COMMENT PEUVENT VARIER LES ACTIVITES MATHEMATIQUE DES ELEVES SUR DES EXERCICES ?

LE DOUBLE TRAVAIL DE L'ENSEIGNANT SUR LES ENONCES ET SUR LA GESTION EN CLASSE

Aline Robert
Professeur à l'IUFM de Versailles, Equipe de recherche en didactique des mathématiques Didirem

Marc Rogalski
Professeur à l'université de Lille 1, Laboratoires AGAT et IMJ, Lille 1 Paris 6 et CNRS

Résumé : Nous étudions les activités mathématiques des élèves, en relation avec leur apprentissage, en fonction des énoncés d'exercices et de la gestion de la classe par l'enseignant. Plus précisément, nous regardons quels aspects dans la variabilité dans les activités des élèves dépendent de la forme des énoncés qui leurs sont proposés et des modes de gestion de leur travail par le maître. Ceci nous amène à expliciter divers niveaux de mise en fonctionnement des connaissances des élèves dans leur travail mathématique, et à dégager, du côté de l'enseignant, la marge de manœuvre dont il dispose et les enjeux et difficultés qui y sont attachés.

Introduction

Regardons l'exemple suivant, qui sera repris et complété plus loin. Un enseignant a proposé à des élèves de DEUG, répartis en petits groupes dans la classe, les deux énoncés suivants :

(1) *Montrer, en utilisant les identités remarquables, que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.*

(2) *Est-ce que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers ?*

Au bout de dix minutes, s'il n'est pas intervenu du tout, il constate que la plupart des élèves qui cherchent le premier exercice en sont à travailler à partir des identités remarquables, en essayant diverses combinaisons ; les élèves qui travaillent sur le deuxième énoncé font encore des expériences avec des valeurs numériques pour essayer de se convaincre d'un résultat (vrai ou faux), sans avoir réfléchi à une méthode générale.

Si l'enseignant a posé aux premiers au bout de 5 minutes la question : "qu'est ce que vous avez à votre disposition pour aborder cet exercice ?" alors un certain nombre d'élèves, confortés par une réponse positive à leur proposition d'utiliser les identités remarquables, auront commencé à les adapter « comme il faut » ; si même il a posé cette question dès le début, à tout le monde, encore davantage d'élèves du premier énoncé auront fini et certains élèves du deuxième groupe auront commencé une résolution générale.

Nous allons nous occuper dans cet article de cette question des activités des élèves en fonction des énoncés et de la gestion de la classe.

Parmi les facteurs qui dépendent de l'enseignant et qui peuvent avoir une répercussion sur les apprentissages des élèves, nous retenons les exercices que l'enseignant choisit pour ses élèves : plus précisément nous proposons d'étudier des énoncés précis (à proposer aux élèves) et la manière dont ils peuvent être travaillés en classe. Cela nous renseigne en effet sur les activités (mathématiques) que chaque énoncé peut déclencher chez les élèves, et sur leurs conséquences éventuelles sur les acquisitions, à condition d'analyser ces activités en relation avec les apprentissages.

Dans cet article nous allons développer deux réflexions à ce propos : nous allons préciser quelques caractéristiques de la variabilité des activités mathématiques des élèves travaillant sur des exercices en classe, exercices repérés par leur énoncé ; nous allons simultanément dégager des critères de gestion de classe pour que cette variabilité puisse être associée à des apprentissages pour beaucoup d'élèves (moyens).

Ainsi nous admettons que l'enseignant a une certaine marge de manœuvre dans le choix des activités, dont dépend en partie l'apprentissage de ses élèves, même si beaucoup d'autres déterminants entrent en jeu (personnels, affectifs, sociaux). Et notre travail a pour ambition de contribuer à préciser cette marge de manœuvre, au moment de l'élaboration des énoncés et pendant le déroulement en classe du travail des élèves.

Il y a d'autres analyses des tâches proposées aux élèves[1], notamment celles qui permettent de reconstituer ce qui est abordé en classe dans la panoplie des tâches possibles. Ces analyses peuvent mettre en évidence certains manques, dont on peut inférer des conséquences sur les apprentissages. Notre point de vue ici est autre, complémentaire : ce ne sont pas des considérations organisées autour du savoir présenté aux élèves qui nous guident mais un questionnement centré sur le détail du travail de l'élève à partir des énoncés qui lui sont proposés.

Nous allons dans cet article d'abord dégager à partir d'un exemple, en partant du travail des élèves, ce que nous mettons sous ce mot activités et quels enjeux nous y voyons, (parties I et II). Puis nous exposerons alors une analyse des énoncés visant à déterminer ce que les élèves peuvent développer comme activité à partir de leurs connaissances, si la gestion de la classe est adaptée (partie III)

[1] Notamment en termes de praxéologies.

Nous indiquerons ensuite des conditions de gestion de la classe qui peuvent accompagner les propositions d'activités différentes, en précisant le travail de l'enseignant (partie IV). En effet, nous estimons que les « meilleurs » énoncés du monde, s'ils ne sont pas travaillés en classe de manière adéquate, ne provoquent pas ce qu'ils auraient pu enclencher[2].

Une rapide synthèse (partie V) présentera notre point de vue de chercheurs sur ces questions et nos perspectives.

Pour terminer, nous donnerons en annexe (partie VI) trois exemples d'analyses d'énoncés.

Donnons tout de suite quelques **précisions sur le vocabulaire** que nous utilisons dans ce texte.

Nous réservons le mot *activité(s)* à tout ce que dit, fait, pense un élèves pendant l'action, avant ou après. Cela peut avoir des traces, écrites ou orales, mais une partie est invisible.

Le mot *tâche* désigne ce qui déclenche une activité - ici un énoncé ou plus exactement une question d'un énoncé.

Nous associons à un énoncé une analyse des activités des élèves qu'il peut engendrer, notamment en étudiant ce que les élèves ont à faire de leurs connaissances. Par exemple s'ils doivent utiliser les identités remarquables en reconnaissant sur une forme non habituelle des groupements à effectuer, ou s'ils ont à les utiliser deux fois de suite de manière non indépendante, nous dirons qu'ils ont *adapté* cette connaissance et c'est ce qui nous intéresse dans cette activité.

L'enjeu des activités déployées par les élèves n'est autre en effet que l'apprentissage : c'est du moins l'entrée que nous avons choisie, nous restreignant à cet aspect qui dépend en large partie des choix de l'enseignant. Appliquer un théorème en remplaçant des données générales par des données particulières ou adapter ce théorème, en travaillant la manière de l'appliquer n'ont pas pour nous les mêmes conséquences en termes d'apprentissage, nous y reviendrons plus longuement.

Nous admettons enfin que, malgré les contraintes qui pèsent sur lui (dues notamment aux programmes, aux habitudes, aux attentes des élèves), l'enseignant a certains choix à faire sur les énoncés qu'il propose à ses élèves justement et sur la manière dont le travail en classe se déroule ; ces choix peuvent être fixés au bout d'un certain nombre d'années d'exercice, mais ils sont un des constituants de ce que nous appelons *la marge de manoeuvre* de l'enseignant. Ces choix portent sur les énoncés et les déroulements en classe : c'est ce qui définit la variabilité des activités qui nous occupe, associée à *une double dépendance*, en termes de tâches et en termes de conditions de travail des élèves (formes et aides).

I. Travail des élèves sur les exercices et activités mathématiques : premières idées à partir d'un exemple.

Rappelons que les activités mathématiques sur un exercice se définissent pour nous à partir du travail mathématique qui peut être réalisé par l'élève sur l'exercice. Nous ne travaillons pas spécifiquement ici sur la dernière phase de rédaction des

[2] Nous sommes en train de dire que nous savons bien que ne pas s'intéresser aux contenus n'est pas efficace, malheureusement ne s'intéresser qu'aux contenus ne suffit pas non plus.

exercices mais plutôt sur le travail d'élaboration de la résolution. Nous précisons bien que ce sont les *activités potentielles* que nous analysons, les activités que les (des) élèves peuvent faire à partir des énoncés dans le contexte précis de la classe. Nos recherches ne portent pas sur la réalisation effective par tous les élèves de ces activités[3].

Il s'agit alors de repérer dans un exercice (à partir d'un énoncé précis) les connaissances à mettre en jeu dans le travail qui va s'enclencher, sachant que selon les élèves ce sera plus ou moins réalisé. Nous nous centrons sur les notions visées par les apprentissages scolaires en cours : nous étudions les mises en fonctionnement qu'ont à faire les élèves de ce qui a été introduit dans l'enseignement, ou de ce qui va être introduit. Ce peuvent être des définitions, des théorèmes, des propriétés mais aussi des formules, des raisonnements, des méthodes etc.

Nous développerons ci-dessous la manière dont la mise en jeu des connaissances, étudiée par le biais de la comparaison entre ce que les élèves ont à leur disposition et ce qu'ils ont à en faire (appliquer, reconnaître, adapter, retrouver) peut conditionner les apprentissages.

Donnons un exemple d'activités, en décrivant les différences de mises en fonctionnement de connaissances mathématiques dans les activités provoquées par les quatre énoncés suivants, proposés en terminale S. Signalons que beaucoup d'énoncés peuvent ainsi être transformés en ouvrant la question, supprimant les indications (voire supprimant des intermédiaires).

(1) *Montrer, en utilisant les identités remarquables, que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.*

(2) *En utilisant les nombres complexes, montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.*

(3) *Montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.*

(4) *Est-ce que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers ?*

Essayons de préciser les activités des élèves sur ces énoncés.

Dans le premier énoncé, il s'agit pour les élèves d'adapter les identités remarquables connues, par exemple de la manière suivante.

Soient $m^2 + n^2$ et $p^2 + q^2$ les deux nombres initiaux (m, n, p, q entiers relatifs) : on a

$$\begin{aligned}(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) &= m^2 p^2 + n^2 q^2 + m^2 q^2 + n^2 p^2 \\ &= (mp + nq)^2 + (mq - np)^2 = (mp - nq)^2 + (mq + np)^2.\end{aligned}$$

[3] Même si nos recherches se fondent sur les transcriptions des déroulements effectifs.

On développe le produit des deux nombres, puis il faut reconnaître deux carrés à interpréter comme « début » d'un nouveau carré et repérer qu'il faut utiliser une fois une somme et une fois une différence pour annuler les deux doubles produits introduits.

Enfin il faut signaler que $mp \pm nq$ et $mq \pm np$ sont des entiers relatifs (en rappelant les propriétés de **Z**).

Les connaissances à adapter sont donc les identités remarquables, les adaptations consistent à reconnaître précisément comment les utiliser (deux fois et de manière non indépendante).

Dans le deuxième énoncé, il s'agit d'utiliser les modules des nombres complexes :

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = |m + in|^2|p + iq|^2 = |mp - nq + i(mq + np)|^2.$$

Il faut d'abord reconnaître que $m^2 + n^2$ représente le carré du module de $m + in$, puis utiliser le théorème qui exprime le produit des modules comme le module du produit.

Dans le troisième énoncé, il s'agit de trouver une méthode pour démontrer le résultat.

Dans le quatrième énoncé, il s'agit d'expérimenter pour se faire une idée du résultat (vrai ou faux), et ceci enclenche plutôt un travail sur des connaissances numériques élémentaires, qui ne mettent pas nécessairement d'ailleurs sur la voie d'un outil formel efficace.

Autrement dit ce ne sont pas les mêmes connaissances qui sont mises en fonctionnement, ou pas de la même façon dans les trois cas : calculs élémentaires et conjecture ou adaptations de connaissances algébriques ou sur les complexes (conscientes ou automatiques).

Voici définies nos analyses d'activités : il s'agit de prévoir les mises en fonctionnement des connaissances provoquées chez les élèves lorsqu'ils résolvent les exercices.

Ces analyses sont donc nécessairement relatives à un niveau scolaire donné et à l'histoire d'une classe donnée. On essaie de mettre en rapport l'utilisation demandée dans un exercice et le bagage des connaissances actuelles des élèves, exposées dans l'année en cours ou déjà travaillées (dans les années antérieures).

II Travail des élèves sur les exercices et activités mathématiques : enjeux à partir de l'exemple précédent.

Mais ces analyses d'activités ne nous intéressent que dans la mesure où elles ont un enjeu sur **les apprentissages des élèves,** même si nous ne pouvons pas préciser complètement la relation locale entre telle activité et tel apprentissage.

Pour des élèves de terminale S par exemple, le premier énoncé ci-dessus n'a pas d'enjeu par rapport aux nouvelles connaissances, mais il permet de réactualiser les identités remarquables, de les inclure dans un champ de problèmes plus vaste que celui des calculs algébriques traditionnels, ce qui peut être un objectif (du côté des mises en relation et de l'organisation des connaissances).

Le deuxième énoncé a un autre enjeu : adapter des connaissances en cours d'acquisition, reconnaître le module, faire fonctionner le théorème sur le module d'un produit (mais pour des nombres particuliers et en « partant » du produit des modules).

En revanche si le dernier énoncé peut motiver les élèves (ou certains d'entre eux), il peut très bien ne pas du tout mettre sur la voie d'un outil adapté, si les élèves en restent à une exploration numérique qui ne porte pas en elle-même le passage à l'algébrique. Pour résoudre il faut en effet abandonner l'expérience numérique, qui n'a pas conduit à utiliser les identités remarquables, et revenir au calcul formel. C'est une expérience qui ne sert pas de tremplin à la résolution[4]. L'enjeu peut être alors de montrer aux élèves cette limitation de l'expérimental.

Nous admettons[5] que ce qu'apprend un élève à qui on ne proposerait, par exemple, que des applications simples et isolées des théorèmes du cours pourrait être enrichi si on lui proposait aussi autre chose, d'autres applications, non isolées ou moins simples. Bien sûr la première fois il risque de ne pas réussir à donner une solution de l'exercice, sans doute sera-t-il arrêté. Mais nous suggérons que s'il doit résoudre suffisamment souvent des énoncés différents, en recevant des aides adéquates, il apprendra à la fois à chercher et à utiliser autrement ses théorèmes, autrement dit il enrichira ses connaissances. Les enrichissements auxquels nous pensons sont l'accès à des démarches mathématiques pas uniquement algorithmiques, à une certaine généralité des outils et à une certaine organisation des connaissances. Un théorème a un caractère général (abstrait, conceptuel, décontextualisé), et il faut des applications diverses pour en saisir la généralité. De même un théorème s'inscrit dans un champ de connaissances et il faut des applications variées pour saisir sa place, lui donner de plus en plus de sens. Enfin si plusieurs fois les élèves sont confrontés à une certaine recherche, ils « s'y font ».

Bien sûr il y a des limites à cette démarche, dues au temps de l'apprentissage, toujours trop court (et la tendance actuelle est encore pire), aux diversités des élèves (de moins en moins « motivés », pour reprendre une expression consacrée), au fait qu'il peut être difficile de trouver des « bons » problèmes sur toutes les notions, au fait que le travail correspondant pour les enseignants est difficile et non habituel.

Nous admettons qu'une certaine variabilité des activités proposées aux élèves, obtenue grâce à des énoncés diversifiés, adaptés à la notion visée et à la classe considérée, accompagnés par une gestion adéquate, peut favoriser les apprentissages, en améliorer la qualité, notamment pour les élèves « moyens ».

III Travail sur les exercices : les analyses d'énoncés en fonction des activités potentielles des élèves

Plusieurs caractéristiques générales des énoncés peuvent intervenir qui modifient le travail mathématique des élèves (avant même le déroulement, pendant lequel d'autres modifications peuvent prendre place).

---

4 C'est souvent le cas pour les expériences sur la calculatrice, sauf parfois en arithmétique.

5 L'explication est simpliste pour mieux faire comprendre le propos.

1) La forme des questions, la nature des indications, le découpage des énoncés.

D'abord l'ouverture (ou la fermeture) des questions posées et les indications des connaissances à utiliser (absentes ou partielles ou complètes) amènent des activités différentes.

Un exercice du type « montrer que... en utilisant ... » permet par exemple de mettre en fonctionnement un outil précis, c'est cette utilisation (qui est souvent la contextualisation d'une propriété générale) qui peut être apprise ainsi.

En revanche une question ouverte est rarement associée à une application directe de connaissance, ne serait-ce qu'à cause du doute initial sur ce qui est à montrer exactement.

Puis la nécessité (ou non) d'introduire des intermédiaires[6] ou des étapes, à l'initiative des élèves, a aussi des conséquences en termes d'activités (et d'apprentissage). S'il y en a, cela permet éventuellement une appréhension un peu globale des connaissances en cause, cela amène à associer des questionnements et des démarches mathématiques.

2) Les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances

Nous distinguons plusieurs niveaux d'utilisation des connaissances, induits par diverses formes d'énoncés (niveaux relatifs aux connaissances actuelles[7] des élèves). Un même exercice peut en effet donner lieu, selon l'énoncé, à des applications différentes des mêmes outils. Ayant à utiliser une certaine connaissance (théorème, définition, propriété, formule, méthode, raisonnement, etc.) dans un exercice, selon l'énoncé les élèves peuvent n'avoir à mettre en œuvre que des applications simples et isolées (techniques) qu'on leur a indiquées ; il se peut qu'ils aient à trouver des adaptations pour mettre en œuvre la connaissance ; il se peut enfin qu'ils aient à introduire eux-mêmes la connaissance, sans avoir eu aucune indication en ce sens (si c'est réussi, on dit alors que ces connaissances sont disponibles chez les élèves). Bien sûr on s'intéresse surtout aux connaissances qui ne sont pas encore totalement acquises par les élèves.

a) Les énoncés qui conduisent à des applications simples et isolées

Souvent ce sont des énoncés où il ne reste à l'élève qu'à remplacer dans un théorème, par exemple, des valeurs générales par des valeurs particulières. Il y a un certain automatisme en jeu.

Donnons un exemple : on propose l'énoncé suivant de l'exercice proposé ci-dessus.

Les nombres m, n p, q *sont des entiers relatifs ;*

1) *Ecrire* $m^2 + n^2$ *en fonction du module du nombre complexe* m+in *(resp. d'un nombre complexe).*

2) *Procéder de même pour* $p^2 + q^2$.

---

[6] Notations, constructions, décision d'étudier les variations d'une fonction auxiliaire, etc.

[7] Connaissances supposées acquises ou en cours d'acquisition – ces analyses sont entièrement relatives à une classe donnée.

3) *En déduire une expression du produit* $(m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$ *en fonction du module d'un seul nombre complexe à expliciter.*

Pour les élèves de terminale il y a à appliquer de manière simple et isolée successivement la définition du module (deux fois), le théorème donnant le module d'un produit en fonction des modules des facteurs et le calcul de ce produit. Que peuvent apprendre les élèves ce faisant ? Que peut vérifier un enseignant sur les connaissances de ses élèves ?

L'enjeu est l'utilisation du cours dans un contexte particulier (on n'a pas utilisé les mêmes lettres, on doit mettre en œuvre un théorème dans un cas particulier). La démarche est de rechercher les outils du cours à mettre en œuvre à partir de « leur nom » et à les appliquer. Notons que la « morale » de l'exercice (stabilité de ces entiers) peut échapper totalement aux élèves.

Nous sommes dans le champ des applications simples et isolées, simples parce qu'elles mettent en jeu une contextualisation immédiate, une seule fois, isolées parce qu'elles ne mettent en jeu qu'une connaissance à la fois.

Notons que l'observation de certains élèves amène à penser que pour eux il y a en fait déjà une adaptation dans la reconnaissance du carré du module. C'est un exemple du fait qu'on repère mieux les adaptations éventuelles imprévues que font les élèves si on a analysé l'énoncé avant de le proposer en prévoyant (au moins partiellement) les activités qu'il peut enclencher.

b) Les énoncés d'exercices dont la résolution nécessite une certaine disponibilité des connaissances

Ces énoncés induisent la mise en fonctionnement à bon escient d'une connaissance non indiquée dans l'énoncé (ni directement ni indirectement).

Par exemple le recours aux modules dans le troisième énoncé du début de l'article : si un élève utilise les nombres complexes pour faire cette démonstration alors même qu'il n'en a pas été question dans l'énoncé, on évoquera un niveau de fonctionnement de l'ordre du disponible (sauf si l'exercice fait partie d'une liste d'exercices sur les modules des nombres complexes).

Il en est de même pour le théorème de Pythagore dans l'énoncé suivant :

Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés (pour des élèves de seconde).

Si l'énoncé était : *En utilisant le théorème de Pythagore, construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés*, on ne construirait pas cette disponibilité ; il resterait cependant aux élèves à adapter cette connaissance (le théorème de Pythagore) à la situation proposée ; cette application n'est en effet pas simple, car il faut reconnaître que le côté du triangle cherché s'obtient à partir des côtés donnés en construisant par exemple l'hypoténuse d'un triangle rectangle convenable ou la diagonale d'un rectangle convenable ; elle n'est pas non plus isolée car d'autres connaissances interviennent en même temps (formule de la surface d'un triangle équilatéral). Sans l'indication, les élèves doivent en plus reconnaître que c'est le théorème de Pythagore qui peut être utilisé dans la dernière étape, ce travail de mise en relation entre un problème précis et le théorème a pour objectif de rendre disponible le théorème.

N'est ce pas le propre de la résolution de problème de permettre de vérifier la disponibilité des connaissances, les possibilités d'adaptabilité des connaissances et de recontextualisation.

Les objectifs de disponibilité ne sont relatifs qu'à une partie des connaissances d'une année donnée, voire à des connaissances des années antérieures. Ils sont particulièrement travaillés dans les problèmes « transversaux », de synthèse, où il n'y a pas d'indices externes pour deviner les connaissances à mettre en jeu (comme le titre d'un chapitre par exemple).

Nous pensons[8] qu'il est intéressant de proposer des énoncés mettant en jeu ce niveau de fonctionnement pour permettre aux élèves à la fois d'acquérir et de cultiver la disponibilité de certaines de leurs connaissances. En effet les élèves doivent organiser leurs connaissances mathématiques, placer les nouvelles connaissances dans le champ de ce qu'ils ont déjà travaillé. Or souvent les contraintes de temps amènent à privilégier les exercices pour apprendre ce qui est nouveau, et les connaissances plus anciennes « dorment » tranquillement. Nous suggérons que les apprentissages peuvent être complétés par des exercices mettant en jeu une certaine disponibilité de connaissances, à la fois nouvelles ou moins nouvelles, où les élèves ne savent pas à l'avance ce qui va servir : la recherche de ce qui peut servir donne du sens aux connaissances nouvelles, et peut même contribuer ainsi à une mise en fonctionnement correcte, elle amène aussi à organiser les connaissances. Des travaux antérieurs (Chevallard) ont montré que les élèves apprennent à mieux utiliser leurs connaissances algébriques lorsqu'elles interviennent, sans que ce soit annoncé[9], comme outils dans d'autres problèmes. On connaît aussi l'intérêt des changements de cadres dans cette construction du sens : un des moyens pour proposer un énoncé comportant un travail sur la disponibilité est de prévoir une solution économique qui ait des chances de faire changer les élèves de cadre (sans l'indiquer[10]).

c) Les applications intermédiaires, non simples ou /et non isolées : diverses adaptations, divers contextes.

Parmi les applications non simples d'une connaissance, on rencontre des utilisations répétées non indépendantes, des utilisations multiples, des reconnaissances partielles de ce qui doit être appliqué, de la manière de l'appliquer, des adaptations (calculatoires par exemple).

Tout énoncé sans indication permet d'assurer qu'une application n'est pas simple, puisqu'il faut reconnaître en partie ce qu'il y a à faire.

De même pour tout énoncé qui nécessite d'introduire des étapes ou des intermédiaires (notations, calculs, points à construire…).

Tout énoncé ouvert permet d'assurer un travail préliminaire pour établir ce qui est à montrer (aller-retour).

Les applications non isolées permettent l'utilisation de plusieurs connaissances (y compris anciennes), les mises en relation et interprétations (changements de cadres, de registres), le travail avec plusieurs questions liées.

---

[8] Avec d'autres ! Tous les problèmes ouverts et les recherches correspondantes s'inscrivent dans des réflexions proches des nôtres.

[9] Et sans que ce soit l'objectif de l'exercice

[10] Ce que Douady (1986) appelle un jeu de cadres

IV Travail sur les exercices et activités mathématiques des élèves : le double travail de l'enseignant

Précisons d'abord que nous nous plaçons dans le cadre du travail en classe.

Nous pensons qu'on ne peut pas prétendre en effet ne poser des exercices ou des problèmes comportant des adaptations uniquement à la maison, comme c'est le cas pour des élèves forts. En effet les élèves moyens ne vont pas trouver tout seuls, et ne disposent pas tous de copains ou de famille pour les aider (ce qui peut être déjà utile !). Nous admettons l'importance d'obliger les élèves à chercher en classe, à être confrontés à des démarches qui ne conduisent pas immédiatement au résultat.

Dans ces conditions, les effets des activités proposées dépendent à la fois

* des énoncés choisis par l'enseignant (premier travail - préparation),

* des formes de travail adoptées en classe et des accompagnements de l'enseignant (deuxième travail – accompagnement en classe).

Ainsi, quel que soient les énoncés proposés (et leur élaboration comporte un premier enjeu), pour nous le succès de l'entreprise dépend aussi de la gestion de la classe pendant le travail des élèves.

Donnons quelques précisions à ce sujet. Les justifications de nos affirmations sont théoriques, elles font référence à nos hypothèses didactiques et nous ne les évoquerons pas ici en détail[11]. Elles résultent en particulier d'un travail d'adaptation aux mathématiques et à la situation scolaire des théories de l'apprentissage, travail éprouvé par de nombreuses expériences. Ces hypothèses mettent en jeu différents leviers qui peuvent intervenir dans les apprentissages. Nous admettons ainsi que les situations de constructions des connaissances par les élèves ont leur importance, mais aussi les situations de recherches collectives, avec les conflits qu'elles peuvent générer et permettre de dépasser. Les interventions de l'enseignant peuvent servir à institutionnaliser (dégager, généraliser, décontextualiser) des connaissances déjà partiellement mises en fonctionnement par les élèves, dans des contextes particuliers. L'enseignant peut aussi intervenir pour que les élèves s'approprient ce qu'il expose, ce qui est possible dans la mesure où il réussit à placer ses propos dans la zone proximale de développement des élèves[12] ; l'observation attentive des élèves en phases de recherches peut contribuer à ce que l'enseignant perçoive chez ses élèves ces connaissances « presque là ».

1) L'énoncé ne suffit pas à garantir un apprentissage, la qualité du travail sur l'énoncé en est partie prenante.

Rappelons que pour que les élèves soient capables d'adapter leurs connaissances et puissent les organiser, une condition nécessaire consiste à leur proposer des activités où c'est indispensable. Mais cela ne suffit pas : il faut le faire plusieurs fois, dans différents contextes, et cela sous-entend de leur laisser le temps de chercher seuls (sans le professeur). Cela ne veut pas dire en l'absence du professeur, mais sans indications majeures immédiates du professeur.

---

[11] Le livre *L'enseignement des mathématiques au lycée* donne un éclairage global sur ces questions.

[12] Nous empruntons ce terme à Vygotski pour signifier que l'enseignant expose des connaissances qui ne sont pas encore tout à fait construites par les élèves mais qui sont très près de l'être. L'hypothèse de l'auteur est qu'alors l'imitation de l'enseignant suffit à faire « apprendre ».

2) Des conditions nécessaires

Il nous semble important de respecter bon nombre des cinq conditions suivantes pour poser en classe des exercices ou problèmes qui ne sont pas des applications immédiates, simples et isolées, de connaissances du cours ; la première et la deuxième conditions nous semblent en tout état de cause indispensables.

* Respecter un vrai temps de recherche pour les élèves (qui doit dépasser plusieurs minutes).

* Conserver une certaine fréquence de recherches de tels problèmes en classe pendant l'année (il faudrait sûrement mieux caractériser ces "tels problèmes").

Il s'agit d'établir grâce à ces deux conditions un contrat (attentes, habitudes), des modes de travail, qui amènent les élèves à s'investir même s'ils ne trouvent pas tout de suite, notamment sans attendre immédiatement de l'enseignant une piste.

* Organiser un travail en petits groupes (qui aide à gérer une recherche non immédiate, pour des élèves un minimum socialisés).

On peut donner de nombreux exemples de gestion de recherches de problèmes ouverts : il faut savoir organiser la confrontation des points de vue, et en faire tirer bénéfice aux élèves[13].

* Dispenser des aides adaptées au travail précis des élèves en phase de recherche.

Donnons un exemple de ce que nous entendons par là. Supposons que des élèves de seconde, travaillant en petits groupes, soient en train de bloquer sur un exercice de recherche de l'équation de la médiatrice d'un segment [AB], les coordonnées des deux points A et B étant données. On suppose l'énoncé réduit à : *trouver l'équation de la médiatrice.* Les élèves appellent l'enseignant après 10 minutes de travail. Celui-ci peut leur donner plusieurs types d'aides, en fonction de ce qui a déjà été fait. Certaines aides ne font que relancer les élèves, leur donner le courage de persévérer. D'autres contribuent à fermer plus ou moins les questions, à faciliter les adaptations, sans nécessairement les supprimer. Leurs effets dépendent du rapport entre l'état initial des élèves et l'indication donnée.

Si les élèves n'ont absolument aucune idée pour démarrer l'exercice, l'enseignant peut leur suggérer de se rappeler ce qu'ils ont à leur disposition comme définition de la médiatrice. Il leur enlève ainsi l'initiative de cette étape (se questionner sur la médiatrice) mais il leur propose une question encore très ouverte. Il ne faut pas trop espérer en revanche que cette première étape (méthodologique) pourra être franchie ultérieurement par ces élèves sans aide.

Si les élèves sont en train de s'embourber dans un calcul dont l'inspiration est correcte, il peut simplement les relancer, en leur disant "continuez". Cela leur indique qu'ils peuvent persévérer sans perdre tout leur temps, mais cela ne change pas leur « état » mathématique. Un des bénéfices éventuels escomptés tient à leur réussite finale

[13] On peut se reporter par exemple à l'article de Repères Arsac G. et Mante M. (1983) Des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle, Petit x, 2, 5-33, Grenoble.

du calcul, même pénible et maladroit, mais obtenue par eux seuls. Une correction améliorant ou facilitant le calcul pourra aussi enrichir ces élèves, sensibilisés sur le moment à ce type de détails.

Si les élèves se sont trompés en confondant les équations de la médiatrice et de la droite qui porte le segment par exemple, l'enseignant peut leur demander de rappeler les données du problème et de repréciser ce qu'ils cherchent.

* Garantir des bénéfices visibles pour les élèves est une dernière condition qui s'impose.

En effet il faut que les élèves y trouvent leur compte. On pourrait dire qu'il s'agit de forcer les élèves à pratiquer des mathématiques autrement qu'en mode algorithmique, mais avec des avantages pour eux. Ce peut être des valorisations symboliques, le plaisir de chercher, de discuter et de trouver, le fait de progresser, des bonnes notes, des points apportés à la démarche et pas seulement aux résultats finaux, etc. Ce peut être aussi l'expérience d'un mode de travail qui porte ses fruits à moyen terme, et qui peut être reproduit dans d'autres conditions.

3) Un rôle difficile pour l'enseignant (quel bénéfice pour lui ?)

Un premier avantage, intermédiaire, tient à ce que les analyses prévisionnelles en termes d'activités d'élèves permettent souvent à l'enseignant de repérer des difficultés imprévues initialement. Il est plus en mesure de comprendre grâce aux réactions des élèves que certaines question comportent des adaptations imprévisibles a priori, de rectifier certaines attentes inconsidérées par des interventions fonction des connaissances effectives des élèves, ou même de vérifier la justesse de ses analyses : ce n'est pas désagréable, et cela occupe bien les moments de silence.

Les autres avantages sont plus différés : ils tiennent en grande partie aux élèves et à leurs réactions positives, pas toujours immédiates, devant ce travail diversifié.

Mais cette gestion demande aussi à l'enseignant de déployer des activités difficiles. Il lui faut écouter ce que les élèves disent (se taire activement), l'interpréter, voire anticiper, improviser des aides intermédiaires entre la solution et les démarches des élèves. Il lui faut introduire des compléments, y compris méthodologiques (relances, bilans après la recherche). Le cas échéant il lui faut même synthétiser les approches des élèves pour présenter un bilan et la correction.

En particulier, il lui faut admettre d'entendre patiemment, sans réagir, le mélange de mathématiques « propres » et moins propres que les élèves mettent en œuvre : ainsi doit-il se taire, laisser faire des expériences, des conjectures, entendre les élèves « faire feu de tout bois », se placer au niveau du générique ou de l'exemple et pas seulement reconnaître d'abord le théorème qui sert. Nous insistons sur ce point : l'acquisition d'un théorème très général peut passer par des utilisations répétées de versions « faibles »[14] de ce théorème (sur des exemples). Pensons à Diophante et aux résolutions d'équations du second degré expliquées sur deux exemples devenus « génériques ». Tant qu'on ne dépasse pas l'application du théorème cela peut suffire... Le travail très particulier de

---

[14] Incomplètes, pas tout à fait justes car les élèves ne réalisent pas que certaines conditions sont de fait remplies.

l'enseignant consiste alors à compléter ou à préciser ce qui a été utilisé, à dégager la forme générale, en s'appuyant sur ce qui a été fait.

Enfin, il est plus difficile de relancer une question sans contenter le besoin de réponse des élèves, de résister à la pression que de répondre, cela demande d'être sûr de soi et cela implique une négociation continuelle avec les élèves qui tirent toujours dans l'autre direction.

De fait, nous nous sommes rendus compte pendant des stages de formation continue que c'est souvent la difficulté de la gestion attendue par le formateur qui joue comme un alibi massif pour amener le refus d'une activité un peu différente des activités habituelles, beaucoup plus que le travail d'élaboration de l'énoncé, plus gratifiant. Les arguments les plus fréquents tiennent au temps et à la difficulté de récupérer les élèves après une phase de « vraie » recherche. *Tel énoncé est bien intéressant mais prendrait trop de temps, compte tenu du programme, tel autre énoncé intéresserait peut-être les élèves mais il faudrait les laisser chercher trop longtemps (premier obstacle), et en plus cela pourrait entraîner un certain chahut, les élèves ayant fini perdraient leur temps, on ne pourrait pas corriger tout en même temps...*

Il faut beaucoup de temps aux enseignants pour modifier même partiellement les modes de fréquentation des mathématiques qu'ils construisent dans leur classe ; et le double travail d'élaboration d'énoncés adéquats et de gestion adaptée semble très difficile, et ne comporte pas toujours assez de bénéfices immédiats. Sans parler des classes où il est impossible de laisser chercher les élèves, qui ne comprennent pas cette règle du jeu.

En définitive, et malgré les difficultés, un intérêt essentiel pour l'enseignant de modifier la pratique du travail mathématique proposé aux élèves tient à la perspective d'une amélioration à court ou moyen terme des apprentissages : en faisant fonctionner les élèves « plus près » de l'activité mathématique réelle.

V Synthèse et perspectives (retour aux recherches)

En jouant sur l'ouverture de l'énoncé, les indications, les étapes, et le niveau de mise en fonctionnement, nous indiquons donc des moyens pour faire varier pour les élèves les mises en fonctionnement (potentielles) des théorèmes nouveaux, des formules, définitions, raisonnements, etc.

L'hypothèse que nous suggérons s'énonce simplement. Il s'agirait d'éviter de ne proposer aux élèves que des applications simples et isolées, même si c'est tentant dans les classes faibles, et d'éviter aussi de ne proposer que des applications difficiles. Sinon, cela amène les élèves à algorithmiser ou bien les applications ou bien la recherche d'astuces et à simplement les mémoriser plutôt qu'à construire des démarches avec leurs connaissances mathématiques, à se poser des questions, à prendre une petite distance. Nous proposons ainsi d'élaborer à la fois des énoncés mettant en jeu des applications simples et isolées et d'autres adaptations variées, différentes selon les classes. Il s'agit d'habituer les élèves à chercher, à gérer une certaine incertitude et d'arriver à leur faire ainsi construire des connaissances plus conceptuelles, plus organisées, tout en apprenant les algorithmes indispensables. Ensuite c'est évidemment la classe, le temps, le programme, ses goûts qui permettront à l'enseignant de choisir ses gammes, mais peut-être en meilleure connaissance de cause.

Seulement ce n'est pas aussi simple que le « programme » ci-dessus semble l'indiquer. Nous avons déjà indiqué la difficulté pour l'enseignant de gérer ce travail de recherche des élèves qui doit accompagner les mises en fonctionnement complexes si on veut leur garder tout leur sens. Mais même si les élèves travaillent réellement, ce n'est pas toujours organisé de manière très stricte, et les frontières entre les moments de travail et les moments d'écoute sont floues (cf. cours dialogué), et il peut être difficile d'organiser autrement la classe.

Des recherches récentes[15] menées dans les classes[16] semblent ainsi indiquer les tendances suivantes : ou bien effectivement les enseignants proposent d'emblée surtout des énoncés qui amènent des mises en fonctionnement isolées, si ce n'est simples et isolées, quelles que soient les conditions de travail ; sinon ils proposent des énoncés comportant des adaptations mais sont évidemment obligés d'intervenir pendant le travail des élèves, même si ce n'est que pour les relancer. Or nous avons constaté que, quelles que soient les conditions de travail, les accompagnements pendant les séances modifient souvent les tâches des élèves ; de plus elles ont davantage pour effet d'isoler les mises en fonctionnement que de les simplifier. La volonté de faire mettre en jeu assez rapidement dans la séance les connaissances à acquérir (pour les faire acquérir) peut accentuer cette tendance, compte tenu de la constante pression du temps bien entendu : il faut « nettoyer » les questions pour que finalement les élèves appliquent, et apprennent ainsi à appliquer, exactement ce qui est visé (au moins). Tout se passe comme si souvent les enseignants voulaient mettre les élèves assez vite juste « au pied du mur » de ce qui est en jeu. Les ouvertures, les adaptations, les choix, en un mot les dévolutions qui restent du côté des élèves portent plus sur les aspects calculatoires (au sens large) que sur la question des méthodes à choisir, les mélanges de connaissances, les changements de points de vue, les mises en relations ou les interprétations.

On peut alors se demander si ces constats ne révèlent pas des habitudes profondes et résistantes des enseignants, habitudes qui se sont forgées pour fournir aux enseignants une réponse relativement économique et « raisonnable » aux contraintes de la classe[17]. On peut supposer que seul un travail en profondeur, collectif, initié dès les premières années d'enseignement pourra modifier ces habitudes. Le chantier des recherches à venir est donc considérable, que ce soit pour mettre davantage en évidence ces habitudes ou pour élaborer des stratégies alternatives raisonnables.

---

[15] D'autres aspects avaient déjà été pointés dans les travaux de didacticiens comme Comiti, Grenier (1997).

[16] Il s'agit surtout de recherches en cours, Pariès (thèse), Vandebrouck (travail sur les invariants individuels des pratiques), Robert et Vandebrouck (2000), Groupes de formation continue de Toulouse et Versailles (brochure IREM en cours d'éléboration sur les analyses d'énoncés).

[17] Roditi dans sa thèse (2000) montre d'autres « principes » du même ordre.

VI Annexe : des exemples d'analyses d'énoncés, du point de vue des activités des élèves et de la gestion

1) Différentes activités mathématiques des élèves et choix de gestion des enseignants pour des énoncés de géométrie proches

Voici trois énoncés proches en géométrie (terminale S). Essayons de les analyser en termes d'activités mathématiques des élèves et dégageons des choix de l'enseignant (on est au niveau terminale, on attend que les élèves utilisent les nombres complexes).

(i) *Soit* ABC *un triangle,* BCGF *et* ABDE *deux carrés extérieurs au triangle construits sur deux de ses côtés. Montrer que* AF = CD *et que les droites* (AF) *et* (CD) *sont perpendiculaires.*

(ii) *Soit* ABCD *un quadrilatère et les triangles rectangles isocèles* AA'B, BB'C, CC'D, DD'A *construits extérieurement sur ses côtés. Montrer que* A'C' = B'D' *et que les droites* (A'C') *et* (B'D') *sont perpendiculaires. [Dans quels cas* A'B'C'D' *est-il un parallélogramme ?]*

(iii) *Traduire sur les affixes des sommets d'un triangle* ABC *le fait qu'il est rectangle isocèle en* A.

Ces énoncés peuvent provoquer des applications *non isolées* des connaissances sur les complexes car on mélange deux cadres (géométrique et numérique) et plusieurs utilisations des complexes (traduction des rotations, travail sur les modules et les arguments) *; non simples* car on peut choisir un repère, ou ne pas en privilégier un (c'est un choix raisonné) pour appliquer les outils connus sur les nombres complexes, traduire sur les affixes correspondants le fait que certains des points forment un carré ou un triangle rectangle isocèle (plusieurs applications répétées non indépendantes), interpréter géométriquement une égalité sur des complexes ou travailler dans le cadre algébrique à partir de deux égalités.

Dans le premier exercice, il y a deux démarches géométriques assez simples (utilisation des cas d'égalité des triangles, utilisation d'une rotation). On peut aussi utiliser les vecteurs (norme et produit scalaire). L'utilisation des complexes est donc assez artificielle, cependant si on l'indique cela force à comparer des méthodes.

Dans le deuxième énoncé en revanche, la solution « complexes » est plus rapide (autrement plusieurs rotations ou similitudes sont à trouver). Ne pas indiquer ce cadre de travail peut amener les élèves à en apprécier l'indication, qu'ils la trouvent seuls ou qu'on la leur donne au bout de 10 minutes. L'indiquer risque aussi d'engager les élèves dans le (faux) problème du choix d'un repère.

Dans le troisième, on a un problème algébrique : on peut « ramasser » l'information $c-a = \pm i(b-a)$ en une seule, obtenue en faisant le produit de deux égalités à $0 : (c-a)^2 + (b-a)^2 = 0$.

Plusieurs « variables » se présentent ainsi pour l'enseignant : dans chaque énoncé il peut indiquer ou non une méthode (ici les complexes), indiquer ou non un repère.

D'autre part, beaucoup d'enseignants seront tentés d'accélérer la recherche des deux premiers exercices en posant la question suivante, éventuellement après une question d'élève : *qu'est ce que vous allez choisir comme repère ?* L'idée ici, inhabituelle pour beaucoup d'élèves, est qu'il est tout à fait inutile de privilégier un repère, qui disymétriserait les calculs sans les simplifier.

Cette question du choix du repère constitue à nos yeux une indication qui change les activités des élèves, alors même qu'elle est ouverte. On attire en effet leur attention sur cette question, on renforce l'idée que c'est une bonne question, en un mot on leur enlève l'élaboration (la prise de conscience) de la question, même si on leur laisse donner une réponse. On peut parier que dans le prochain exercice analogue, beaucoup d'élèves n'auront pas progressé sur ce point, et qu'il faudra reposer la même question (ou l'indiquer).

On peut ajouter que le fait de donner un nom ou non (a, b, c) aux affixes des sommets du triangle dans le troisième énoncé donne une indication implicite au sujet du repère – nommer ainsi les affixes revient à prendre un repère quelconque…

2) Une analyse précise en termes de niveaux de mises en fonctionnement des activités des élèves sur un exemple en analyse (première S)

On s'intéresse à l'énoncé suivant[18] :

Soit la courbe d'équation : $y = x^3 + x + 1$ *(x est réel). La courbe admet-elle une ou des tangentes ayant pour coefficient directeur* 4 *?*

La question *est ouverte et sans indication explicite de méthodes*, ce qui peut garantir une certaine recherche des élèves, si toutefois ce type d'exercice est proposé pour la première fois après le cours correspondant et si, bien entendu, la gestion de la classe permet la recherche.

Niveau de mise en fonctionnement de la notion visée

Le lien tangente/coefficient directeur intervient de façon non isolée et non simple : l'application de la formule « équation de la tangente » ne permet pas de résoudre entièrement la question, on n'a besoin que du nombre dérivé, ce qui n'est pas habituel, et on doit introduire une inconnue de manière inhabituelle.

De plus, on ne donne pas explicitement la fonction à dériver : une adaptation est donc nécessaire pour passer de la courbe donnée par son équation ($y = x^3 + x + 1$) à la fonction : $f(x) = x^3 + x + 1$, et pour comprendre qu'on utilisera le nombre dérivé de cette fonction, qui n'a pas été donnée en tant que telle.

Ensuite, et cela renforce le caractère non isolé de la tâche, il faut traduire la recherche de l'existence d'une tangente de coefficient directeur 4 en l'existence de points de la courbe admettant une tangente de coefficient directeur 4, ces points étant en fait caractérisés par leur seule abscisse x qui interviendra dans la formule $f'(x) = 4$ (deux changements de point de vue successifs).

---

[18] Cet énoncé a été élaboré et travaillé par un groupe d'enseignants en formation continue de l'académie de Versailles (2000-2002).
Des exemples analogues ont été travaillé par un groupe d'enseignants en formation continue de l'académie de Toulouse.

Enfin les données sur la tangente semblent mélanger deux registres (cadres) : le registre géométrique (droite « tangente ») et le registre analytique (coefficient directeur de la droite, 4). Si on part du premier registre (géométrique), on serait amené à traduire le 4 dans ce registre – on ne sait pas le faire géométriquement. La tangente géométrique n'existe pas en classe, seul le dessin de la tangente à partir de son équation ou grâce à une touche de la calculatrice est connu... Il faut donc absolument pour faire la démonstration se ramener au registre analytique, et introduire la tangente à partir de la fonction et des dérivées. Mais on peut se donner une idée des solutions (expérimentalement) avec la calculatrice, sans que cette expérience fasse autre chose qu'assurer de l'existence de deux tangentes solutions : simplement le travail mathématique de démonstration, nécessairement analytique ici, non seulement reste entier mais encore ici ne découle pas de cette démarche expérimentale.

L'observation des séances en classe[19] a permis de préciser comment les enseignants peuvent encore négocier avec les élèves pour que certains arrivent à adapter leurs connaissances, même si d'autres élèves finissent par avoir gain de cause et ne font qu'appliquer leur formule donnant la tangente à une courbe en un point de la courbe, toutes les adaptations ayant été indiquées par l'enseignant

3) Divers énoncés qui permettent que les élèves mettent en oeuvre diverses adaptations du théorème de Thalès (à partir de la fin du collège).

Nous faisons abstraction ici de la gestion réelle du travail des élèves - ces analyses restent du domaine du potentiel.

Nous proposons quelques exercices indépendants que l'on peut proposer pour certains à partir de la fin du collège, pour d'autres plutôt ensuite, lorsqu'on dispose de la version « vectorielle » du théorème (même si nous n'utilisons ici que la version affine). Notre objectif est d'illustrer différentes adaptations que les élèves peuvent mettre en oeuvre à partir du théorème de Thalès.

(a) Les premières **adaptations** qui ne sont donc pas des applications simples du théorème, consistent à le faire appliquer plusieurs fois, et de manière non indépendante, pour résoudre une même question.

Par exemple dans l'énoncé suivant (qu'il faudrait adapter si on le proposait au collège) :

ABCD *est un parallélogramme, une droite passant par* C *coupe* (AB) *en* E *et* (AD) *en* F. *Montrer que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = 1 \quad \textit{(voir la figure 1).}$$

[19] Cf. brochure IREM à paraître.

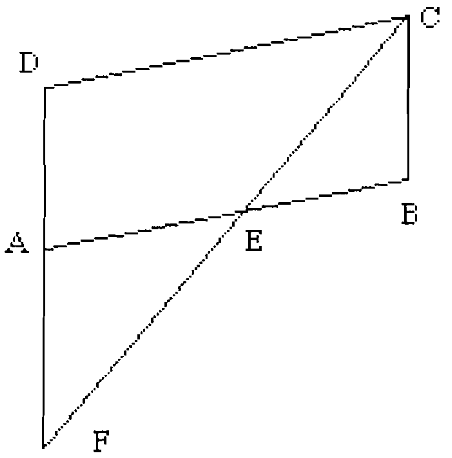

Figure 1

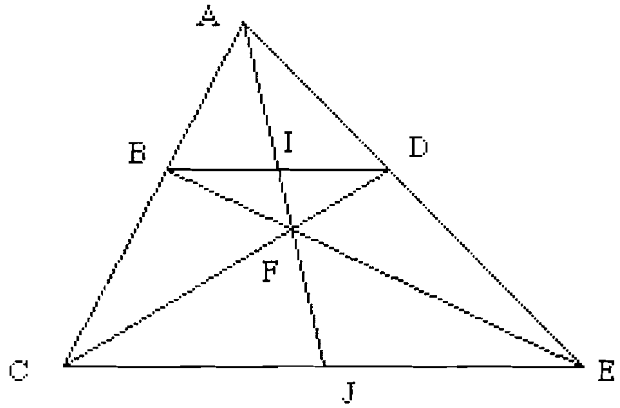

Figure 2

Il s'agit d'écrire deux fois le théorème de Thalès et de faire une somme :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FE}}, \ \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FE}} + \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FE}} = 1.$$

Dans l'énoncé suivant, il faut appliquer deux fois le théorème et compléter par un petit calcul algébrique (on pourrait évoquer le caractère non isolé) :

Soit ACE *un triangle,* B *et* D *deux points de* [AC] et [AE] *tels que les droites* (BD) *et* (CE) *soient parallèles. On appelle* F *le point d'intersection entre* (BE) *et* (CD*). La droite* (AF) *coupe* (BD) *en* I *et* (CE) *en* J. *Montrer que* I *et* J *sont les milieux de* [BD] *et* [CE] *(figure 2).*

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles ABI et ACJ, puis dans les triangles ADI et AEJ, on obtient

$$\frac{BI}{CJ} = \frac{AI}{AJ} = \frac{ID}{JE}.$$

De même en utilisant les triangles FBI et FJE, puis FDI et FJC, on obtient :

$$\frac{FI}{FJ} = \frac{BI}{JE} = \frac{ID}{CJ}.$$

D'où $\frac{BI}{ID} = \frac{CJ}{JE} = \frac{JE}{CJ}$, ce qui implique que $\frac{BI}{ID} = 1 = \frac{CJ}{JE}$.

Une des difficultés tient à l'application du théorème dans une configuration non habituelle.

(b) D'autres **adaptations** amènent à introduire des intermédiaires pour utiliser le théorème.

* Ce peut être un changement de cadre, comme dans l'énoncé suivant :

On donne trois longueurs a, b et c. *En utilisant le théorème de Thalès, construire un segment de longueur* d *tel que* $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (il est facile de proposer une autre forme d'énoncé : construction à la règle et au compas par exemple).

Il s'agit de se placer dans le cadre géométrique et de reconstituer une configuration de Thalès à partir des données. Tracer deux demi-droites sécantes en O, placer un segment de longueur a sur la première, [OA], puis un point C sur la demi-droite [OA) tel que AC = c, puis de tracer B sur l'autre demi-droite tel que OB = b. On mène alors par C la parallèle à (AB) qui coupe [OC) en D tel que DC = d.

* Ce peut être une construction intermédiaire, comme dans ce qui suit :

Soit ABC *un triangle,* I *le pied de la bissectrice intérieure issue de* A *sur* [BC]. *En utilisant le théorème de Thalès, montrer que* $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}$.

Il s'agit de tracer une parallèle permettant d'appliquer le théorème de Thalès. Remarquons que si on enlève l'indication les élèves doivent trouver seuls le théorème à utiliser. Mais il peut sembler artificiel de proposer ces exercices hors de tout contexte, et c'est souvent pendant le travail sur le théorème qu'ils sont donnés, ce qui revient à en donner l'indication.

(c) Voici enfin un énoncé où cette utilisation du théorème de Thalès doit être **disponible,** et où les élèves doivent introduire eux-mêmes des étapes.

Soit ABCD *un parallélogramme,* M *un point quelconque de* (AD), N *le symétrique de* A *par rapport à* M, P *le point d'intersection de* (CM) *et* (BN). *Montrer que le point d'intersection de* (AP) *et* (DC) *est le milieu de* [DC] *(voir la figure 3).*

Bien entendu on pourrait modifier cet énoncé, en introduisant des questions intermédiaires :

Soient ABCD *un parallélogramme,* M *un point quelconque de* (AD), N *le symétrique de* A *par rapport à* M, P *le point d'intersection de* (CM) *et* (BN).

(1) *On appelle* J *le point d'intersection de* (AP) *et* (BC). *Montrer que* C *est le milieu de* [BJ].

(2) *En déduire que le point d'intersection de* (AP) *et* (DC) *est le milieu de* [DC].

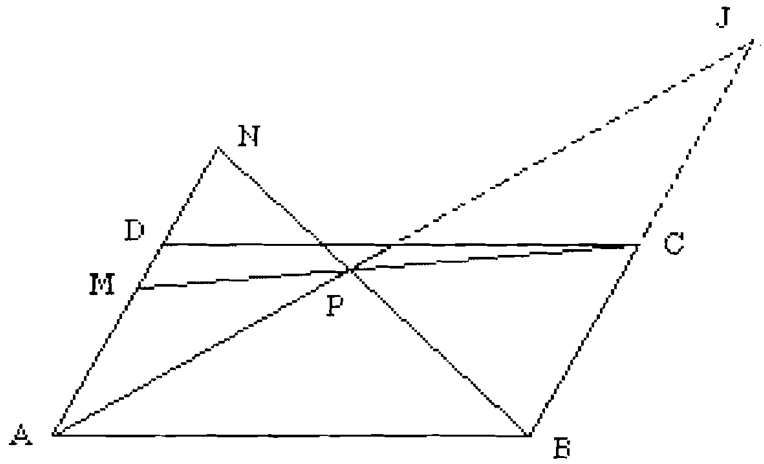

Figure 3

L'utilisation du théorème doit encore être disponible (la première question est traitée en (a), la deuxième met en œuvre directement le théorème).

On pourrait encore modifier cet énoncé en détaillant le travail à réaliser dans la première question, dans ce cas particulier.

Bibliographie

Comiti C., Grenier D., (1997) Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 81-102.

Douady R. (1987) Jeux de cadres et disalectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2) 5-32.

Pian J., Robert A. (1999) Comment élaborer des énoncés en mathématiques ? L'exemple d'un enseignement de licence de mathématiques sur ce thème, *Brochure IREM* n°88, Irem Paris 7.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* 18(2) 139-190.

Robert A., F. Vandebrouck avec la collaboration de P. Béziaud, D. Dumortier (2001), Recherches sur l'utilisation du tableau par des enseignants de mathématiques de seconde pendant des séances d'exercices, *Cahier de DIDIREM* n°36, Irem Paris 7

Roditi E (2001) L'enseignement *de la multiplication des décimaux en sixième : étude de pratiques ordinaires*, thèse de doctorat de l'université de Paris 7.