
LES COULEURS DU CARRE MAGIQUE

Renée DE GRAEVE
IREM de Grenoble

Hervé RANVILLE
Ecole de La Poulatière - St Ismier

Renée De Graeve est maître de conférence à l'UJF de Grenoble et a effectué ce travail dans le cadre de l'IREM. Elle a envisagé l'utilisation qui pouvait être faite avec des élèves de la problématique «des couleurs du carré magique» à partir de l'analyse mathématique d'un tableau de Lohse vu au Musée de Grenoble.

Hervé Ranville est professeur des écoles ; il se propose de montrer comment les activités mathématiques peuvent bénéficier des apports des sciences cognitives grâce à l'analyse de la tâche, et des procédures utilisées par les enfants et la modélisation de celles-ci.

Ils ont construit un ensemble de séquences pédagogiques grâce auxquelles les enfants sont confrontés à la découverte et à la mise en œuvre de règles logiques ; le matériel utilisé : des carrés de couleurs différentes s'est révélé particulièrement attractifs pour des élèves de maternelle.

L'activité a été menée durant l'année scolaire 1995/96 à raison d'une séance hebdomadaire, dans une grande section de l'école maternelle La Poulatière à St Ismier, dont les enfants viennent d'un milieu très favorisé. On situe l'activité au cycle 2.

LE POINT DE DÉPART

L'idée est venue en regardant une œuvre créée en 1950 par Richard Paul Lohse (représentant de l'art concret munichois) présentée au Musée de Grenoble et intitulée «Six rangées de couleurs verticales systématiques», composée de $6 \times 6 = 36$ carrés utilisant 6 couleurs différentes. Une règle en permet la réalisation : chaque couleur est présente une fois et une seule dans chaque horizontale et dans chaque verticale. L'artiste s'est imposé en plus que deux carrés de même couleur ne doivent pas se toucher par le sommet.

Le projet des enfants

Réaliser un panneau comparable au tableau de Lohse, vu au musée de Grenoble.

Le projet pédagogique

À partir de l'observation, de recherches et de manipulations, amener les enfants :
 - à découvrir les règles utilisées par l'artiste pour réaliser sa peinture,
 - à développer les compétences nécessaires pour mettre en œuvre ces règles afin de réaliser leur projet.

PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ

On dispose sur un support d'une grille carrée de 5 x 5 et de 25 petits carrés en carton de 5 couleurs ayant la dimension des carrés de la grille. Il s'agit, pour les enfants de compléter la grille en respectant la règle suivante énoncée, de façon positive : «on utilise cinq couleurs différentes et chaque couleur doit être présente une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne».

On ne doit donc pas mettre deux fois la même couleur dans une même ligne, ni dans une même colonne.

OBJECTIFS

Les objectifs sont relatifs à l'acquisition de stratégies et de comportements face à une situation problème, les enfants découvrent alors qu'il faut chercher par essais-erreurs.

Les élèves doivent d'abord comprendre la règle utilisée, sans qu'on leur dise comment faire ; le problème posé a d'ailleurs beaucoup de solutions, ce qui laisse aux enfants une grande liberté, bien qu'à chaque étape de la construction de la solution, l'enfant doive valider son action en répondant à la question : «Y a-t-il deux fois la même couleur dans une même ligne, ou dans une même colonne ?». Si non, alors «reprendre à l'étape précédente» ; si oui, alors «continuer».

L'élève n'est donc pas invité à répondre verbalement, mais à construire une réponse concrète qui n'est pas toute faite.

Il doit faire des essais, se tromper, reconnaître les impasses et les mémoriser pour ne pas refaire plusieurs fois la même erreur.

L'élève doit être capable :

1. d'acquérir des **compétences méthodologiques** liées à la résolution de problème
 - s'approprier le problème posé ; sous l'angle du savoir, il s'agit de respecter la règle, sous l'angle du savoir-faire, il faut découvrir les procédures qui conviennent,
 - comprendre et identifier les contraintes de l'espace problème, ici, «employer une seule fois chaque couleur dans chaque ligne et dans chaque colonne»,
 - développer des méthodes de résolutions en faisant des essais,
 - remettre en question ses choix quand on aboutit à une impossibilité,
 - persévérer en découvrant de nouveaux agencements de carrés,

- valider la solution intermédiaire ou finale trouvée et en laisser une trace définitive en collant les carrés.

2. d'acquérir des **compétences disciplinaires**, nécessaires à la réalisation du panneau

- vocabulaire lié à la topologie,
- utilisation du dénombrement et de procédures combinatoires,
- repérage dans l'espace, notions de verticale, horizontale, diagonales à gauche et à droite,
- découverte et utilisation d'algorithmes de coloriage,
- approche de figures planes usuelles,
- utilisation de tableaux à double entrée.

3. d'acquérir des **compétences transversales**

- travail coopératif d'équipe, en comparant et en confrontant sa solution avec celles des autres élèves,
- mémorisation : en se souvenant des couleurs déjà utilisées et des essais et erreurs réalisés.

DESCRIPTION DÉTAILLÉE DES SÉANCES

PREMIÈRE SÉANCE : L'APPROPRIATION DU PROBLÈME

On observe tout d'abord le tableau de Lohse. Les enfants sont invités à découvrir quelles sont les «règles du jeu» utilisées par l'artiste.

Bien sûr la présentation de l'activité débute par du vocabulaire, grille, carré, ligne, colonne, verticale, horizontale, coté du carré...

L'observation permet aux enfants de dégager la règle suivante :

- utiliser seulement 5 couleurs
- il faudra poser les carrés de couleur sur la grille pour que dans chaque ligne, les cinq couleurs apparaissent et que dans chaque colonne on ne retrouve pas deux fois la même couleur.

On distribue à chaque élève une grille pré-imprimée de 3 lignes et 5 colonnes (voir en annexe le document distribué). Les enfants prennent des petits cartons de 5 couleurs choisies parmi 10 couleurs (ce qui permet d'éviter la copie puisque l'assortiment de chaque enfant est unique).

On encourage les enfants à remplir ligne par ligne.

Les moments de recherche individuelle (jouer avec les carrés, pour essayer, avant de les coller), d'interactions entre enfants, de bilans ou de verbalisations collectives seront présents lors de chaque séance.

- Analyse mathématique

Dans cette première séance, toutes les difficultés ne sont pas présentes. En effet :

- sur la première ligne, il suffit de mettre 5 couleurs différentes, ce qui équivaut au choix des cinq couleurs,
- le remplissage de la deuxième ligne est assez facile et se fait souvent sans problème,

- le remplissage de la troisième ligne est plus délicat mais ne comporte que des impossibilités simples :

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
3	5	2	1	(4)!

Dans la troisième ligne l'enfant fait des choix pour les quatre premières cases et constate l'impossibilité de poser le 4. Il éprouve alors des difficultés à remonter dans sa réalisation et à percevoir que l'impasse se met en place à la pose du troisième chiffre (2) ; dans d'autres configurations, l'impasse est déjà en place à la pose du deuxième carton de la troisième ligne. L'enfant doit renoncer à ses deux dernières actions.

Les enfants éprouvent beaucoup de réticence à remettre en question des actions qui ont l'air de bien fonctionner. Ils ont donc tendance à ne remettre en question que le dernier choix (ils feront des progrès sur ce plan-là tout au long des séances).

D'autres enfants enlèvent tous les cartons de la troisième ligne et refont un essai (voir une réalisation page de droite).

DEUXIÈME SÉANCE : LA GRILLE 5 X 5

Lors de la réalisation par les enfants, l'aspect logique est étroitement lié à l'aspect procédural ; «ce qu'il faut faire» dépend largement de «comment on fait» :

Il faut :

- différencier les 5 couleurs,
- considérer deux dimensions à la fois (verticale /horizontale),
- effectuer une combinatoire,
- garder à l'esprit la règle,
- se souvenir des essais déjà effectués,
- mettre en œuvre les opérations à réaliser (poser une nouvelle couleur).

Comme on le voit la charge mentale, c'est à dire le nombre d'informations à maintenir actives en mémoire, est très élevée et la capacité de la mémoire immédiate (entre 5 et 7 informations), est limitée : cela explique la difficulté supplémentaire constituée par le passage à la grille 5 x 5.

Le travail collectif et les interactions entre enfants permettront de dépasser les difficultés.

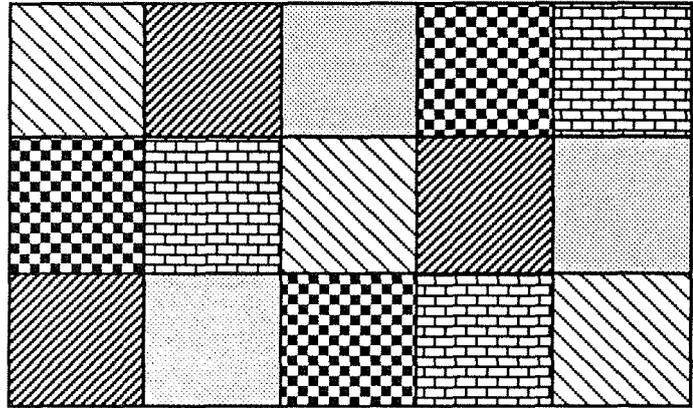
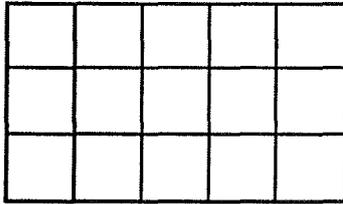
Déroulement

Après un bref rappel du déroulement de la séance précédente et de la règle de remplissage, on distribue aux enfants la grille complète (5 x 5) (voir annexe) et on demande de reproduire le travail précédent (le remplissage des trois premières lignes), puis de compléter les deux lignes restantes (voir page de droite).

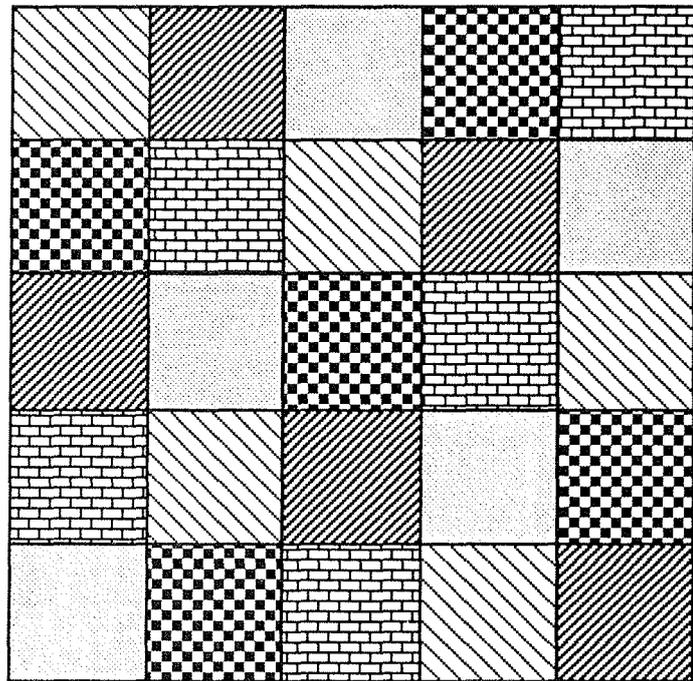
Afin d'éviter les erreurs, on demande aux enfants de sélectionner à l'avance 25 carrés, donc de choisir leurs cinq couleurs et de prendre cinq carrés de chaque coloris.

Prolongement

Pour les enfants ayant réussi rapidement, ce travail a été suivi (avec succès) par un réinvestissement dans un jeu plus abstrait : le codage des couleurs par des chiffres (comme dans les exemples donnés dans ce texte) et le remplissage de la grille par ces chiffres.



1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2



Réalisation faite par un enfant au cours de la première et la deuxième séance :
(les couleurs ont été remplacées par des grisés différents)

Bilan

- Cette séance est trop longue pour de nombreux enfants, car la réalisation des trois lignes initiales prend beaucoup de temps. Il semblerait pédagogiquement plus judicieux de travailler dès la première séance sur la grille 5 x 5 ce qui éviterait le travail de reproduction, bien que cela soit discutable sur le plan mathématique.

En effet, on n'a pas prouvé que toute solution valable pour les trois premières lignes conduit à une solution finale. On peut pourtant montrer que l'on ne doit jamais remanier les trois premières lignes pour obtenir une solution. Il suffit, une fois les trois premières lignes obtenues, de remplir arbitrairement la première colonne par les deux couleurs manquantes par exemple *a* et *b*, puis de chercher la colonne où il manque *a* et la colonne où il manque *b*.

Deux cas sont à envisager : les deux colonnes sont différentes (cas 1) ou les mêmes (cas 2).

Cas 1 : on complète les deux colonnes contenant *a* et *b*

- soit par le même élément *c* (si c'est possible) puis les deux autres colonnes par *d* et *e*,

- soit par des éléments différents *d* ou *e* (par exemple) et les autres colonnes suivent.

a	b	c	d	e
b	c	a	e	d

a	b	d	e	c
b	d	a	e	c

Cas 2 : on complète une colonne (exemple par *d* et *e*), puis on place *d* puis *e* puis *c*.

a	b	d	e	c
b	a	e	c	d

Le respect de la règle utilisée par Lohse (aucune couleur ne se touche par le sommet) conduit parfois à remettre en cause la deuxième ligne car le remplissage des deux premières lignes ne conduit pas forcément à une solution finale : l'exemple montre que la seule place possible pour le 5 est la première position ligne 3, c'est aussi la seule place possible pour le 2 :

1	2	3	4	5
3	4	5	2	1
5/2				

On voit qu'il n'y a que deux débuts possibles :

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2

et

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3

Cette règle plus complexe sera proposée ultérieurement aux enfants qui réussiront la règle simple.

L'analyse des premières productions montre que les performances des enfants sont extrêmement différentes. En voici les extrêmes : pour certains enfants, la première ligne comporte déjà deux fois la même couleur alors que d'autres ont réussi la grille complète.

Sur le plan procédural, les élèves emploient souvent des stratégies erronées, et utilisent mal leur mémoire, en ne prenant pas en compte assez de carrés.

Sur le plan logique et mathématique, selon la conception de la psychologie cognitive, on ne dira pas que les enfants se trompent (car cela ne donne aucune orientation pédagogique) mais que les enfants font comme s'ils utilisaient des règles implicites (plus simples que la règle correcte) qui ne conduisent pas à la résolution.

Voici ces règles, schématisées par ordre de complexité :

R1: l'enfant considère une case à la fois : celle qui est voisine, ou la précédente de la voisine de celle qu'il souhaite remplir. La règle est : «n'est pas de la même couleur que la case voisine ou qu'une autre case de la ligne».

Les enfants R1 utilisent souvent plusieurs fois la même couleur dans la même ligne qu'ils peuvent toutefois réussir par hasard.

R2 : l'enfant considère une rangée à la fois et complète en cherchant une couleur non présente dans la ligne entamée.

Les enfants R2 réussissent de une à trois rangées, mais comme ils ne prennent pas en compte les colonnes, soit ils reproduisent la première ou la deuxième ligne plusieurs fois, soit on retrouve plusieurs fois la même couleur dans une même colonne.

R 3 : l'enfant a découvert un algorithme de résolution du problème : il ne considère qu'un seul axe (vertical, horizontal ou diagonal) mais il a trouvé un algorithme de résolution du type : «prendre la dernière couleur de la ligne 1 et la mettre au début de la ligne 2, puis continuer avec la suite de la ligne 1». Ou bien «faire des diagonales de la même couleur».

Les enfants R3 respectent la règle logique, tout en envisageant un seul axe.

Ils n'ont pas de procédure pour résoudre les différentes configurations. Ils évolueront difficilement vers la règle «pas de sommets de même couleur qui se touchent» car la force visuelle de leur réalisation prend le pas sur la réflexion logique, l'algorithme est alors un «truc» qui permet de réussir.

R 4 : l'enfant peut considérer deux à trois rangées puis envisage les colonnes dans un deuxième temps (d'où l'intérêt de poser pour pouvoir manipuler avant de coller). C'est à ce niveau que les interactions entre les enfants et les adultes sont les plus riches et les plus rapidement suivies de résultats.

Les enfants R4 complètent généralement trois rangées qui respectent la règle dans les deux axes, les deux autres rangées ayant des doublons.

R5 : l'enfant peut considérer les deux axes en même temps et il progresse souvent à partir d'un angle et complète colonnes et lignes simultanément.

Les enfants R5 réussissent toute la grille.

R5+ : l'enfant réussit en respectant la règle «pas de sommets de même couleur qui se touchent». La différence entre R5 et R5+ est liée à l'attention, à la mémoire et à la capacité de se représenter mentalement ses choix avant de les réaliser.

Ces règles sont inspirées du modèle de stratégies de résolutions de problèmes de classifications multiples de Nguyen-Xuan (*Cours de Psychologie, Tome 5, Mesure et Modélisation*, Dunod, 1995).

L'intérêt d'une telle formalisation est qu'elle précise le champ de l'intervention pédagogique et permet de reformuler les consignes efficaces pour chaque classe de réponse :

Les enfants R1 seront incités à envisager toute la ligne et à mémoriser les précédentes actions ; on sollicitera les enfants R2 à prendre en compte l'axe vertical (ce qui serait vain avec les R1). Les enfants R3 qui le peuvent seront orientés vers la règle «pas de sommets de même couleur qui se touchent» pour les amener à découvrir des règles logiques et à abandonner leur algorithme de résolution. Certains enfants en resteront à R3, d'autres seront capables de réinvestir avec succès leur système de résolution lors des prolongements.

Les R4 évolueront vers R5 avec de nouveaux essais.

TROISIÈME SÉANCE : TRAVAIL COLLECTIF

Les objectifs

1. développer la verbalisation des actions réalisées par les enfants pour que les enfants prennent bien conscience de ce qu'il font.

2. développer les interactions de tutelle entre enfants.

On propose de réaliser «en grand» le travail précédent.

On forme cinq groupes de cinq enfants et chaque enfant dispose de cinq carrés (20 cm x 20 cm) de la même couleur, et il y a cinq couleurs par groupe.

Dans chaque groupe, les enfants posent à tour de rôle un carré en respectant la règle. Chaque action est commentée, acceptée ou non par les autres enfants, ce qui donne des discussions animées.

Les groupes ont des règles différentes : R3 (diagonales) pour les enfants en difficulté, R5 règle de base, et un groupe qui choisit de compliquer la règle en imposant aux sommets de même couleur de ne pas se toucher (R5+).

Quand le résultat est satisfaisant, on passe à la phase de collage, on obtient ainsi cinq posters qui décoreront la classe.

La séance, axée sur la coopération et les interactions entre les enfants se termine par un regroupement de la classe qui permet de commenter les réalisations de chaque groupe.

QUATRIÈME SÉANCE : REMPLISSAGE DE LA GRILLE CARRÉE AVEC DES TRIANGLES (DEMI-CARRÉS) SELON LA MÊME RÈGLE.

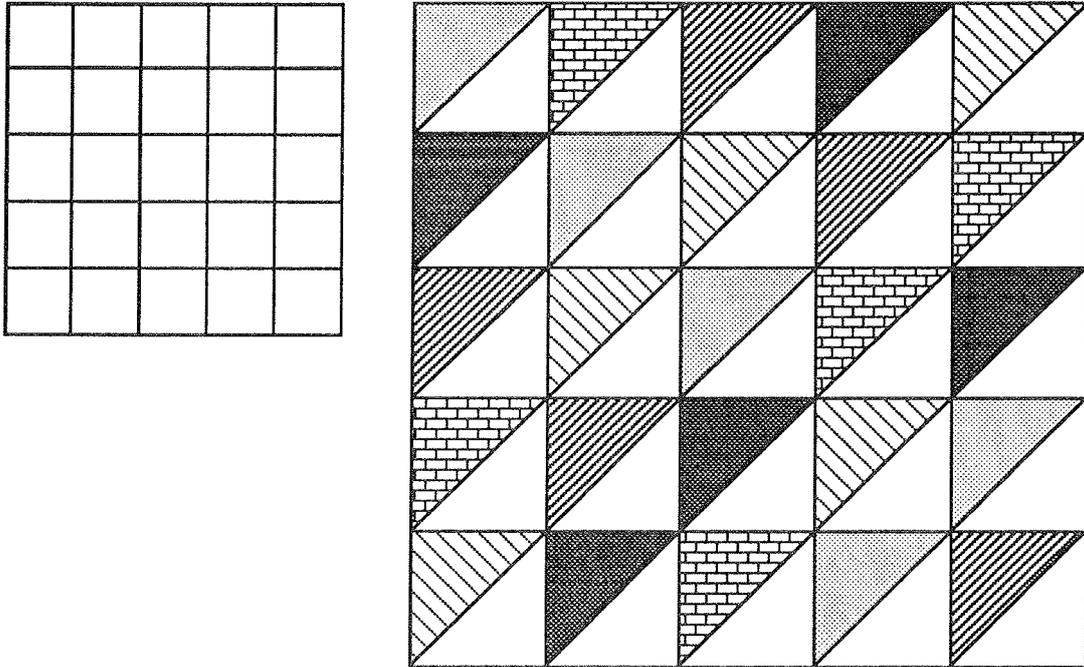
Objectifs

1. Transférer son savoir-faire à une nouvelle tâche. Cela permet d'évaluer la généralisation de l'acquisition dans une situation autre que celle de l'apprentissage. C'était le cas lorsque certains enfants ont codé la grille avec des chiffres, et c'est le cas ici avec les triangles.

2. Plier et découper un carré par un axe de symétrie diagonale, ce qui développe l'habileté manuelle.

La séance débute par le pliage et le découpage des carrés selon une de leur diagonale. Chaque enfant fait ses triangles à partir de carrés d'une même couleur, puis on les met en commun à chaque table pour «refaire le jeu» de 5 x 5.

Puis les enfants posent leurs triangles en respectant la règle de coloriage (couleurs différentes sur chaque ligne et chaque colonne).



Exemple de réalisation d'enfant

Certains enfants sont perturbés dans la réalisation car le triangle n'occupe que la moitié de chaque carré, il faut donc laisser du blanc. Quelques-uns, influencés par les séances précédentes, garnissent tous les carrés avec deux triangles de même couleur, ou de couleurs différentes et...manquant rapidement de triangles, vont en chercher. D'autres font des choix et orientent leurs triangles en haut à gauche ou en bas à droite, en laissant des blancs. Cela fait apparaître de nouveaux «systèmes décoratifs» aux yeux des enfants.

CINQUIÈME SÉANCE

Objectif : invention de règles

Les enfants inventent, par dérivation des règles de Lohse maintenant bien connues, de nouvelles règles de remplissage où l'on retrouve algorithmes, et règles de «non-contacts» entre couleurs :

1 A	2	3	4	5
5	4			

Les grilles obtenues à la séance précédente ont des blancs, on cherche alors des règles pour compléter chaque grille, les enfants sont très inventifs : ils pensent à former des parallélogrammes unicolores et trouvent deux solutions :

l'espace blanc marqué A peut être rempli à l'aide de la couleur 2 pour former le parallélogramme A/2 ou bien de la couleur 5 pour former le parallélogramme 5/A.

1 2	2 3	3 4	4 5	5 1
4 1	1 5	5 3	3 2	2 4
3 5	5 1	1 2	2 4	4 3
2 3	3 4	4 5	5 1	1 2
5 4	4 2	2 1	1 3	3 5

Exemple de remplissage du dessin avec la règle "parallélogramme A/2"

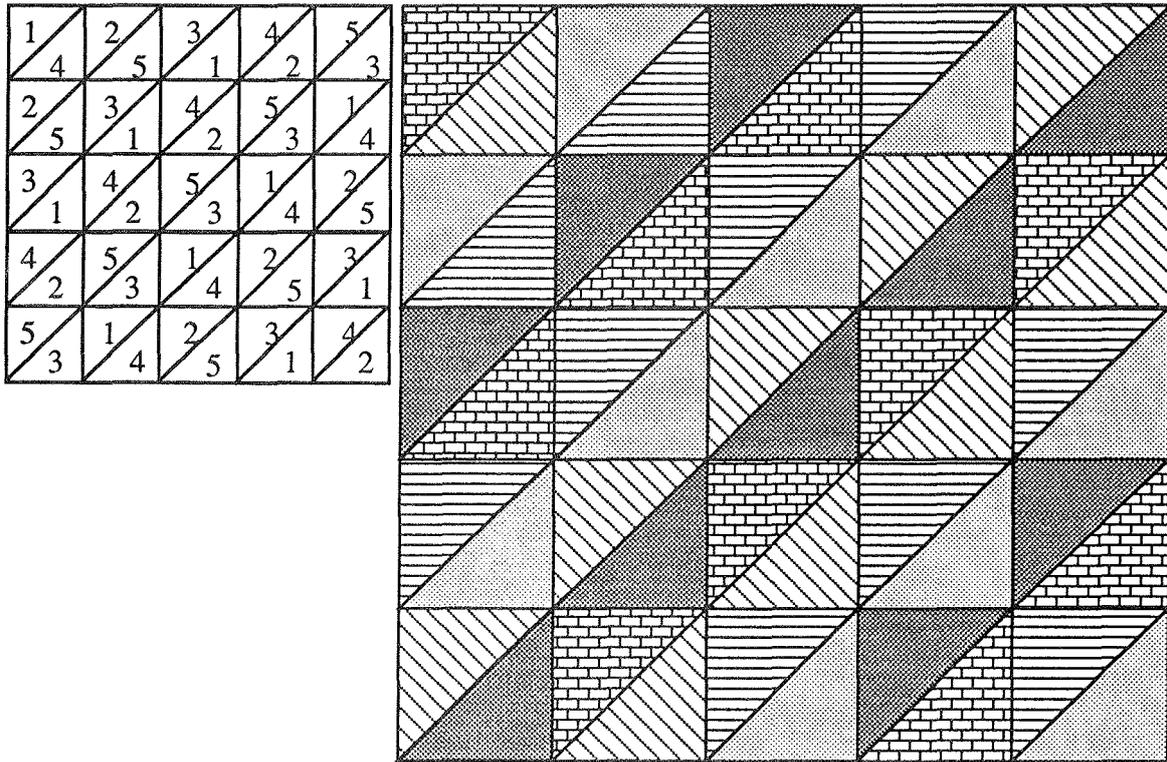
On peut aussi constituer des carrés bicolores par exemple :

(1,4), (2,5), (3,1), (4,2), (5,3) (cf. page ci-contre dessin du haut).

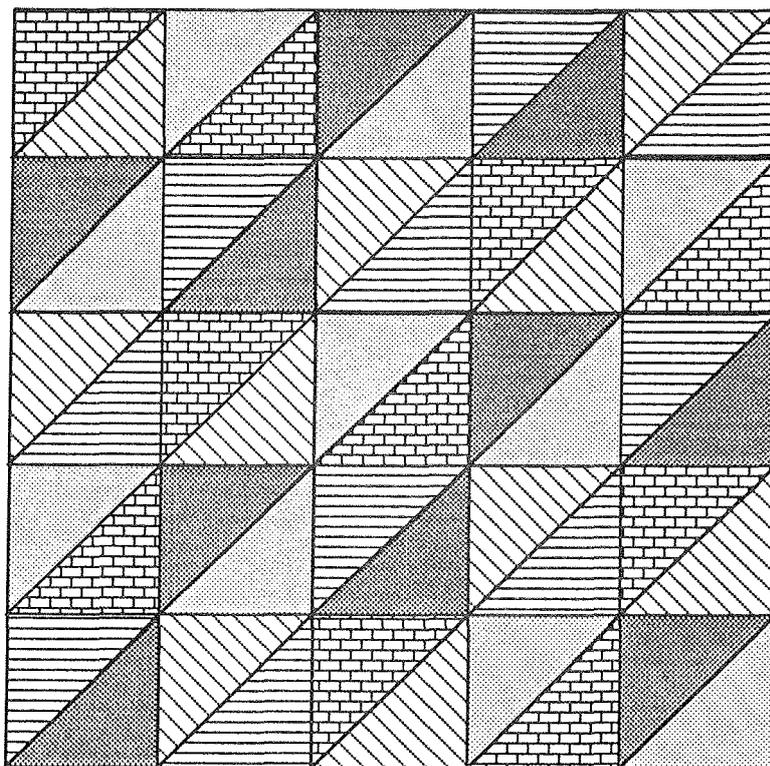
On peut aussi, remplir les cases blanches de la première ligne de façon à «mettre la couleur qui manque». Par exemple : A touche les couleurs 1, 2, 5 et pourra donc être coloré par 3 ou par 4, ou encore 1, 2, 4, 5 entourent A, et A sera coloré par 3 (cf. page ci-contre dessin du bas).

Après un temps de recherche et de découverte, les règles sont énoncées et figées. Les enfants se répartissent alors par groupes pour compléter leur grille selon la règle choisie.

Deux réalisations faites par les enfants.



Mise en évidence des diagonales à l'aide de carrés bicolores



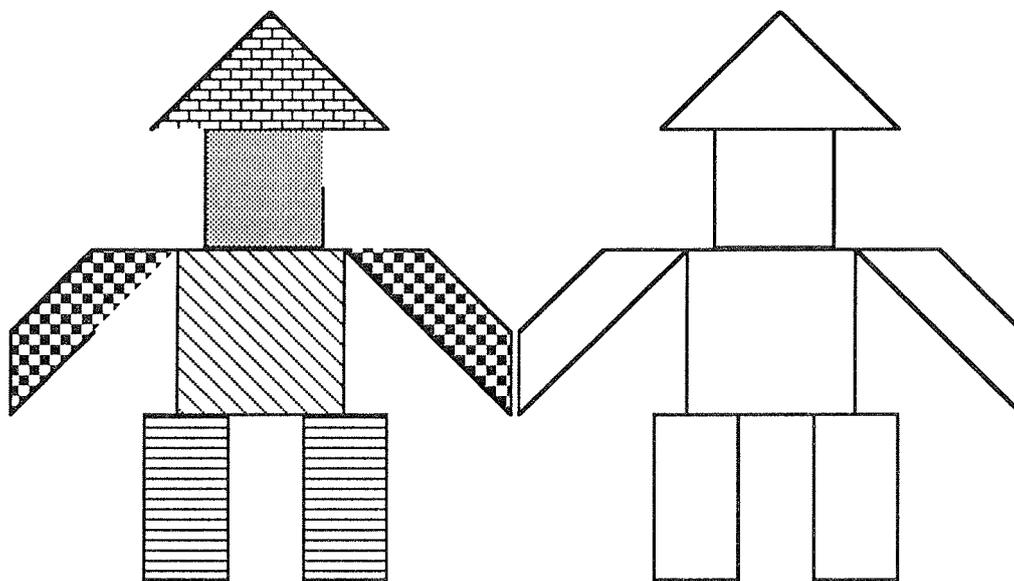
Remplissage avec "la" couleur manquante

SIXIÈME SÉANCE

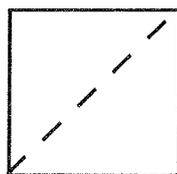
Nous proposons lors de cette sixième séance, comme lors des deux séances précédentes de retrouver les règles de coloriage initiales, mais dans un contexte différent ainsi que de perfectionner les techniques de pliage.

Description du problème posé

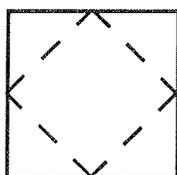
On va réaliser le bonhomme ci-dessous à l'aide de carrés de papiers colorés.



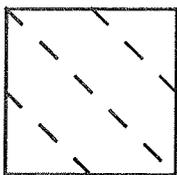
Ce bonhomme est formé de cinq parties : le corps formé avec un carré, les quatre autres parties obtenues par pliage d'un carré



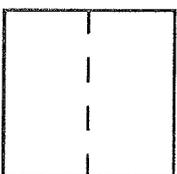
Le chapeau est obtenu par pliage du carré selon la diagonale



La tête est obtenu en pliant les quatre coins



Les bras sont obtenus en coupant le carré selon la diagonale, puis en pliant «le coin»



Les jambes sont obtenues en coupant le carré selon une médiane

Chaque partie du bonhomme doit être réalisée avec une couleur différente de celle des autres parties du corps.

La dominante de cette séance est géométrique, et conduit à réinvestir un vocabulaire acquis lors des premières séances et à acquérir de nombreux mots nouveaux en liaison avec l'activité de pliage.

Chaque enfant réalise un bonhomme.

SEPTIÈME SÉANCE : LA RIBAMBELLE

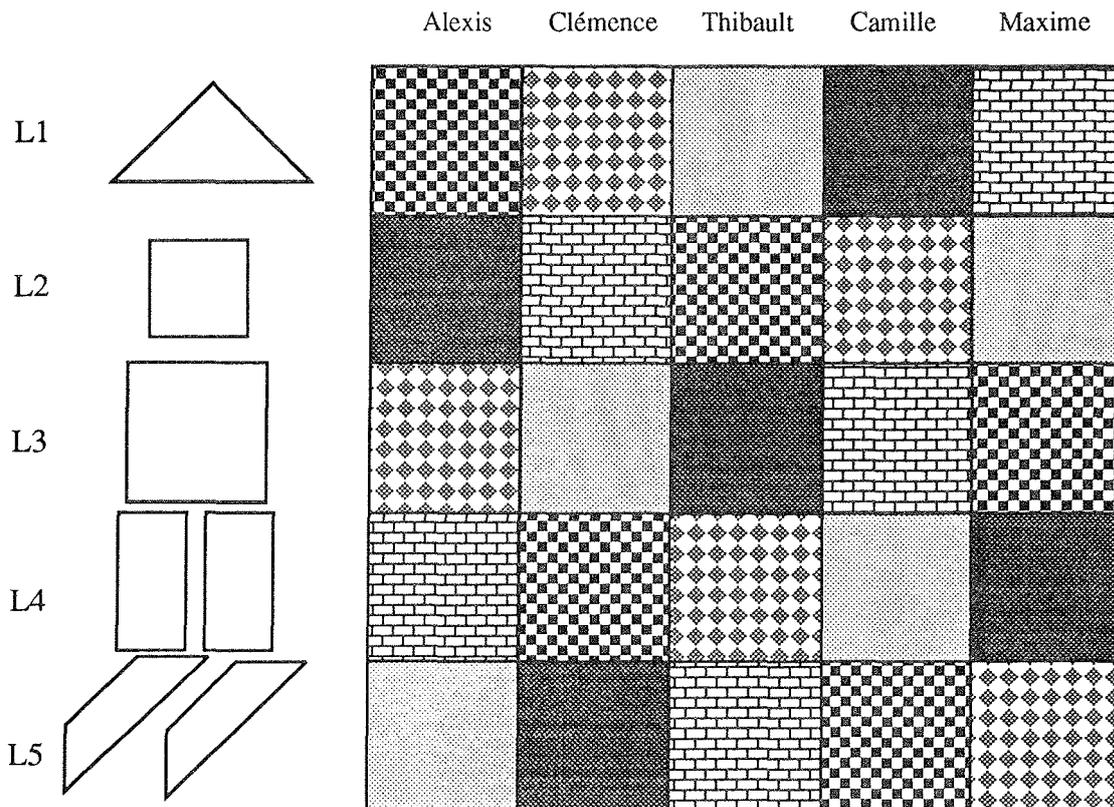
On oriente les enfants vers une comparaison entre les grandes réalisations collectives et le bonhomme.

On leur demande de réaliser par groupe de cinq une ribambelle de cinq bonshommes dont toutes les parties du corps seraient de couleurs différentes (pas deux chapeaux de la même couleur dans un même groupe, etc.).

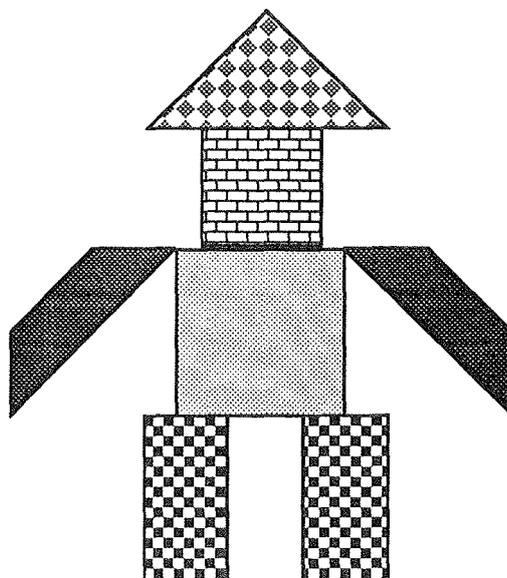
Les enfants n'ont pas perçu qu'il s'agissait d'une reformulation de la règle de Lohse dans un autre contexte.

Ils ne réaliseront donc pas la tâche demandée comme une situation problème, mais en recodant chacun un bonhomme suivant une colonne d'un des panneaux déjà réalisés.

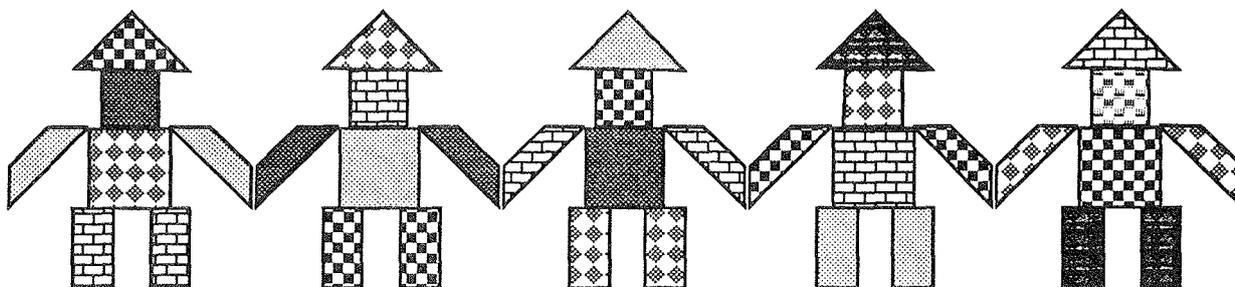
Exemple : Clémence réalisera son bonhomme suivant la deuxième colonne, la ligne 1 (L1) lui donnera la couleur du chapeau, L 2 donnera la couleur de la tête, L3 celle du ventre, L4 celle des jambes et L5 celle des bras.



Elle obtient ainsi le bonhomme suivant :



Pour les cinq enfants du groupe précédent, nous aurons ainsi la "ribambelle" suivante :



Analyse : les compétences acquises sont liées au repérage dans l'espace, et à l'utilisation du tableau à double entrée. Tous les enfants ont réussi le recodage.

Sur le plan psychopédagogique, cette séquence confirme que les premières séances ont développé des savoir-faire fondés sur l'acquisition de procédures de résolution et de connaissances implicites. Ces acquis sont liés au contexte et mobilisables dans ce contexte. Les enfants n'ont pas acquis un savoir (des règles) qu'ils pourraient appliquer dès que nécessaire.

Les séances «triangles» proches des séances «carrés» ont permis un transfert analogique des procédures découvertes.

La réalisation du bonhomme, trop éloignée n'a pas permis le recours à l'analogie, et nous avons dû proposer le recodage pour que, a posteriori, les enfants découvrent les relations logiques des deux situations lors des séquences collectives d'observation et de verbalisation qui ont suivi.

