en vue de comparer deux aires. Fonctions et calcul algébrique sont au cœur du problème.

L'activité est très encadrée. La figure électronique est fournie, ainsi que l'affichage des aires concernées. Variable et fonctions sont désignées. Les questions sont précises et les aides, entre parenthèses, impératives.

Cela permet de *gagner du temps* et de *se concentrer sur les objectifs précisément visés*. Résultat non négligeable en ces périodes de réductions d'horaires. En revanche, l'initiative et l'activité de recherche des élèves, précieuses pour leur formation scientifique, sont plus que réduites.

Le choix de la variable et des fonctions se fait dans le contexte électronique. *C'est particulièrement désastreux*. Le point variable B évolue de pixel en pixel, de A en S . Il occupe *un nombre fini de positions possibles*. Il en est de même des aires affichées, qui prennent, de façon *discrète*, un nombre *fini* de valeurs ! On a tout, sauf des fonctions réelles définies dans $[0,6]$.

Il faut impérativement donner l'énoncé *hors contexte électronique*. Demander aux élèves de *démontrer* que l'aire des trois disques et l'aire restante sont bien des *fonctions à valeurs réelles du réel AB* : « dépendre de » n'est pas synonyme d' « être fonction de ». Nous en donnerons un beau contre-exemple au cours de l'article.

Quand cet aspect *théorique* est compris et précisé, la figure électronique peut être proposée. A condition qu'on ait bien clarifié dans une activité antérieure les différences considérables entre un rectangle du plan mathématique et l'écran graphique. Avec les conséquences « concrètes » considérables que l'on sait⁴. Entre deux pixels contigus de l'écran, il n'y a rien ; entre deux points distincts du plan mathématique, aussi voisins soient-ils, il y a une infinité de points...

Pourquoi proposer une question géométrique (*Déplacer B pour observer les éléments mobiles et les éléments fixes de la figure*) dans un problème tourné si nettement vers les fonctions et l'algèbre ? Je crains que les auteurs ne suggèrent aux élèves de constater que les aires « *dépendent de AB* ». Ce qui est évident, mais qui ne prouve pas que la dépendance soit fonctionnelle.

Pourquoi afficher l'aire du rectangle ? Elle ne sert à aucun moment. Et pourquoi ne pas se servir, dans un premier temps, *de l'affichage des deux aires intéressantes dans le problème ?*

En déplaçant lentement B de A à S , on peut sans grande difficulté les comparer, proposer une valeur approchée de AB pour laquelle elles semblent « très proches », valeur pour laquelle l'une d'elle (qui était inférieure) devient supérieure à l'autre. L'affichage de la différence des deux aires aurait beaucoup facilité l'observation et

⁴ Voir « L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a », pages 8 à 20, dans Repères-Irem n° 11.

préparé la question théorique de la fin du problème. *Les informations déjà disponibles à l'écran sont mal utilisées.*

Si la fourniture de la figure est liée à une volonté de gagner du temps et de ne pas utiliser de notions étrangères aux buts poursuivis, on peut s'interroger sur l'utilité de la construction des courbes par les élèves. Pourquoi ne pas les fournir, elles aussi ? Certes les reports de longueur sur les axes ont partie liée avec les représentations graphiques, mais le délicat outil « lieu de points » ressemble beaucoup, en Seconde, à une boîte noire un peu magique. Il aurait été plus pédagogique d'utiliser la « trace », où l'utilisateur construit la courbe « grain par grain ».

La question de l'ensemble de définition de f et g est particulièrement ambiguë et délicate. Je suppose que la réponse attendue est $[0,6]$, la figure électronique limitant les déplacements de B à $[AS]$. Mais alors, pourquoi cette valeur 6 qui n'a aucune vertu géométrique ? 9 aurait été plus judicieux dans cette perspective.

Et que dire à un élève qui prolongerait *mentalement* la situation et qui parlerait des réels positifs ? Le blocage de B sur $[AS]$ constitue une interdiction, pas une impossibilité géométrique...

La *présence simultanée* à l'écran de la figure, des aires et des courbes est très intéressante. On pourrait compléter le cadre numérique en affichant (Cabri le permet) un tableau de valeurs de AB et des deux aires. Les élèves auraient alors sous les yeux le problème dans le cadre géométrique, numérique (réel et tableau) et graphique. L'évolution de B entraîne celles des aires (mais le tableau est figé) et des points sur les courbes. Belle gymnastique de changements de cadres et de registres pour des élèves de Seconde. Dommage que l'on n'utilise pas la différence ou le rapport des aires dans cette étude. Ils permettent un utile changement de regard : alors que le point d'intersection a un rôle essentiel dans les premières courbes, c'est l'intersection avec (Ox) et avec la droite d'équation $(y=1)$ qui deviennent significatives pour ces nouvelles courbes. Intéressant casse-tête pour les élèves.

Il faudrait aussi que l'enseignant utilisateur de l'activité signale aux élèves le changement de cadre en passant à la question 4 : jusque là, Cabri prenait en charge le calcul des longueurs et des aires (commandes : aire d'un polygone, d'un « cercle » et calculatrice). Ici, il faut calculer *explicitement* $f(x)$ et $g(x)$: nous sommes passés dans le cadre algébrique. Mais ce qui précède donne un exemple de *fonction non définie par une formule algébrique explicite* (pour beaucoup d'élèves fonction et formule sont indissociables). Il ne faut pas manquer l'occasion de le faire remarquer.

Une dernière question, un peu amusée : pourquoi proposer (situation 21 du même ouvrage) *le même problème avec... deux disques et le même énoncé, au mot près ?* Seule différence, dans la figure dynamique fournie : la longueur AS n'est pas indiquée ! (elle est de l'ordre de 5 cm). On en trouve une valeur approchée en plaçant B en S et en lisant la valeur affichée de AB . Cette variante (insignifiante...) mérite-t-elle un second énoncé ou s'agit-il de faire du « volume » ? Pourquoi alors ne pas écrire des variantes⁵ avec 1, 2, 3, 4..., n disques ?

⁵ Nous verrons plus loin que la variante avec un seul disque contient toutes les autres.

II. Une première évolution significative de l'énoncé.

En découvrant l'activité de Belin, Michelle Kittel y reconnut un thème à fort potentiel, peu et mal exploité. Elle en fit un problème ouvert qu'elle proposa à ses élèves de Seconde, en option « Mathématiques en environnement informatique ». La classe était formée de volontaires travaillant en demi-groupes, à raison de deux heures par quinzaine *en plus de l'horaire obligatoire*, sur des thèmes mathématiques avec différents logiciels (Cabri, Derive, Geoplan etc.). La même option est également proposée à une classe de Première S et à une autre de Terminale S du même lycée.

La création de cette option au lycée Couffignal répond à de nombreux objectifs : mettre en œuvre des outils mathématiques et informatiques variés dans des situations-problèmes balisées au minimum ; stimuler l'initiative et l'activité de recherche des élèves ; favoriser le travail en équipes et le débat scientifique ; apprendre aux élèves à gérer la durée (le problème présenté ici a été traité en 4 séances étalées sur deux mois), à utiliser l'outil informatique pour éclairer et résoudre des problèmes; les conduire à rédiger leurs observations, leurs conjectures et leurs démonstrations.

Une remarque et une conviction sont à l'origine de cette option :

1°) Dans la vie professionnelle⁶, on est rarement (pratiquement jamais) face à des problèmes bien définis, auxquels on pourrait appliquer des méthodes mathématiques clairement répertoriées pour les résoudre. La plupart du temps, la tâche à réaliser se présente de façon vague et informelle, comme situation-problème.

2°) On gagne en compréhension et en autonomie en affrontant les questions profondes et difficiles contenues dans les mathématiques enseignées. La perte d'efficacité initiale par rapport à un enseignement classique est ensuite compensée par une compréhension en profondeur des notions, qui fait peu à peu d'un élève un scientifique.

Les perspectives, le temps disponible et les objectifs étant très différents, on ne peut pas sérieusement comparer le travail proposé aux élèves au cours de l'activité de Belin et celle qui va suivre. Mais on peut s'interroger sur un programme d'enseignement qui renonce à ce type d'activités, coûteuses en temps, mais essentielles pour la formation personnelle, sociale et professionnelle des élèves⁷.

Voici le texte proposé aux élèves du Lycée Couffignal.

TROIS DISQUES DANS UN RECTANGLE.

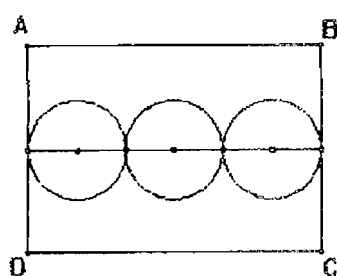
1) Quel est le problème posé ?

ABCD est un rectangle ayant un côté fixe $AD=3$ cm et un côté variable $AB=x$ cm.

On veut placer trois disques isométriques à l'intérieur de ce rectangle comme sur les deux dessins ci-dessous :

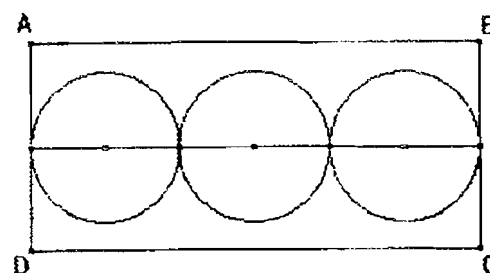
⁶ Dans un lycée technique, cette préoccupation est beaucoup plus présente que dans la plupart des lycées d'enseignement général.

⁷ L'option « sciences », défendue avec talent par Jean-Pierre Richeton et par l'APMEP, s'inscrit dans les mêmes préoccupations.



$$AD = 3,00 \text{ cm}$$

$$AB = x1$$



$$AD = 3,00 \text{ cm}$$

$$AB = x2$$

Le but est d'étudier et de comparer l'aire des 3 disques et l'aire restante du rectangle lorsque le côté AB varie.

2) Expliquez ce qu'on peut trouver à l'aide de Cabri.

3) Etudiez ce qu'on peut trouver à l'aide de Graph'x.

REMARQUE.

C'est VOUS qui posez les questions et qui donnez les réponses pour arriver au but !!

4) Et si les disques n'étaient plus centrés sur la médiatrice de $[AB]$?

III. Un énoncé métamorphosé.

Le texte est bref. Il n'est pas découpé en questions et sous-questions. Il décrit la situation à l'aide de figures, sans préciser ce qui est évident visuellement. Aucune indication de méthode. Les résultats ne sont pas suggérés. Cette forme d'énoncé est possible car l'outil informatique intelligemment mis en œuvre, fait naître dans l'esprit des élèves des images mentales, des interrogations et des conjectures qui remplacent avantagusement le guidage tatillon des énoncés classiques.

Personne (parmi ceux qui ont travaillé sur les trois premières questions) n'a émis le moindre doute à propos des *non dits* de l'énoncé. Les deux figures suffisent pour se convaincre que les cercles sont centrés sur la médiatrice de $[AB]$, et pour prendre en compte les tangences observées. La persistance de ces propriétés dans les deux figures n'est pas étrangère à la conviction qui en résulte. En proposant une double figure, Michelle Kittel a traduit sur papier la dynamique de la figure informatique.

L'environnement informatique rend possible de profondes modifications des énoncés, et pas uniquement en géométrie. Dans le n° 45 de Repères-Irem, J-A Roddier réécrit en une ou deux phrases, des énoncés récents d'arithmétique du baccalauréat⁸. L'usage d'Excel ramène les textes à leur plus simple expression. Tous les résultats (et certains autres...) que les anciens énoncés détaillaient, sont visibles à l'écran ! Il reste à les interpréter, puis à les démontrer. De plus, les démonstrations issues de l'observation de la feuille de calcul sont bien plus « naturelles » que celles proposées au baccalauréat (la plupart des élèves n'y auraient pas pensé).

⁸ Conjectures en arithmétique.

Le « problème ouvert », dont les vertus ont été maintes fois soulignées, peut assez facilement émerger dans l'environnement informatique⁹.

IV. Regard critique sur le déroulement de l'activité en seconde.

Voici les conditions de l'expérimentation et les principales observations de Michelle Kittel.

« Les élèves ont travaillé par deux et l'information a circulé de groupe en groupe : il n'est pas interdit de discuter du problème avec d'autres; seul le compte rendu final est propre au binôme. Je *m'oblige* à des interventions très ponctuelles, uniquement en cas de blocage : il est toujours difficile de ne pas donner à l'élève une réponse qui oriente ou même qui « tue » l'activité...

Le temps total consacré à ce problème a été de sept heures trente : 6 heures pour la recherche (avec prise de notes en cours d'activité), une heure trente pour le compte rendu. Soit environ 4 séances de 2 heures espacées de quinze jours¹⁰.

Avec cette classe et à la période de l'année où l'activité s'est déroulée, je n'avais pas abordé le calcul formel avec DERIVE. L'utilisation de ce logiciel aurait apporté un volet de plus au problème, mais même avec une « bonne » classe de Seconde, l'absence actuelle de familiarité avec le calcul algébrique élémentaire empêche d'utiliser ce type de logiciel de manière intéressante et utile (sauf peut-être en fin d'année).

Face à des disques qui « sortent du rectangle », les élèves ont sans difficulté trouvé la contrainte qu'il fallait imposer à la figure ($AB \leq 9$). La redéfinition du point « sur un segment » de longueur donnée n'a posé aucun problème : la maîtrise de CABRI était acquise *grâce à des travaux antérieurs* (sans cela, la difficulté du problème, ajoutée à la non-maîtrise du logiciel, auraient conduit à l'échec).

C'est seulement avec le logiciel GRAPH'X qu'ils ont pensé à faire la différence des aires et qu'ils ont tracé les trois courbes (les deux aires et leur différence). Le cadre algébrique n'est pas étranger à cette initiative : face à des expressions algébriques *explicites*¹¹ et à des inéquations, ils ont retrouvé des attitudes qui ont montré antérieurement leur efficacité *dans ce cadre*. J'étais contente de les voir transformer le problème de la comparaison de deux expressions algébriques en l'étude de la position relative de deux courbes, puis en celle de la position d'une courbe par rapport à Ox : le transfert de connaissances avait opéré.

Les compte rendus ont été parfois décevants si on les compare à l'activité déployée face aux machines (les fichiers électroniques recueillis étaient excellents). *Tout se passe comme si, dès qu'une étape est franchie, (« comprise » disent les élèves), elle*

⁹ Il y faut de nombreuses conditions. L'énoncé de Belin montre que la présence d'une séquence informatique est loin d'y suffire !

¹⁰ L'espacement des séances (sur 2 mois) oblige les élèves à gérer la durée, ce qui est une compétence importante.

¹¹ Avec Cabri, l'absence de ces expressions algébriques explicites a empêché l'idée d'émerger.

perd de son intérêt et on peut en oublier le cheminement. Sur les quinze comptes rendus d'activité, deux étaient excellents, sept corrects, six franchement insuffisants.

Ces élèves ont évidemment *fait des mathématiques*, mais ils ont de la peine à *dire ces mathématiques* (ou n'en voient pas l'intérêt).

C'est à la fois la force et la faiblesse de l'environnement informatique, de conduire à une activité mathématique intense, mais peu explicite. Sur papier, pour faire des mathématiques il faut les *dire*, car on ne sait pas bien les *montrer* ! ».

L'ouverture de l'énoncé est sans doute responsable, pour une large part, de la médiocrité de certains comptes rendus, les élèves n'ayant pas (c'est un choix délibéré) une liste précise de questions auxquelles répondre, ni de canevas pour la description de leur activité et de leurs trouvailles éventuelles. Beaucoup éprouvent de la difficulté à *noter* leurs questions mathématiques et les réponses apportées en cours d'activité¹², *comme cela leur est recommandé verbalement à chaque séance.*

Peut-être faudra-t-il expérimenter une aide de la part de l'enseignant sous la forme suivante :

« Notez toutes les questions (d'ordre mathématique) que vous vous posez et les réponses obtenues de façon à ce *qu'à la fin de la séance de travail* vous soyez en mesure

1. De répondre aux questions que je vous poserai.
2. De poser des questions (défis) à vos camarades. »

Anticiper les questions du professeur et « coincer » les copains peut être motivant, mais l'objet de la formulation est surtout de faire prendre conscience aux élèves des connaissances qui peuvent être établies et qu'ils ont établies pendant leur activité. Formuler ces connaissances *modifie le rapport entretenu avec elles* pendant les phases d'action. C'est donc un enjeu capital.

Le professeur a sans doute intérêt à préparer à l'avance les questions qu'il juge intéressantes (celles-ci pourraient faire l'objet d'une interrogation écrite rapide susceptible d'évaluer le travail des élèves). Il se peut que les élèves puissent répondre, grâce à leur activité, à des questions auxquelles ils n'ont pas pensé (par exemple : « Est-ce que, lorsque $A3D=AR$, AR est maximale ? ») ; dans le cas contraire, ces questions peuvent relancer l'activité...

Mais aller plus loin dans l'encadrement de l'activité reviendrait à abandonner l'éducation à l'autonomie. Renoncer aux problèmes ouverts à cause de certains mauvais résultats initiaux serait sacrifier *la formation à long terme* des élèves. On observe d'ailleurs, si l'on insiste dans l'exigence, des progrès sensibles des élèves en cours d'année. Ceux qui ont suivi cette formation durant trois ans manifestent en fin de lycée

¹² Le travail à l'écran semble occuper tout le champ de l'activité intellectuelle des élèves. Cette rigidité est un obstacle important à la performance intellectuelle : s'arracher à la fascination de l'écran pour écrire ou calculer, chercher de la documentation, élaborer des stratégies au tableau est une compétence importante à acquérir au fil du temps. C'est un vrai combat, qui se heurte à une forte résistance d'une majorité d'élèves.

des qualités d'initiative, de collaboration, *de capacité de mobilisation des connaissances mathématiques* qui font rêver.

V. Constructions de la figure avec cabri et affichage des valeurs numériques associées.

A y regarder de près, l'énoncé contient *deux messages que l'on peut ressentir comme contradictoires*. L'affirmation de l'initiative de l'élève (pour poser les questions et y répondre) se heurte à un encadrement dont la discrétion cache mal le caractère contraignant. Les logiciels (et l'ordre d'usage) sont imposés. La figure est décrite de façon ordonnée : d'abord le rectangle, ensuite les disques placés à l'intérieur. La variable choisie est soulignée de façon insistante (à trois 3 reprises).

Sous sa forme actuelle, le texte du problème induit naturellement une construction qui en suit la chronologie. C'est ainsi que l'ont interprété unanimement les PLC2¹³ de Clermont. Plus sensible au message de liberté proclamé par le texte, l'un des formateurs de Créteil a pris l'initiative d'une construction à partir du cercle central et de deux points diamétralement opposés. Le rayon du cercle est alors devenu la variable du problème. Le rectangle a été construit dans un second temps. A-t-il trahi l'intention initiale ou en a-t-il gommé la contradiction ? Le débat fut long et passionné, sans véritable accord final. L'importance de la forme de l'énoncé proposé a été soulignée : c'est une variable didactique, tout comme le logiciel. Nous examinerons ces variables dans la suite de l'article.

La construction la plus fréquemment mise en œuvre consiste à mettre en place le segment [AD] et sa médiatrice, puis un *point variable I* de cette médiatrice (point sur un objet). Les outils de CABRI permettent alors le tracé du rectangle dynamique ABCD sans aucune difficulté. Il faut ensuite partager [OI] en 3 (ou 6) parties égales (O est le milieu de [AB]). Le tracé par O d'une droite auxiliaire (d) pour créer une situation de Thalès s'impose rapidement. Mais le report de segments isométriques à partir de O pose des problèmes inattendus. Plusieurs binômes de PLC2 se croient obligés de reporter des segments de longueur 1 centimètre. L'idée qu'une symétrie produise des segments isométriques *à partir d'un segment quelconque* ne semble pas aller de soi. La possibilité de tracer un cercle de centre désigné passant par un point désigné achève la construction de la figure. Le déplacement de I sur (d) déforme la figure en maintenant les dépendances et les propriétés (cercles isométriques tangents et tangents à 2 côtés du rectangle). La perte de ces propriétés quand I varie met en évidence des erreurs de construction : la sanction du logiciel est impitoyable !

Une autre construction évite le recours à la situation de Thalès. Elle consiste à placer un point E sur la médiatrice de [AD]. E est le centre du premier cercle (il passe par O). Une suite de symétries centrales met en place les points utiles, y compris le point I précédent. On peut alors compléter le rectangle et tracer les cercles. Mais il n'est plus possible de déplacer I avec la souris : c'est E qui est devenu le pivot de cette figure dynamique. Cette deuxième construction est plus rapide. Elle semble moins naturelle

¹³ Est-ce le reflet de l'enseignement qu'ils ont reçu au fil de leurs études universitaires ? Une formation qui privilégie la docilité ?

dans le contexte proposé : elle s'écarte en effet de la chronologie implicite du texte de l'exercice (l'ordre de construction des cercles et du rectangle est indifférent). *Très peu d'utilisateurs y ont pensé.* Elle présente *un inconvénient technique important* : la figure est bien plus sensible aux déplacements de E qu'à celles de I (I subit un déplacement six fois plus important que E). La première construction permet une observation beaucoup plus fine des variations des différentes valeurs numériques en jeu dans le problème. La mise en évidence de valeurs particulières (maximum, zéro, un) en est grandement facilitée. Il faut arbitrer entre la simplicité de la construction et celle de son utilisation.

Pour utiliser au mieux les évaluations d'aires disponibles sur Cabri¹⁴, il faut redéfinir ABCD comme « polygone ». On obtient sans calcul *l'affichage dynamique* des longueurs AB et AD ainsi que celui des aires du rectangle ABCD et d'un des disques de la figure. La calculatrice de Cabri permet l'évaluation dynamique et l'affichage de l'aire des 3 disques (A3D) et de l'aire restante (AR), différence entre l'aire du rectangle et celle des 3 disques.

Il reste alors à l'écran la figure dynamique débarrassée des constructions auxiliaires et des valeurs numériques devenues inutiles (elles ont été *cachées*), et les 3 valeurs numériques AB, A3D, AR (Figure 1). *La somme d'initiatives, de connaissances et d'outils mathématiques mis en œuvre pour arriver à ce stade, est considérable et le traitement d'informations intense.* On ne s'est vraiment pas contenté de « faire joujou » avec l'ordinateur ! La figure 1, traitement d'informations en acte, présente les constructions et les affichages réalisés (à droite) et la figure finale, ramenée à l'essentiel (à gauche). Il lui manque simplement de faire défiler les valeurs numériques quand le lecteur déplace le pivot I de la figure !

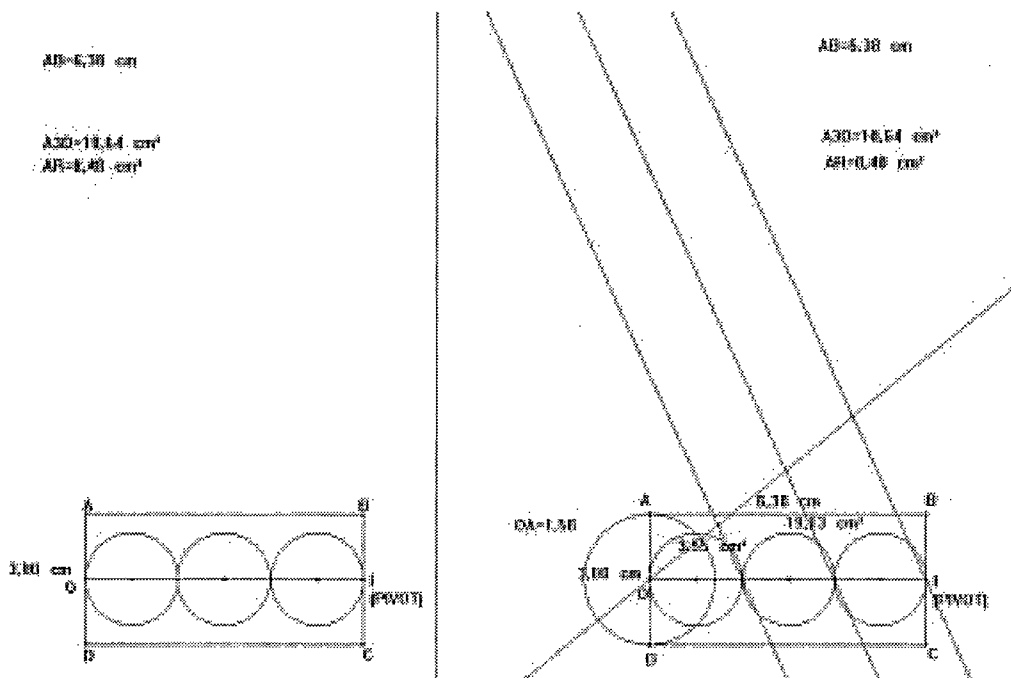


FIGURE 1

L'activité de l'apprenant ne se résume pas à choisir et à mettre en œuvre un contenu mathématique (application de Thalès au partage d'un segment en n segments isométriques ou duplication d'un segment par symétrie).

¹⁴ Cabri évalue l'aire d'un disque et d'un polygone désignés .

Le passage par le logiciel Cabri oblige à comprendre *la logique d'une figure électronique (donc de la figure mathématique)*, la dépendance de certains éléments par rapport à d'autres. Confondre la commande « cacher » le nombre 3 avec « supprimer » ce nombre (il a servi à construire [AB]) a été instructif pour plusieurs élèves (le rectangle s'évanouit dans le second cas). Des figures apparemment correctes n'ont pas résisté au déplacement de I...

La connaissance des commandes de Cabri est-elle une compétence mathématique ? Non sans doute. Mais elle pousse à traiter le problème sous un certain angle. *Cabri n'est nullement indispensable pour le résoudre (aucun logiciel n'est nécessaire pour cela)*. Mais son usage conduit l'utilisateur à activer des connaissances mathématiques (pour construire la figure et afficher des aires) : *l'outil non indispensable rend indispensable la mise en œuvre de mathématiques* pour représenter les données et clarifier le problème. *C'est une stratégie gagnante avec de nombreux élèves bien plus passionnés par l'informatique que par les mathématiques...*

Autre compétence non mathématique extrêmement importante au cours (et au-delà) des études : trier, dans des informations foisonnantes, celles qui sont réellement pertinentes dans un contexte donné. Elle ne paraît pas très répandue, y compris parmi les enseignants. La commande « cacher/montrer » permet de transformer un écran désordonné et redondant en écran dépouillé et clairement lisible.

On le voit, ce n'est pas l'ouverture du problème qui est, *à elle seule*, féconde. La seule ouverture peut conduire à une solution de quelques lignes sur le papier, avec une vague figure à main levée ! C'est le couple ouverture/logiciel qui enrichit (complique ?) considérablement la situation : il faut connaître simultanément les possibilités du logiciel *et* des mathématiques. Il faut surtout articuler les connaissances mathématiques et les forces principales du logiciel pour choisir une stratégie performante. De telles compétences méta-mathématiques sont fortement valorisées dans l'univers professionnel.

V.1 Variables et fonctions.

Quand on pointe vers une des 3 zones de l'écran où sont affichés AB, A3D et AR, la même légende apparaît dans les 3 cas : « ce nombre ». Cabri masque ainsi (comment pourrait-il en être autrement ?) une dissymétrie essentielle entre AB d'une part, A3D et AR d'autre part.

AB est certes un nombre, mais un nombre *variable*, c'est-à-dire une *variable*. Quand on l'introduit dans la calculatrice, il apparaît soudain avec la dénomination habituelle (une lettre) d'une variable : a, b et c. *Tout ceci, évident pour les PLC2 ou les formateurs, doit être soigneusement clarifié avec des élèves de Seconde.*

A3D et AR *dépendent* de AB. Cela ne suffit pas pour qu'elles soient *des fonctions de AB*. A chaque valeur de AB (prise dans $[0,9]$) correspond une figure unique, donc des aires uniques : voilà ce qui leur confère ce statut (le raisonnement se substitue ici au logiciel, bien incapable de passer en revue tous les réels entre 0 et 9 !).

Pour marquer la différence entre variable et fonction, il serait judicieux de lier l'affichage de AB à la figure et de situer A3D et AR dans une autre zone de l'écran. Ou de séparer leurs zones d'affichage comme sur la figure 1. On pourrait même écrire : A3D(AB) et AR(AB).

Les deux fonctions mises en évidence sont particulièrement intéressantes pour des élèves de Seconde : elles existent *indépendamment de toute formule de calcul*. Cela remet en cause le lien (oh! combien solide et pernicieux dans l'esprit de trop nombreux élèves de lycée) *entre fonction et expression algébrique*¹⁵. Cabri permet le passage d'un nombre à son image par chacune des deux fonctions sans qu'il soit nécessaire à l'utilisateur *d'exprimer A3D et AR en fonction de AB*¹⁶.

Une de mes surprises, en formation, a été de constater qu'une proportion importante d'enseignants se chargeait de calculer les quantités numériques que Cabri offre à l'utilisateur. Est-ce la méconnaissance des possibilités du logiciel ou l'habitude de privilégier le calcul algébrique ? Je ne sais. Cette question mériterait d'être clarifiée.

On peut aussi considérer A3D et AR comme des fonctions *du point B*, décrivant le segment [OL], de longueur 9 cm, porté par la médiatrice. C'est un pas utile vers les transformations ponctuelles, fonctions de *variable ponctuelle à valeur ponctuelle*. Puis vers les fonctions d'un ensemble quelconque vers un ensemble quelconque¹⁷.

Une dernière remarque à propos de l'élaboration de la figure et des valeurs numériques associées : l'énoncé indique que les 3 disques sont *INTERIEURS* au rectangle. Or, telle qu'elle a été réalisée, la figure dynamique n'interdit pas aux disques d'en sortir, ni à A3D et AR d'exister. Fallait-il la verrouiller ? Il aurait suffi pour cela de déclarer I comme « point sur segment [OL] ». Mais personne, dans les différents groupes où l'activité fut proposée, n'y a pensé *au départ*. Preuve que l'environnement informatique favorise, même chez des sujets expérimentés, *l'action immédiate au détriment d'une réflexion prospective*.

Dans la suite de l'article, nous ferons les figures en obligeant I à rester dans son intervalle de définition¹⁸.

VI. Interpréter l'évolution des valeurs numériques affichées.

Le travail réalisé jusqu'ici permet d'aborder la question centrale du problème : *étudier et comparer* deux aires. Deux cadres sont mis en évidence à l'écran : le cadre géométrique et le cadre numérique. Ils sont liés. L'œil passe de l'un à l'autre ou les fixe simultanément selon les besoins.

Point n'est besoin d'informatique pour l'étude de A3D : l'aire d'un disque croît avec son rayon (on peut inclure le petit disque dans le grand). Mais A3D est indispensable quand viendra le moment de *comparer* les aires.

L'évolution de AR ne relève pas de l'évidence. Partant de zéro, elle commence par croître jusqu'à la valeur 8.59, s'y maintient pendant que AB est compris entre 5.56 et... 5.90, puis décroît jusqu'à la valeur 5.80 quand I varie de O à P. Il est intéressant de noter la quasi-« stationnarité » de AR au voisinage d'un maximum. La pseudo-

¹⁵ Voir « Courbes et fonctions au Collège » in Petit x n°51, G. Chauvat.

¹⁶ L'expression algébrique existe bien entendu. On sera obligé de la calculer pour l'introduire dans le grapheur.

¹⁷ On les rencontre très naturellement en programmant dans un langage structuré, Pascal ou C par exemple.

¹⁸ Sauf pour le paragraphe « une question de frontières ».

« stationnarité » constatée est liée au fait qu'un écran graphique est fait de gros grains, les pixels... Voilà d'excellentes observations (avec les questions associées) pour les élèves.

Jusqu'ici, le cadre numérique était suffisant pour *étudier* la fonction non prévisible. Mais il oblige à de pénibles contorsions visuelles lorsqu'il s'agit de *comparer* A3D et AR. Il faut repérer le (ou les) moment où deux zones d'écran variables affichent le même nombre, puis échanger leur primauté... Problème totalement déconnecté du précédent (l'évolution de chaque quantité). Et pourtant, la bascule a lieu entre 5.72 et 5.74, donc en pleine zone de pseudo-stagnation de AR ! Impossible de gagner en précision (pixel oblige). Avant la bascule, AR est supérieur à A3D, après, c'est l'inverse.

On peut utiliser l'outil TABLEAU (changement de registre dans le cadre numérique) pour échapper à la difficulté d'une observation simultanée. Mais aucun gain de précision n'est possible : le passage d'un pixel au suivant près de l'inversion de tendance représente un saut important pour AB : entre deux pixels contigus, il n'y a ...rien¹⁹ !

Le cadre graphique permet un intéressant changement de regard. Il suffit de *reporter* AB sur l'axe horizontal, A3D et AR sur l'axe vertical, puis de construire les points P et Q de coordonnées (AB, A3D) et (AB, AR). Le lieu²⁰ de P et celui de Q (quand I varie) est tracé par CABRI à la demande ! On obtient l'écran suivant (Figure 2).

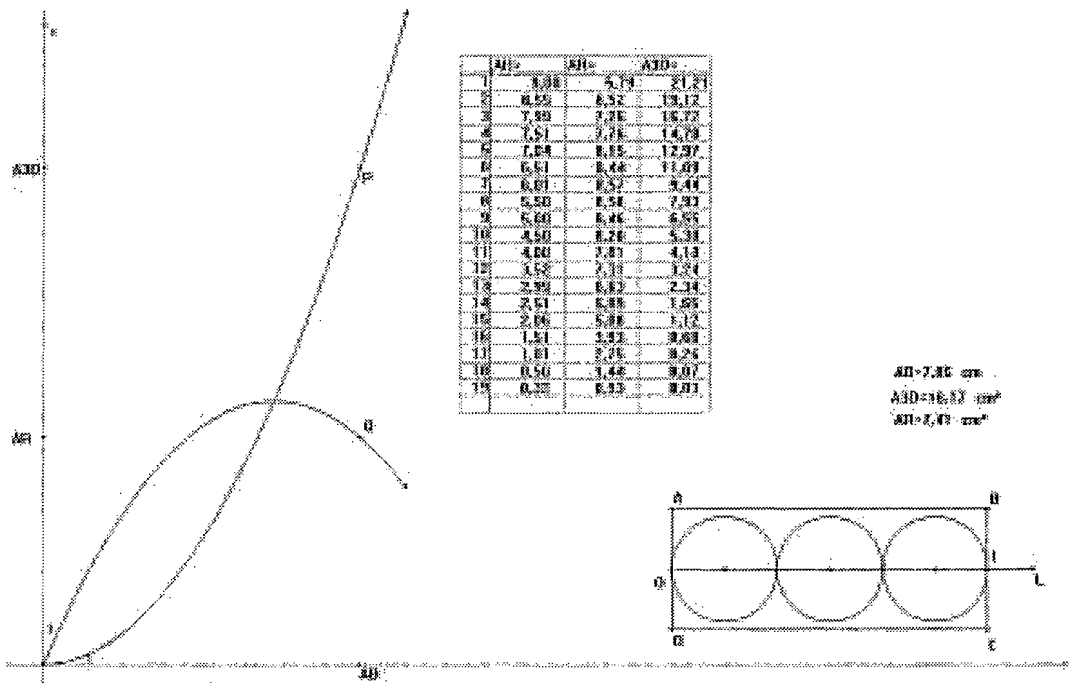


FIGURE 2

CABRI donne alors sa pleine mesure : quand on déplace I, AB, A3D et AR varient comme précédemment, mais de plus, P et Q se déplacent corrélativement sur les courbes représentatives des 2 fonctions (les lieux de P et Q) ! On voit que les 2 courbes se

¹⁹ Alors qu'entre deux points distincts, il y en a une infinité d'autres...

²⁰ Ce très commode outil de CABRI nécessite de sérieuses explications auprès des élèves utilisateurs. Il a sur l'outil TRACE un gros avantage : Le lieu est un *OBJET CABRI* et à ce titre, il est recalculé de façon dynamique au fil des évolutions de la figure. Cette propriété est très utile pour la suite de l'article.

coupent en un point unique (les 2 aires sont alors égales). La position relative des 2 courbes avant et après l'intersection permet de *comparer* (avec un grand confort visuel) les 2 aires (Q au-dessus de P équivaut à $AR > A3D$).

Il convient de prendre la mesure de la *densité d'informations* sur l'écran précédent. Toutes ces informations sont *liées les unes aux autres* et *varient simultanément avec I* (le tableau seul est inerte).

Les comprendre, les interpréter en fonction du problème est une expertise capitale. Les élèves qui s'y attachent ne perdent vraiment pas leur temps²¹.

Il ne leur reste plus qu'à *résumer leurs observations* (c'est le difficile compte-rendu d'activité) et à en tenter une démonstration. A moins que des variantes intéressantes des démarches précédentes ne relancent la réflexion.

VI.1 Une idée si simple...

Ce qui rend la comparaison des aires délicate, c'est la forme complexe des parties de plan correspondant à A3D et AR. L'idée la plus simple pour les rendre plus facilement comparables est de les transformer toutes deux en rectangles de même largeur (3 cm) et d'aires respectives A3D et AR.

Cette idée est si simple qu'elle n'est venue à *aucun des élèves ni à aucun des collègues* qui ont travaillé sur ce problème ! Elle n'a été proposée que par les re-lecteurs de Petit'x et de Repères-Irem. On peut sans doute attribuer cette étonnante absence d'imagination à la faible part de la géométrie (et de l'éducation du regard) dans la formation mathématique des enseignants au cours des vingt dernières années. La traduction graphique *spontanée* du problème par la quasi-totalité des acteurs en témoigne.

Cette belle idée se heurte théoriquement à l'impossibilité de la quadrature du cercle, mais ici, il suffit de calculer une longueur x en résolvant l'équation $3x = 3\pi(a/6)^2$, soit $x = \pi a^2 / 36$. C'est l'occasion de distinguer *l'impossibilité de construire ce rectangle à la règle et au compas* à cause de la transcendance de π (Lindemann, 1882) et son existence en géométrie analytique où *on admet la possibilité de placer un point d'abscisse réelle quelconque* même transcendante (bien sûr l'ordinateur ajoute à la confusion avec ses calculs arrondis et ses pixels !).

La figure 3 est très parlante.

Le rectangle gris a comme aire A3D. L'aire du rectangle blanc est AR. AR est *proportionnelle à la longueur* affichée du rectangle blanc (ici 2.50 cm). Pour comparer A3D et AR, nous avons construit la médiatrice de [AB].

²¹ Beaucoup ont tendance, en début de Seconde, à considérer leur tâche achevée quand ils ont obtenu la figure dynamique 2 ! Les convaincre que l'essentiel reste à faire est une rude affaire...

$$AB = 7.78 \text{ cm}$$

$$A_{3D} = 15.64 \text{ cm}^2$$

$$AR = 7.58 \text{ cm}^2$$

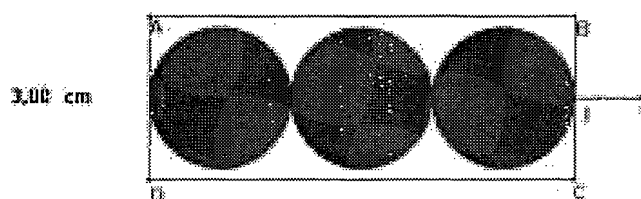
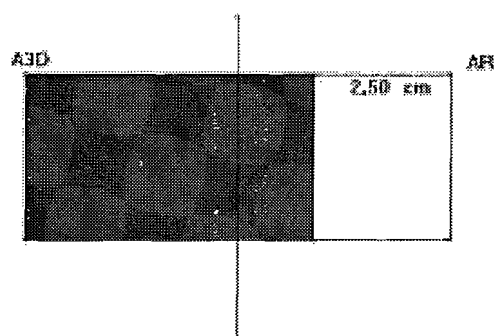


FIGURE 3

Si on fait varier lentement et répétitivement AB de 0 à 9, AR commence par croître (à partir de 0) en restant inférieur à A_{3D} (La partie blanche est prépondérante). Juste avant que les deux aires ne deviennent égales, la longueur affichée *se stabilise* à 2.86 et conserve cette valeur pendant que I se déplace sur de nombreux pixels, et que A_{3D} devient plus importante que AR ! (Figures 3a et 3b). Ensuite, la longueur affichée du rectangle blanc décroît jusqu'à 1.93 cm, donc AR décroît vers $3 \cdot 1.93 \text{ cm}^2$ (environ).

La « stagnation » de la longueur du rectangle blanc à 2.86 cm (donc celle de AR à $3 \cdot 2.86 \text{ cm}^2$) est caractéristique d'une situation d'extremum. Il convient de le faire observer aux élèves en vue des années à venir.

Une question surgit de l'observation : l'inversion de prépondérance entre A_{3D} et AR coïncide-t-elle avec le maximum de AR ? Seul un calcul théorique permet de répondre.

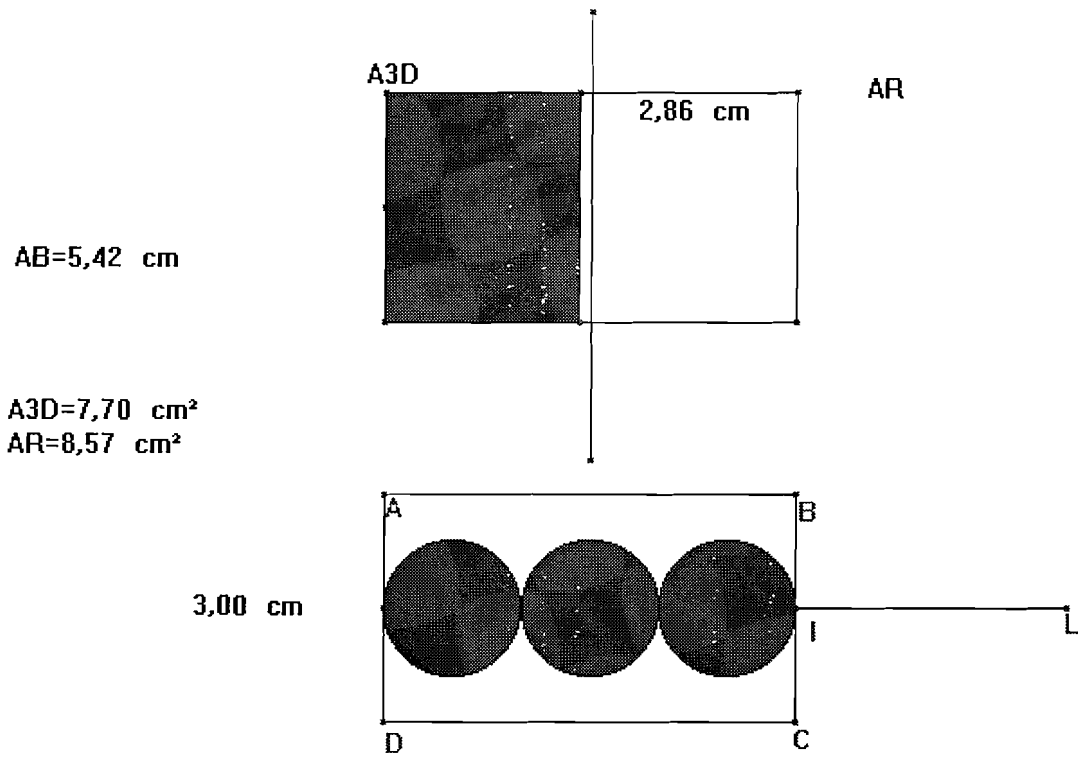


FIGURE 3a

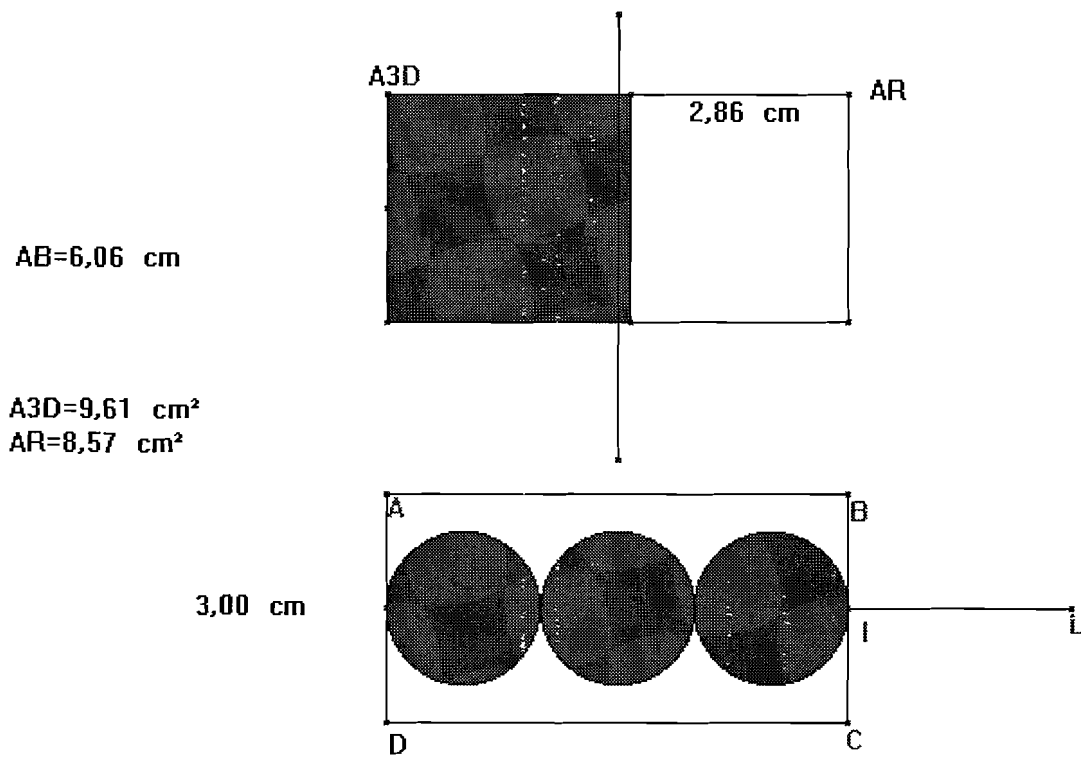


FIGURE 3b

VI.2 Et si on changeait de fonction ?

Quittons la géométrie et revenons à nos chères fonctions.

Pour comparer deux nombres positifs ou nuls, on peut suivre leurs évolutions simultanées (c'est ce qui vient d'être fait), mais on peut aussi comparer *leur différence à zéro ou leur quotient à un*. On obtient alors l'écran suivant, qui redit à sa manière les résultats précédents (figure 4).

Sur cet écran, diff représente $AR - A3D$, quot signifie $\frac{AR}{A3D}$. Les coordonnées respectives de q et d sont (AB,quot) et (AB,diff). On remarquera que CABRI donne AB en centimètres, diff en centimètres carrés et quot sans dimension. Belle cohérence du logiciel.

Dans la nouvelle représentation, la comparaison de AR et A3D revient à l'étude de la position

du lieu de d par rapport à l'axe horizontal ou de celle du lieu de q par rapport à la droite Δ d'équation ($y=1$).

Ces courbes coupent respectivement (Ox) et Δ en deux points dont l'abscisse correspond à la longueur OI pour laquelle les 2 aires sont égales. Au moins sur le plan théorique. En déplaçant I, on obtient bien la valeur quot=1, mais alors, diff vaut... -0.04 cm². Et sur le pixel suivant, diff saute à 0.04 cm². Les mathématiques de l'écran graphique ne sont décidément pas celles du plan mathématique ! Approximation et discontinuité de l'écran graphique apparaissent en pleine lumière.

Il serait dommage de passer à côté d'une incidente de grand intérêt. *La courbe de q s'envole vers les sommets quand I s'approche de O*. On peut forcer quot à... 432.1 avant qu'il ne vire, au pixel suivant à « inexistant » ! Quand quot est crédité de la valeur 432.1, A3D s'affiche 0.08 et AR 0 ! Quand on augmente la précision on obtient :

AR=0.00018. On respire mieux ! Toujours est-il qu'on va faire découvrir aux élèves de Seconde une situation très étonnante : *le rapport de 2 nombres très voisins de 0 peut devenir très grand*. Mais si on fait le rapport dans l'autre sens, il sera très voisin de ...0. Le rapport de 2 nombres très voisins de zéro dépend de leur ordre de grandeur.

Il n'est pas inutile de rappeler que $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens (« inexistant » dans CABRI). Les images mentales créées à l'occasion de cette situation géométrique seront précieuses quand viendra la notion de « forme indéterminée » en Première et Terminale.

Une fois encore, nous avons changé de cadre en éclairant au passage une question d'analyse.

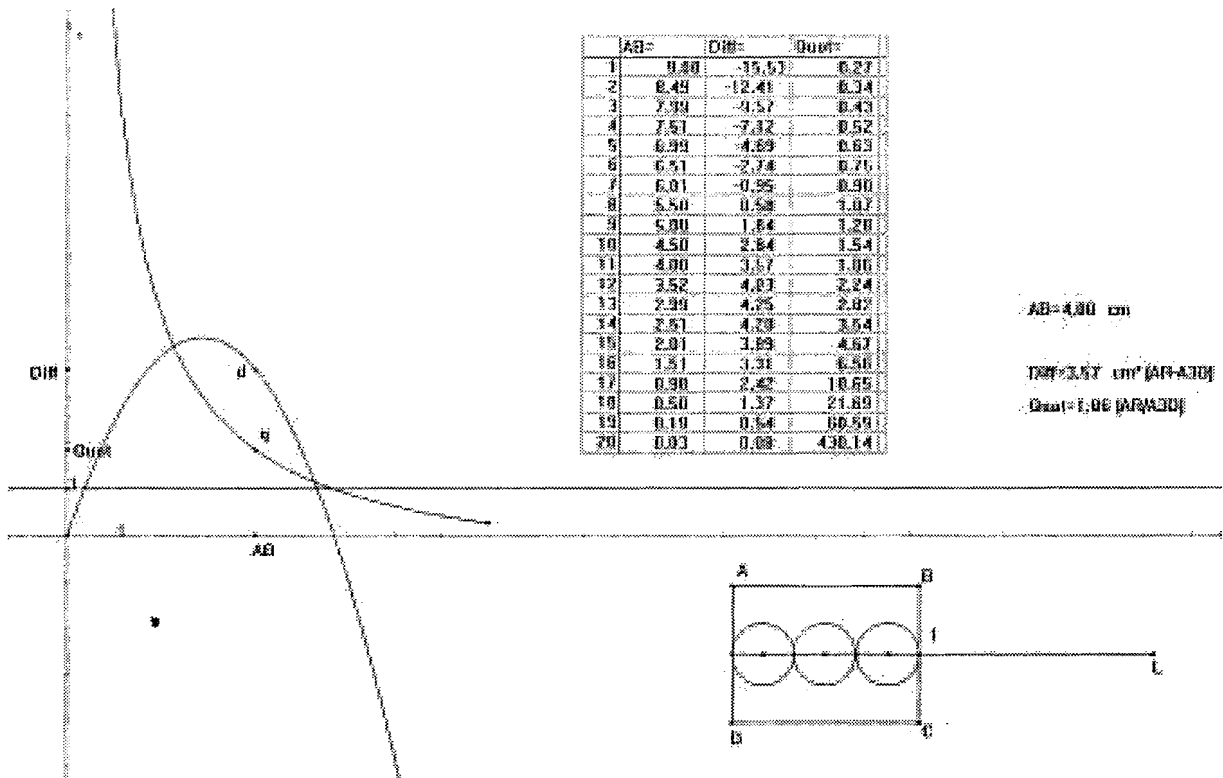


FIGURE 4

VI.3 Une question de frontières...

Nous disposons maintenant d'un rectangle dont les deux dimensions peuvent varier ($AB=a$ et $AD=b$, a et b positifs). Nous avons rencontré deux situations limites : celle où les 3 disques sont tangents à AB ; celle où $A3D=AR$. Elles sont faciles à exprimer.

Soit r le rayon des disques. On a $r \leq \frac{AD}{2}$ et $AB=6r$. Donc $AB \leq 3AD$ c'est à dire $a \leq 3b$.

La tangence correspond à la condition $a=3b$ ou $a-3b=0$.

L'égalité des deux aires ($A3D$ et AR) s'exprime par : $\frac{\pi a^2}{12} = ab - \frac{\pi a^2}{12}$ donc, après simplification $\pi a - 6b = 0$.

A chaque rectangle, on peut associer le point $M(a,b)$ dans un repères \mathfrak{R} . Les deux conditions exprimées ci-dessus conduisent à tracer dans ce repère les droites $D_1(\pi x - 6y = 0)$ et $D_2(x - 3y = 0)$.

Une fois encore, Cabri donne sa pleine mesure. Sur le même écran, on construit le rectangle dépendant des paramètres a et b , et les 3 disques, sans les contraindre à l'intérieur du rectangle. La situation limite (tangence à AB) s'apprécie facilement.

En revanche, pour apprécier l'égalité des aires, l'idée simple de la figure 3 est précieuse. Cette idée est reprise dans la figure 5. On trace enfin D_1 et D_2 , puis on place

$M(a,b)$ dans le repères \mathcal{R} . Il reste à déplacer A verticalement ou B horizontalement²² et à observer les déplacements de $M(a,b)$. Comme a et b sont positifs, M évolue dans le quart de plan xOy .

En fonction des connaissances des élèves, *l'observation* conduit à des conjectures ou confirme des connaissances théoriques.

Les résultats sont d'une grande clarté : en dessous de D_2 , les 3 disques *débordent du rectangle*. Sur D_2 , ils sont *tangents* à AB. Au-dessus de D_2 , ils sont *intérieurs au rectangle*.

Quand M se trouve *dans le secteur angulaire* limité par D_1 et D_2 , $A3D$ est *supérieur* à AR . Sur D_1 , $A3D=AR$. *Au-dessus de D_1* , $A3D$ est *inférieur* à AR .

On met ainsi en évidence (ou on confirme) le *régionnement* d'un plan par des droites. En Seconde, il n'est pas difficile *de démontrer* les conjectures dans ce cas particulier. Partant d'un point de D_2 , pour lequel $x-3y=0$ (donc $x=3y$), on passe *en-dessous de D_2* en se déplaçant à l'horizontale vers la droite (donc $x > 3y$ soit $x-3y > 0$), au-dessus en allant vers la gauche, avec les inégalités correspondantes. La caractérisation d'un demi-plan par une inégalité (obtenue à partir de l'équation de la droite frontière) en résulte.

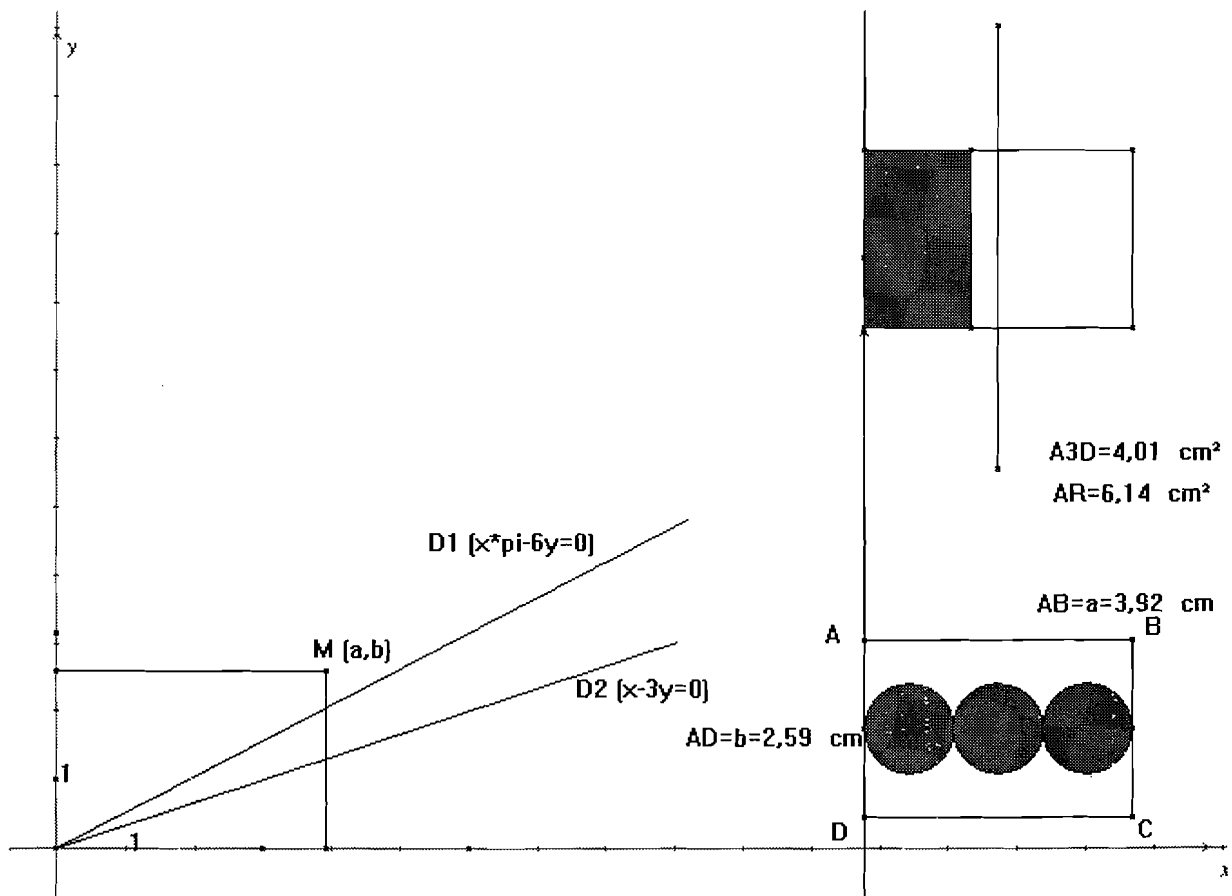


FIGURE 5

²² Une autre construction intéressante consisterait à choisir B libre dans le plan et à le projeter en A et C sur deux droites perpendiculaires en D. On s'affranchirait ainsi des seuls déplacements verticaux et horizontaux de la construction actuelle.

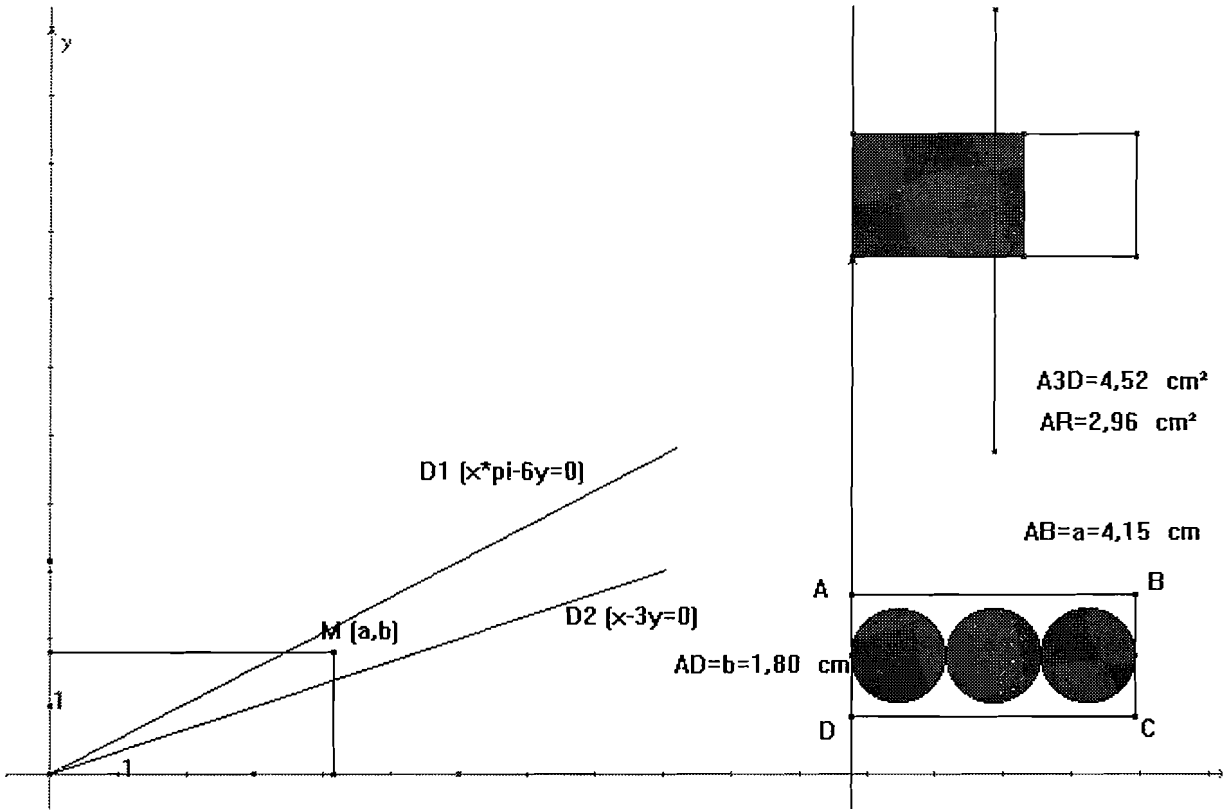


FIGURE 5a

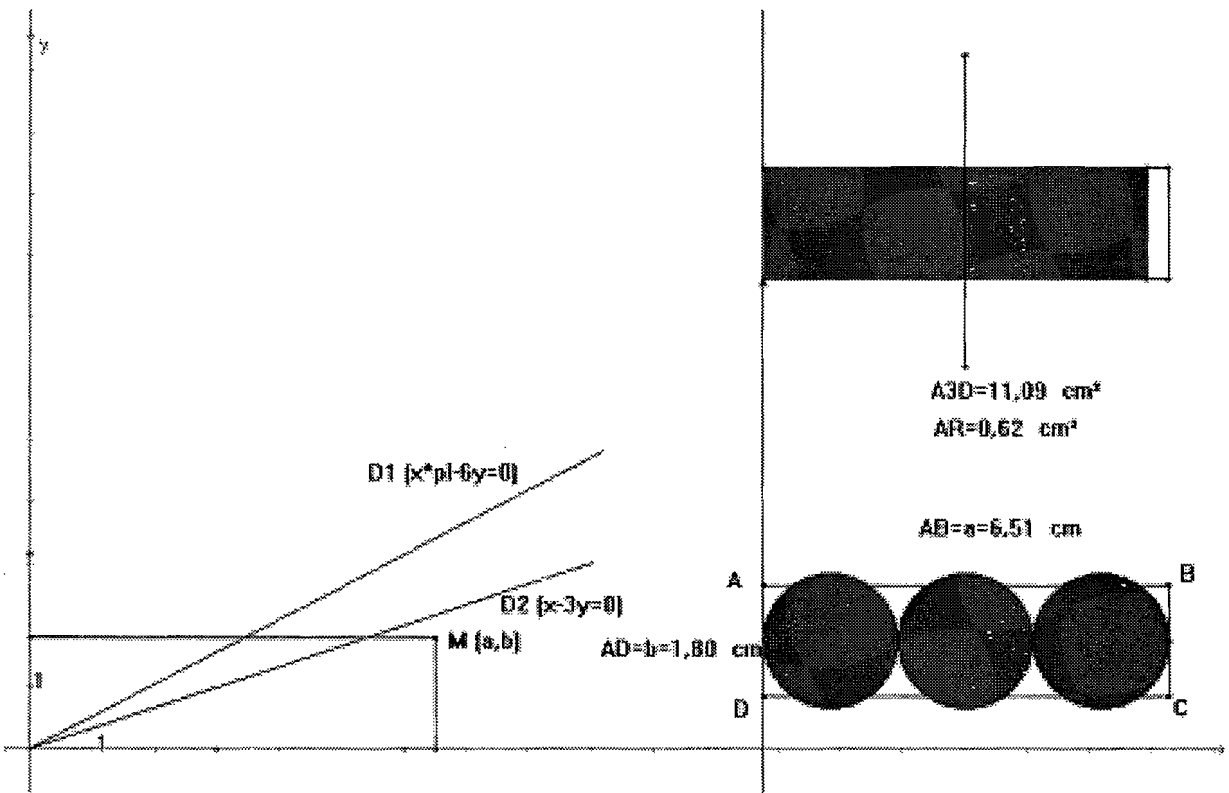


FIGURE 5b

VI.4 Et si on simplifiait la figure ?

Sommes-nous au bout du travail en environnement CABRI ? Que nenni ! L'inventivité des formateurs de Créteil est sans bornes. « On aurait pu se contenter d'une figure plus simple, un rectangle contenant un seul cercle ». Cette remarque paraît évidente une fois formulée. Il faut croire qu'elle ne l'est pas vraiment : elle a été proposée par un seul enseignant parmi la soixantaine qui ont successivement étudié la situation. Elle évite la construction de Thalès. L'ordre de construction est indifférent. On obtient immédiatement l'aire du disque AD1, celle du rectangle, donc l'aire restante AR1 (calculatrice de CABRI). On peut alors réfléchir à l'incidence d'une multiplication par 3 sur l'évolution d'une grandeur, sur la comparaison de deux grandeurs, leur différence ou leur quotient. Sur le passage des courbes représentatives issues de la situation simplifiée à celles de la situation qui vient d'être traitée : les abscisses et les ordonnées sont multipliées par 3, donc les courbes sont homothétiques ! L'outil « homothétie²³ » de Cabri permet d'obtenir les courbes associées au problème initial à partir des lieux du problème simplifié (figure 6). C'est spectaculaire !

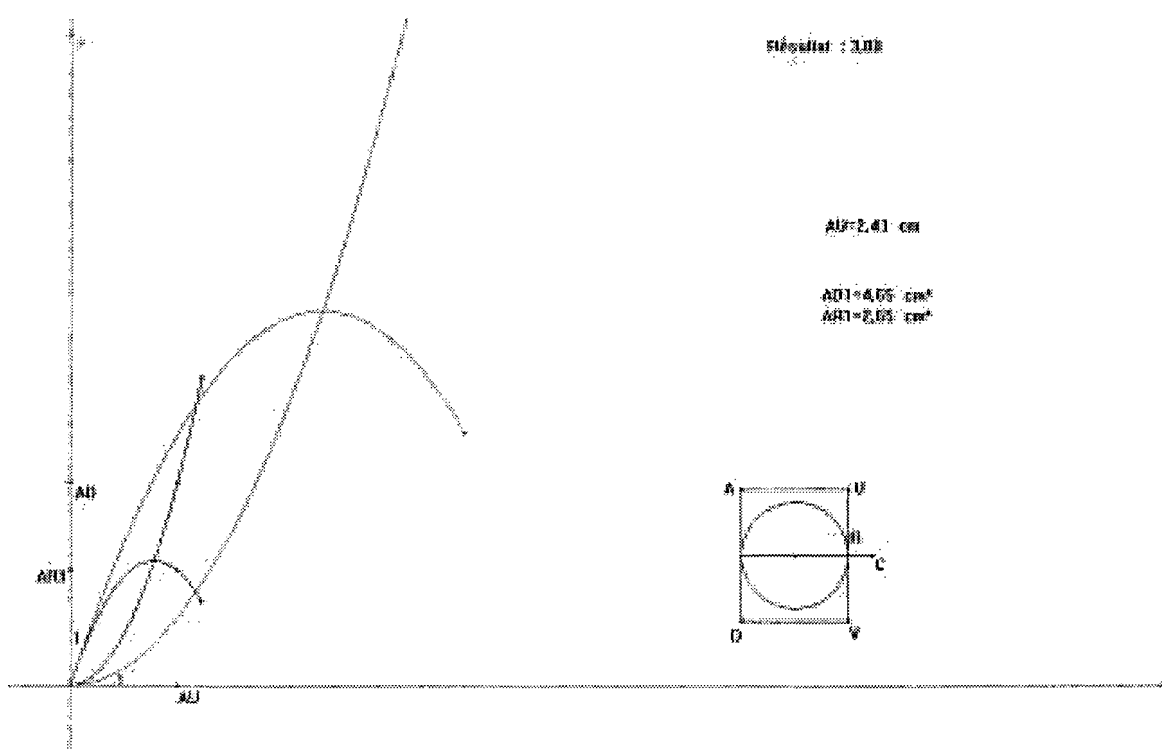


FIGURE 6.

Si cette réflexion paraît trop théorique pour des élèves de Seconde, il suffit de multiplier l'abscisse et les 2 aires par 3 (outil « calculatrice ») et l'on obtient les valeurs (et les courbes) de la figure complète à partir des seules valeurs affichées de la figure simplifiée²⁴ !

²³ L'homothétie, outil géométrique, opère sur les courbes représentatives, donc dans le cadre graphique, et pas sur la figure (cadre géométrique). Le « croisement de cadres » est instructif.

²⁴ Ce travail dans le cadre numérique évite le tracé des courbes de la situation simplifiée et surtout l'homothétie opérant sur ces courbes.

VI.5 Et si les disques n'étaient plus centrés sur la médiatrice de [AB] ?

Voilà une modification capitale pour des élèves de lycée : elle conduit à *changer de fonctions tout en gardant les mêmes formules algébriques, parce que l'ensemble de définition est modifié.*

Soit M un point de [OA] et δ la perpendiculaire en T à (OA). Si les cercles sont centrés sur δ , la seule chose qui change (les disques sont intérieurs au rectangle) est leur rayon maximal MA et le segment [ML], de longueur $6TA$ sur lequel I peut évoluer (il remplace le segment précédent [OL]). On passe en effet de la situation de la figure 2 à la situation actuelle par la translation de vecteur \overrightarrow{OM} . Toutes choses sont donc égales (la translation conserve les aires des disques, donc la différence des aires, celle du rectangle étant inchangée) sauf *l'ensemble de définition des fonctions A3D1 et AR1* (à nouvelles fonctions, nouvelles notations !) Une utile réflexion sur la définition d'une fonction (l'ensemble de définition est partie intégrante de la définition d'une fonction).

On peut bien sûr vérifier tout cela en faisant la nouvelle figure CABRI qui suit... et que le raisonnement rend inutile (figure 7).

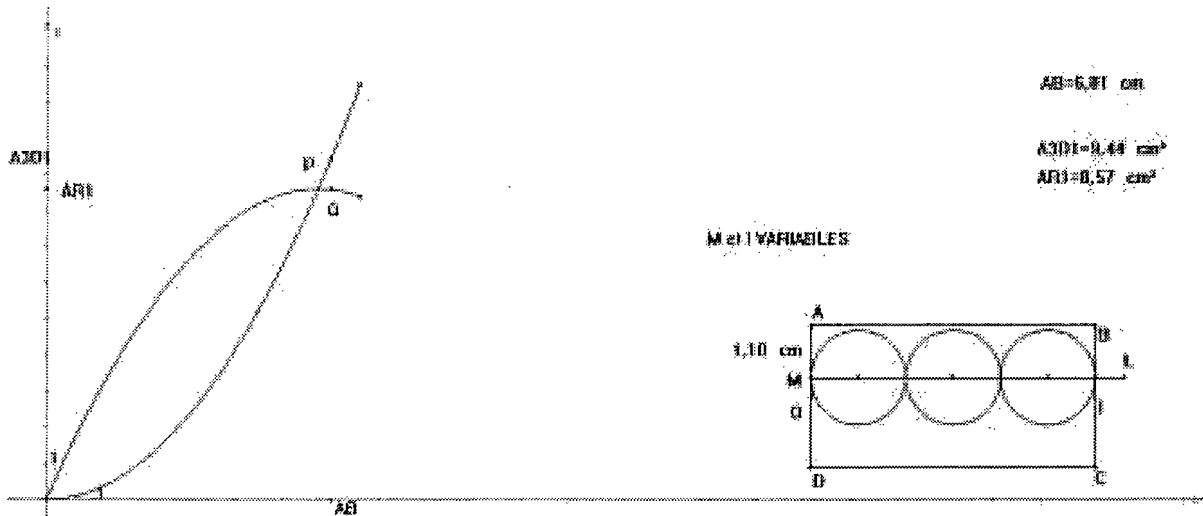


FIGURE 7

Une observation intéressant en résulte : dans certains cas, les deux courbes ne se coupent plus qu'en O. Le problème n'a plus de solution non évidente (figure 8).

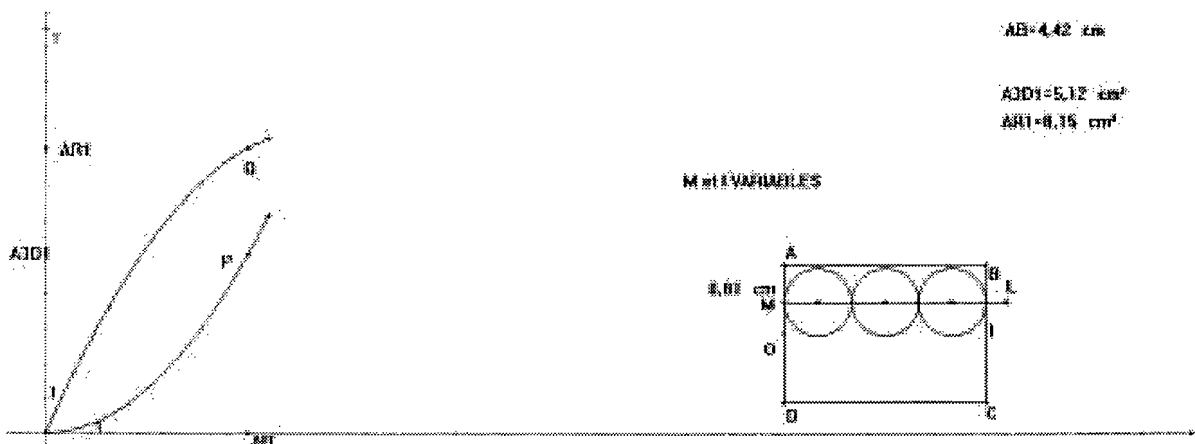


FIGURE 8

VI.6 Et si on changeait la longueur de [AD] ?

On introduit ainsi *un paramètre*, la longueur OA.

Les fonctions utilisées ici sont à nouveau la différence et le quotient des deux aires.

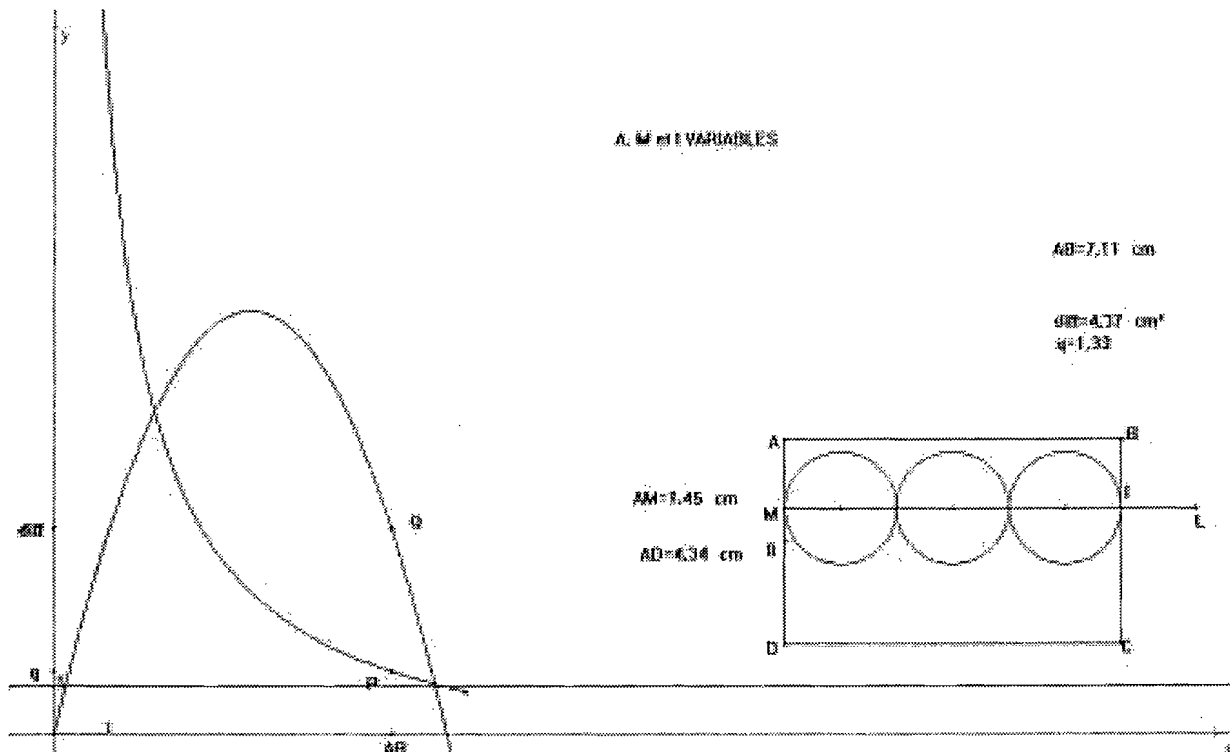
A varie sur une droite verticale (OA est affiché), donc I est un « point sur le segment » [OL] de longueur $6OA$. Le reste à l'identique.

A chaque choix de A (donc de OA) correspondent des courbes de P et Q définies sur le segment [O,OL] (I étant déclaré sur [OL], l'ensemble de définition des deux fonctions est pris en compte par CABRI (Figure 9)).

Quand A (donc OA) varie, la courbe de P ne change évidemment pas : seule varie la longueur de l'arc de parabole tracé. En revanche, la courbe de Q est modifiée (ainsi que son ensemble de définition) : en déplaçant A avec la souris, l'élève voit défiler une famille de courbes (paraboles) dépendant du paramètre OA (ou AD) et dessinées en temps réel. Il observe en temps réel les changements de l'ensemble de définition commun aux courbes de P et Q, quand OA varie.

Mieux que par un discours sur les fonctions dépendant d'un paramètre et leur ensemble de définition, l'utilisateur de Cabri voit cette notion « en actes », en temps réel ! Il aurait été dommage de le priver de ce spectacle créateur d'images mentales très suggestives.

Il reste à espérer que le lecteur, condamné aux figures inertes (le papier ne permet pas encore l'animation dynamique..), compensera son irrépressible frustration en construisant lui-même la séquence animée avec CABRI. Il pourra alors mesurer l'impact de telles images sur qui cherche à comprendre les mathématiques.



VII. Et si on renonçait à l'alignement des centres ?

En conservant le maximum de propriétés de la figure initiale on est conduit à la situation suivante :

Dans le rectangle $ABCD$, on inclut 3 disques isométriques (C_1) , (C_2) et (C_3) , intérieurs au rectangle. (C_1) est tangent à AD , (C_3) est tangent à BC , (C_2) est tangent à (C_1) et à (C_3) .

Avec Cabri, on a d'abord pris soin de choisir A mobile sur la verticale passant par O et B mobile sur l'horizontale passant par A , de façon à pouvoir donner au rectangle les formes et les dimensions souhaitées.

On construit alors (C_1) tangent en M à $[OA]$. M est mobile sur $[OA]$. Le centre C_1 de (C_1) est mobile sur le segment $[MT]$ de longueur MA . On construit ensuite C_3 tangent en P à BC . P est mobile sur $[IJ]$: $BI=CJ=r$ (rayon des 3 cercles). On peut ainsi déplacer C_1 et C_3 indépendamment l'un de l'autre à l'intérieur du rectangle en leur faisant occuper (à une symétrie près) toutes les positions possibles, par déplacement de M et P .

La construction de (C_2) est aisée. C_2 est sur la médiatrice de $[C_1C_3]$ et sur le cercle de centre C_1 et de rayon $2r$. Si les 2 courbes sont sécantes, on obtient 2 cercles (C_2) , distincts ou confondus.

Grâce aux macros logiques de Cabri²⁵, on contraint (C_2) et (C'_2) à être intérieurs à $ABCD$ (les coordonnées des deux centres doivent appartenir à deux intervalles convenables). Cabri ne les trace que s'ils répondent à cette condition.

Dans la figure 10, ces deux cercles ont le bon goût d'être intérieurs au rectangle. Ce n'est pas le cas général comme le montre la figure suivante. Ils peuvent être tous deux intérieurs au rectangle, ou déborder tous deux, l'un peut être intérieur et l'autre déborder, ils peuvent enfin ne pas exister (figure 10a).

POINTS VARIABLES : A, B, C_1 sur le segment MT , M sur le segment OA , P sur le segment IJ

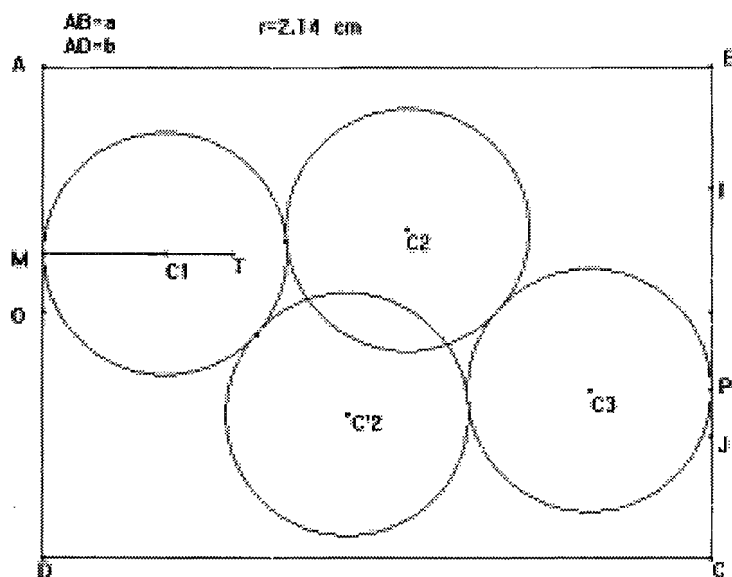


FIGURE 10

²⁵ Voir « Faire de la géométrie en jouant avec Cabri », brochure 105 de l'APMEP, chapitre 14, Roger Cuppens.

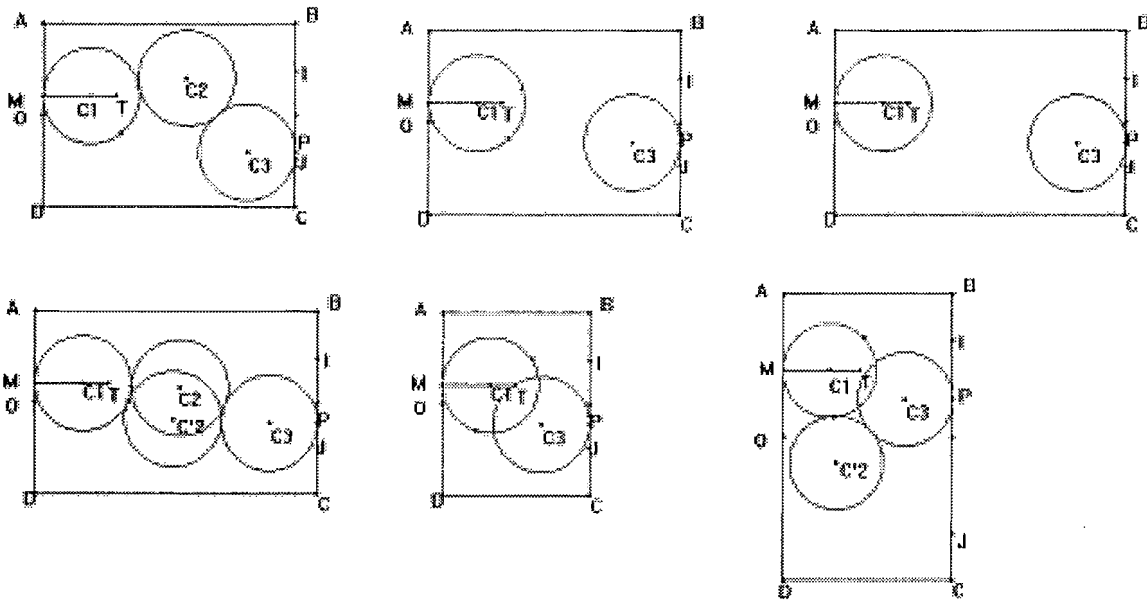


FIGURE 10a

La perte d'unicité de la figure nous interroge : dans le cas où les cercles de centre C_2 et C'_2 sont tous deux intérieurs au rectangle, qu'allons-nous appeler $A3D$? AR ? Les calculs faits avec l'un ou l'autre conduisent au même résultat. AR et $A3D$ pourraient prendre cette valeur commune. Soulagement provisoire et de courte durée !

On peut, dans certaines configurations et à rayon constant, déplacer B à l'écran en gardant les 4 disques à l'intérieur du rectangle. Il en résulte que, tout en dépendant de r^{26} , AB n'est plus une fonction de r (jusqu'ici on avait $AB=6r$). Pour r donné, il existe une infinité de valeurs de AB , compatibles avec la figure de l'énoncé (figure 11).

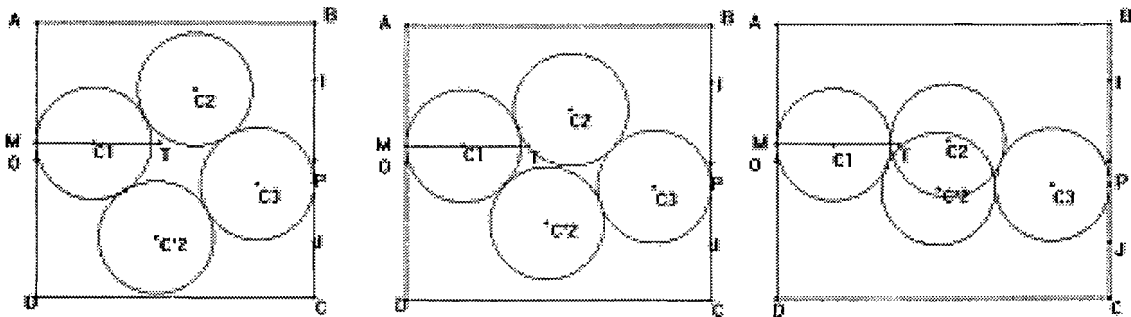


FIGURE 11

Dans ces conditions, la quantité AR n'est plus une fonction de r . Pour r donné, AR peut prendre, elle aussi, une infinité de valeurs distinctes (une infinité de rectangles sont compatibles avec l'énoncé pour certaines valeurs de r).

De même, AR n'est pas plus une fonction de AB . Pour AB donné, on peut, en déplaçant C_1 sur $[MT]$, modifier le rayon tout en restant dans le rectangle (figure 12) : à AB fixé correspondent alors une infinité de valeurs possibles de AR .

²⁶ Pour r donné, si on veut pouvoir faire la figure, AB ne peut varier que dans certaines limites qui dépendent de r .

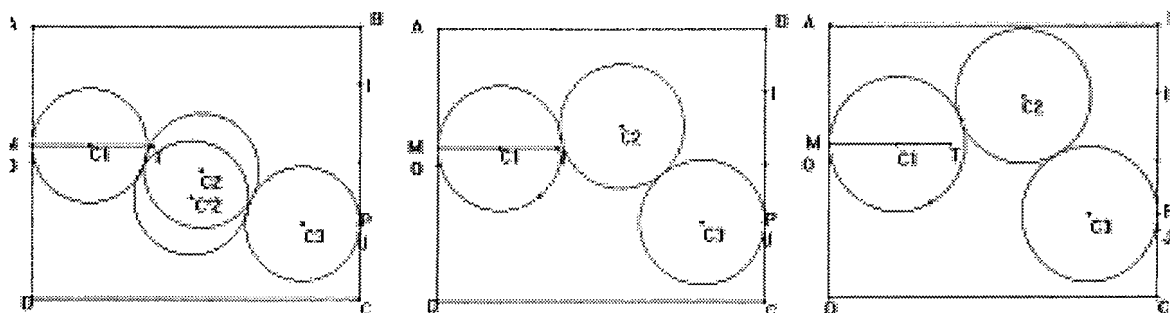


FIGURE 12

Cette situation permet donc de mettre en évidence, à partir de l'exemple géométrique, *des relations de dépendance non fonctionnelles*. Les exemples de telles situations proposées aux élèves (comme contre-exemple à la notion de fonction) sont généralement artificielles, donc de faible impact pédagogique. Ici, ils s'offrent de la façon la plus naturelle possible, par renoncement à une des propriétés d'une figure géométrique (alignement des centres).

Les remarques qui précèdent conduisent à repenser complètement l'énoncé du problème.

La construction de la figure dépend de nombreux paramètres : sans doute faudrait-il, si les difficultés sont trop importantes pour les élèves (ce n'est plus un problème de Seconde), proposer quelques jalons et des aides techniques.

Il faudrait ensuite formuler des questions précises sur les relations entre r et AB , $A3D$ et AR . *AB est-elle une fonction de r ? Même question pour $A3D$ et AR .*

r est-elle une fonction de AB ? Même question pour $A3D$ et AR .

Ces questions et certaines réponses négatives renforcent les critiques faites à l'énoncé de Belin : « dépendre de » n'est pas synonyme d' « être fonction de » !

Plus question donc de représentations graphiques. De l'observation des figures avec Cabri naissent de nouvelles interrogations :

Pour un rayon donné, dans quelles limites AB peut-il varier pour que la construction reste possible ?

Pour AB donné, quel est le plus grand rayon compatible avec les contraintes de l'énoncé ?

Il semble bien que pour répondre à ces questions, Cabri ne permette pas de dégager des conjectures convaincantes. Il faut sans doute se résoudre à calculer.

VIII. Variables didactiques.

Dans la tâche de construction de la figure, le logiciel imposé est *une variable didactique* importante et intéressante. Rappelons une définition possible de cette notion²⁷. « Une variable cognitive d'une situation didactique est un paramètre de la

²⁷ Extraite du glossaire de didactique remis aux professeurs d'école et de lycée/collège à l'IUFM d'Aquitaine.

situation qui, suivant les valeurs qui lui sont attribuées, modifie la connaissance nécessaire à la solution. Une variable didactique est une variable cognitive dont la valeur peut être fixée à volonté par l'enseignant. La modification de la valeur de ces variables permet d'engendrer, à partir d'une situation,

- soit un champ de problèmes correspondant à une même connaissance,
- soit un éventail de problèmes correspondant à des connaissances différentes. »

L'enseignant peut utiliser d'abord des valeurs correspondant à des connaissances acquises, ce qui permet à l'élève de comprendre le problème, puis modifier les valeurs des variables pour affronter à l'élève la construction d'une connaissance nouvelle. Dans une situation didactique, une variable est didactique dans la mesure où, en agissant sur elle, on peut provoquer des adaptations, des régulations, des apprentissages²⁸. Certaines valeurs de cette variable changent alors le jeu, modifient les stratégies disponibles et les connaissances en jeu.

Par exemple, la substitution de Geoplan à Cabri modifie profondément les conditions de construction de la figure. L'introduction de deux « variables » $a=AB$ et $b=AD$ permet de définir tous les points de la figure *par leurs coordonnées* (y compris les centres des 3 cercles, dont par ailleurs le rayon est $b/6$). Les dépendances et l'ordre de construction de la figure signalés dans Cabri s'évanouissent. Plus besoin de Thalès ou de symétries. Le rectangle ne dépend plus des trois cercles (ou réciproquement) : les figures dépendent toutes deux *des paramètres a et b*.

La même construction avec ORGE²⁹ aurait nécessité, outre le repérage cartésien utilisé dans Geoplan, la connaissance de l'équation d'un cercle.

L'imposition de Graph'x a une influence déterminante : il oblige les apprenants à *abandonner la géométrie* sous ses différentes formes et à prendre en charge le calcul des aires en fonction des paramètres. On passe obligatoirement dans les cadres algébrique et graphique (voir plus loin).

Il est possible que la « forme de l'énoncé » soit une autre variable didactique. Elle est moins évidente, car son influence paraît plus difficile à mesurer.

On peut proposer de définir la forme d'un énoncé à partir de

1. l'ordre des informations données
2. le nombre d'informations données
3. l'ordre des questions posées
4. le nombre de questions posées
5. ses aspects sémiotiques (présence ou non de dessins, d'écritures symboliques, etc.)
6. ses aspects langagiers (syntaxe, vocabulaire complexe, etc.) désignant ainsi autant de variables éventuellement didactiques...

²⁸ Brousseau, thèse, p 407

²⁹ Téléchargeable gratuitement sur la toile à l'adresse suivante : <http://www.iut.univ-tours.fr/tpweb/geii/orgehome.htm>, ORGE (Outil de Représentations Graphiques pour l'Enseignement) opère dans les registres graphique et numérique des cadres de la Géométrie Analytique et de l'Algèbre, en tentant d'offrir des possibilités dynamiques à la représentation graphique des relations binaires entre réels.

Il faudrait étudier les modifications de stratégie qu'entraînent les changements de ces différents paramètres. Ce travail reste à faire. Nous proposerons plus loin des énoncés qu'il faudrait tester en classe et en formation.

Le fait qu'une personne au moins n'ait pas suivi *l'ordre des informations* données pour construire la figure relativisée peut être l'importance de ce critère. Mais surtout il semble que dans cette tâche (construction de la figure) la variable « logiciel » prime sur la variable « forme de l'énoncé » puisque avec Geoplan par exemple, la construction des cercles et celle du rectangle sont « indépendantes » ne modifiant pas le choix de la variable qui peut être fait a priori...

IX. Influence du changement de logiciel sur l'activité. Comparaison avec cabri.

Changer de logiciel, c'est *se contraindre à changer de regard sur le problème étudié*. Un grapheur trace toutes les courbes que l'on veut, pourvu qu'on lui fournisse leurs équations !

Avec Graph'x (ou avec une calculatrice graphique), nous voici ramenés au cadre algébrique et au calcul d'expressions algébriques. Le travail avec CABRI nous pousse à introduire d'emblée le paramètre a ($AD=2a$) et à choisir comme variable $x=AB=OI$. On obtient alors : $A3D(x) = 3\pi\left(\frac{x}{6}\right)^2$ et $AR(x) = 2ax - \frac{\pi x^2}{12}$, les deux fonctions étant définies sur $[0, 6a]$. Pour chaque valeur de a , le grapheur trace les courbes, qui sont évidemment celles rencontrées dans Cabri. Rien n'empêche d'introduire $d(x) = 2ax - \frac{\pi x^2}{6}$ ou $q(x) = \frac{24a}{\pi x} - 1$ (différence et quotient) comme précédemment, avec les mêmes représentations, réflexions, et conclusions. L'expression de $q(x)$ permet de mieux comprendre pourquoi sa courbe « décollait » si fort au voisinage de zéro.

Mais on a perdu, dans cet environnement toute la dynamique des liens entre figure, valeurs numériques et courbes représentatives. L'ensemble est devenu terriblement *statique*. Bien que l'interprétation des courbes soit une compétence importante en mathématiques, le sujet s'est considérablement *appauvri* par rapport au travail avec CABRI, Geoplan ou Orge.

En Première, on peut proposer aux élèves une question supplémentaire, que Graph'x éclaire remarquablement : *lorsque A3D et AR croissent simultanément, comparer la « rapidité » de leur croissance*. Cette question est importante pour donner du sens à une phrase souvent lue dans la presse et fort mal comprise par les élèves : *la croissance ralentit...*

Il suffit pour traiter la question de faire tracer les courbes des fonctions dérivées (ce sont deux droites) et d'étudier leurs positions relatives.

X. Et si on démontrait ce que montrent les logiciels ?

En Seconde, l'étude des fonctions du second degré (autres que $f(x)=x^2$) n'est pas au programme : il faut donc se contenter de ce que *montrent* les logiciels (sauf à se ramener, à titre d'exercice à ce cas, en mettant l'expression sous forme canonique). En revanche, la comparaison des aires est à la portée de quiconque manie un minimum de calcul algébrique.

$$\text{delta}(x) = 2ax - \frac{\pi x^2}{6} = \frac{x}{6}(12a - \pi x) \text{ et } q(x) = \frac{24a}{\pi x} - 1 \text{ sur } [0,6a].$$

Résoudre $\text{delta}(x) > 0$, $\text{delta}(x) = 0$ ou $\text{delta}(x) < 0$ ne représente pas une performance exceptionnelle, x étant positif ou nul (on est ramené à des inéquations du premier degré). La valeur de seuil qui apparaît est, soit $\frac{18}{\pi}$ dans le cas où $2a=3$. On retrouve la valeur approchée (entre 5.72 et 5.74) donnée par CABRI.

Les résultats concordent bien sûr si on raisonne à partir de $q(x)$.

En tant que démonstration des résultats constatés avec des logiciels, le court travail qui vient d'être fait est indispensable. Mais si la résolution du problème se résumait à cette seule démonstration, elle serait d'une pauvreté accablante (bien qu'elle traite complètement le problème) au regard de tout ce que recèle la situation qu'il décrit.

XI. Et si on proposait le problème à une classe de troisième ?

Cette activité pourrait servir à *aborder sur un exemple, en fin de Troisième, la notion générale de fonction* et à faire découvrir, au-delà de la droite, la courbe représentative d'une fonction³⁰. La notion d'aire y est connue ainsi que le calcul d'aires simples. L'affichage de ces aires avec Cabri ne présente guère de difficultés (cela fait partie de l'initiation au logiciel). Dès lors, on peut faire réfléchir les élèves aux questions suivantes :

a) Dans quelles limites doit varier I (donc le nombre OI) pour satisfaire aux exigences de l'énoncé (les trois disques sont censés être à l'intérieur du rectangle) ? Comment imposer ces limites à I dans le cadre du logiciel ?

b) Quel est la nature du lien entre I (donc OI) et les aires affichées ?

L'existence d'une aire *unique* associée à *chaque point I d'un intervalle* (et à chaque nombre de $[0,9]$) définit une « fonction ».

L'idée de reporter la longueur OI sur un axe horizontal et l'aire correspondante sur un axe vertical n'est pas étrangère aux élèves de Troisième : ils ont fait cela pour une fonction affine. Cabri possède la commande qui rend ce report automatique. Les points P et Q des figures précédentes s'obtiennent simplement. On peut alors utiliser la commande TRACE (Il est préférable de ne pas utiliser la commande LIEU, trop difficile à appréhender) pour faire apparaître un tracé, la courbe représentative de la fonction (avec son ensemble de définition).

Viennent alors les inévitables questions :

³⁰ Ce travail reste à faire. Il n'a pas été expérimenté avec une classe.

1) Que signifie le fait qu'un tel tracé aille vers la droite et le haut ? À droite et en bas ? On aborde ainsi, *sur un exemple*, la notion générale de fonction croissante ou décroissante, déjà rencontrée avec les fonctions affines.

2) Que représente l'intersection des deux courbes ? Que signifie le fait qu'une courbe soit « au-dessus d'une autre » ?

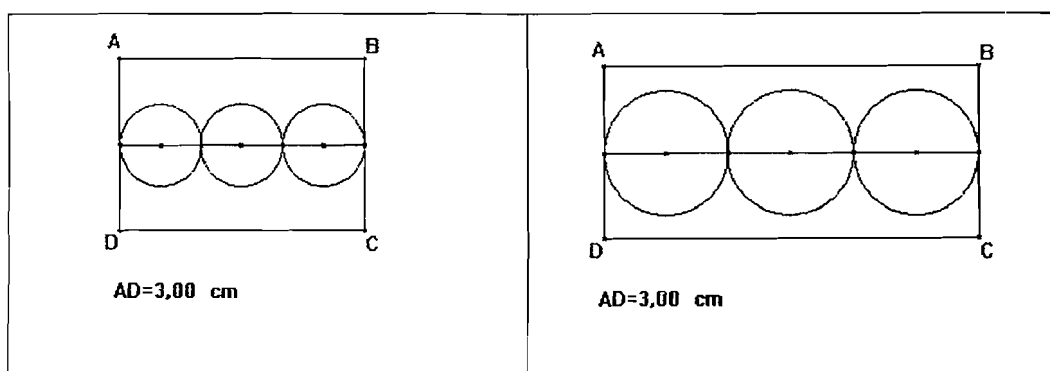
On ne fait que généraliser des réflexions et des connaissances rencontrées avec des fonctions affines et des droites, mais cette généralisation prépare le travail à venir et consolide les connaissances de la classe. Et tout ceci se fait à partir d'une fonction non confondue avec une « formule algébrique » !

XII. Et si on modifiait l'énoncé ?

Gommons la contradiction signalée au départ de l'article et insistons sur *l'initiative des élèves et l'ouverture du problème*. Voici une proposition :

QUEL EST LE PROBLÈME POSÉ ?

On veut placer trois disques isométriques à l'intérieur du rectangle ABCD comme sur les dessins ci-dessous. La longueur de AD est de 3 cm. B est mobile sur la perpendiculaire en A à (AD).



A l'aide des différents logiciels dont vous disposez³¹, étudiez et comparez l'aire des trois disques et l'aire restante du rectangle (l'aire du rectangle moins l'aire des trois disques).

Rédigez et démontrez vos observations.

Et si les 3 disques n'étaient pas centrés sur la médiatrice de [AB] ?

Et si AD avait une longueur autre que 3 cm ?

Est-ce le même problème ? Présente-t-il les mêmes difficultés ? Quel est le coût d'une plus grande liberté ? Nous laissons au lecteur le soin de réfléchir à ces questions.

Autre énoncé possible, *sans figure*. Il pourrait s'écrire ainsi :

³¹ La question ainsi formulée a conduit les participants à l'atelier de Brest à se partager en deux groupes à peu près équivalents. Les uns ont choisi Geoplan, les autres Cabri. Personne n'a choisi Derive ou la calculatrice graphique. Parmi les utilisateurs de Geoplan, les collègues ne sachant comment utiliser la commande LIEU ont embayé sur Excel. Beaucoup des utilisateurs de Cabri ont calculé explicitement les expressions algébriques.

On veut placer trois disques isométriques C_1, C_2, C_3 à l'intérieur d'un rectangle $ABCD$. La longueur de AD est de 3 cm. B est mobile sur la perpendiculaire en A à (AD) . C_1, C_2, C_3 sont centrés sur la médiatrice de $[AD]$. C_2 est tangent à C_1 et C_3 . C_1 est tangent à (AD) et C_3 à (BC) .

A l'aide des différents logiciels dont vous disposez, étudiez et comparez l'aire des trois disques et l'aire restante du rectangle (l'aire du rectangle moins l'aire des trois disques).

Rédigez et démontrez vos observations.

Et si les 3 disques n'étaient pas centrés sur la médiatrice de $[AB]$?

Et si AD avait une longueur autre que 3 cm ?

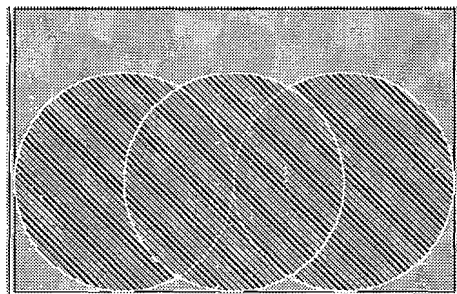
Une difficulté importante est introduite par cette rédaction pour la plupart des élèves. Traduire un texte dense en français courant en figure géométrique ne va pas de soi, en ces temps de faible maîtrise de la langue...

Il serait intéressant de soumettre les trois énoncés à différents groupes d'élèves et d'étudier leur influence (compréhension, durée du décodage, stratégies induites etc.). Il faudrait voir en particulier si, comme nous le suggérons, les deux derniers textes poussent à des constructions plus variées que le premier. Et à des stratégies auxquelles nous n'aurions pas pensé... Pourrait-on ainsi repérer d'éventuelles variables didactiques liées à l'énoncé ?

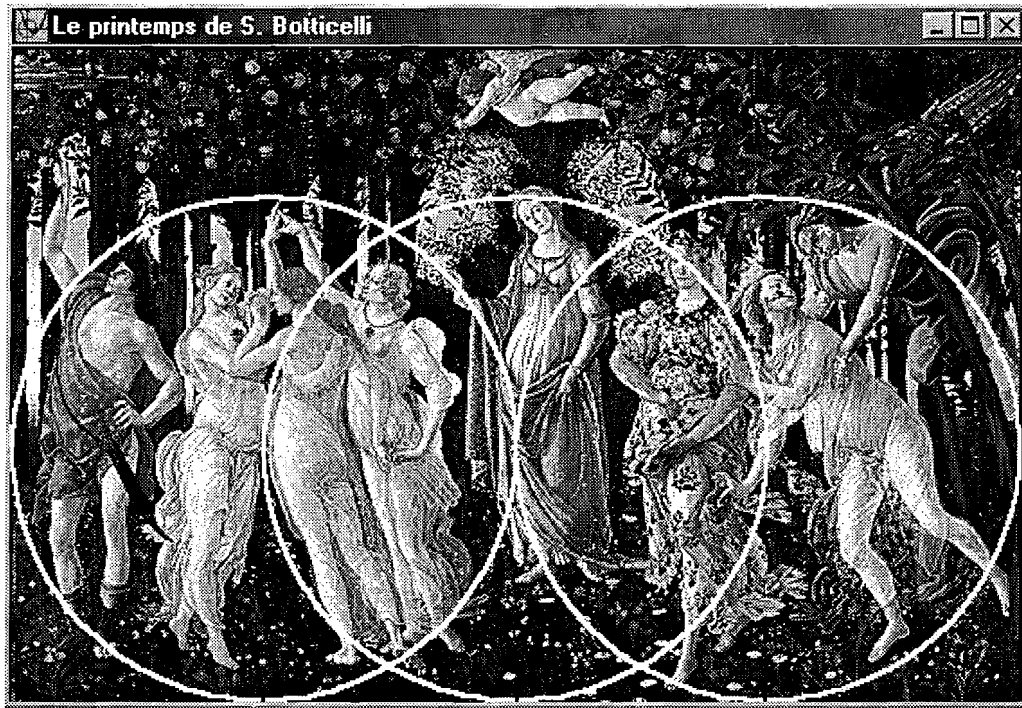
Une question jamais soulevée par les utilisateurs mérite attention. Pourquoi *trois* disques ? Et pas un ou quatre ? Une première raison est sans doute que ce choix conduit habituellement à l'utilisation de la construction de Thalès pour partager un segment. Un partage en deux, quatre ou en une puissance de deux peut se faire directement avec la commande « milieu » de CABRI. Mais on a vu que la construction de Thalès est évitable par l'usage de symétries centrales et que le problème peut être ramené, dans tous les cas et sans perte de généralité, à un seul disque...

Voici une autre raison, beaucoup plus élégante signalée par un re-lecteur cultivé. Il permet d'élever le débat (je l'en remercie vivement) :

On laisse tomber la tangence du disque médian. La figure devient la suivante :



Elle correspond à un choix de composition adopté par Botticelli dans la *Primavera* (Le Printemps, Galerie des Offices, Florence), ce qui peut justifier le nombre $n=3$ de disques retenus, mais n'empêche pas de raisonner pour n quelconque...



Conclusion.

La rencontre d'une situation et d'un logiciel à fort potentiel entraîne parfois des élèves (et leur professeur), dans un climat de liberté et de dialogue, vers des découvertes décisives pour leur formation scientifique. Ils apprennent à imaginer, à regarder, à analyser, à établir des liens, à débattre, à donner des prolongements au problème, à le formuler autrement. La curiosité aiguisée, les voilà qui tentent de comprendre, donc de démontrer. L'environnement informatique donne alors sa pleine mesure et transforme profondément l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les voici revitalisés, ré-enchantés, redevenus passionnants.

Le travail « collaboratif » est appelé à jouer un rôle considérable dans la formation et le travail des enseignants. L'article que vous venez de lire est le résultat de multiples interférences, sur le terrain et par échanges électroniques. L'intelligence peut vraiment devenir « collective et distribuée ». C'est une profonde révolution qui s'annonce dans les métiers de l'enseignement.

Bibliographie.

FALCADE Rossana (2002) : L'environnement Cabri-Géomètre, outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction, Petit'x n° 58, p.47-81.

BLOCH Isabelle (2002) : Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, Petit'x n° 58, p. 25-46.

HITT-ESPINOSA Fernando (1998) : Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction, Annales de didactique et de sciences cognitives, Volume 6. p. 7-26.

DUVAL Raymond (1991) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de didactique et de sciences cognitives, Volume 5. p. 37-65.

DUVAL Raymond (1988) : Graphiques et équations : l'articulation de deux registres, Annales de didactique et de sciences cognitives, Volume 1. p. 235-253.

MORIN Edgar (1981) : Pour sortir du vingtième siècle, Nathan.

KUNTZ Gérard (1993) : L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a, Repères-Irem n° 11.

COUSQUER Eliane (2002) : Travail collaboratif en mathématiques au L.A.M.I.A. . Bulletin de l'APMEP n° 441.

Roddier J-A (2001) : Conjectures en arithmétique, Repères-Irem n° 45.

KUNTZ Gérard (1992) : Quelques idées d'activités glanées au contact des entreprises, Repères-Irem n° 7.

KUNTZ Gérard (1995) : Conjectures sur l'utilité d'une formation mathématique pour la vie économique et sociale, Repères-Irem n°18

CUPPENS Roger (1996) : Faire de la géométrie en jouant avec Cabri, Brochures 104 et 105 de l'APMEP.

CHAUVAT Gérard (2000) : Courbes et fonctions au Collège, Petit x n°51.