LE PASSAGE DE L'ARITHMETIQUE A L'ALGEBRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE

PREMIERE PARTIE
L'évolution de la transposition didactique

Yves CHEVALLARD
I.R.E.M. d'Aix-Marseille

I – INTRODUCTION.

Au cours des dernières décennies, le corpus mathématique enseigné dans les collèges a subi une profonde réorganisation, dont la «réforme des mathématiques modernes», qui a tant frappé les contemporains, a sans aucun doute constitué le moment le plus spectaculaire.

Il est remarquable toutefois que ce changement, qui a suscité en foule réactions et commentaires, n'a pas pour autant bénéficié – à quelques exceptions près[1] – de l'effort d'analyse que son importance objective aurait dû engendrer. Dans cet article, nous essaierons de mettre en évidence, sur un point particulier et de manière nécessairement limitée, l'ampleur des bouleversements auxquels les enseignants ont eu à faire face. Mais nous tenterons surtout de montrer comment les modifications structurelles apportées alors dans le texte d'enseignement imposent leurs effets jusqu'à aujourd'hui, d'une manière souvent occulte, mais bien réelle, en dépit même de la «réforme de la réforme» que, pour la classe de quatrième, les programmes de 1978 devaient symboliser[2].

(1) Concernant l'enseignement des décimaux à l'école primaire, voir Brousseau 1980 ; pour une analyse générale de la réforme, voir Chevallard 1980a.

(2) «Le programme de 1978 et ses objectifs, écrivait ainsi l'équipe de rédaction du **Bulletin de l'A.P.M.E.P.**, sont fondamentalement différents de ceux de 1971» (**Activités mathématiques en quatrième-troisième**, tome 1, publication de l'A.P.M.E.P., 33, 1979, p. 9). Nous verrons que cette affirmation doit être nettement tempérée.

«petit x» n°5, pp. 51 à 94.

II – UNE FRONTIERE OUBLIEE.

Le programme de 1945 pour la classe de quatrième (annexe 1) est clairement organisé autour d'une grande dichotomie, celle de l'**arithmétique** et de l'**algèbre.** Cette distinction structure encore le programme de 1958 (annexe 2). Elle disparaît du programme «réformé», celui de 1971, et n'apparaît plus dans le programme de 1978. Les mots d'arithmétique et d'algèbre, eux-mêmes, ne conservent plus qu'un emploi fort restreint : une rubrique «Arithmétique» figure au programme actuel de la classe de cinquième, et l'«algèbre» réapparaît dans le programme de la classe de troisième. Mais l'**opposition** de l'arithmétique et de l'algèbre, elle, semble durablement effacée.

Ce rappel d'histoire, sans doute nécessaire(3), permet de mettre le doigt sur un fait essentiel, dont nous tirerons plus loin quelques conséquences : la disparition, en quelques années, d'une manière séculaire d'organiser le corpus mathématique d'enseignement. L'opposition de l'arithmétique et de l'algèbre était en effet, jusque-là, traditionnelle. Tradition ancienne d'ailleurs — puisque le principe en est posé par Viète lui-même, à la fin du XVIème siècle(4) —, et en tout cas bien installée dans l'usage : traversant tout le XIXème siècle, elle ne s'éteindra qu'au début des années 1970.

Cette tradition — qui s'égale à une conception tout à la fois épistémologique et didactique et produit un texte d'enseignement longtemps inchangé, ou du moins à évolution lente — oppose deux temps. Le premier temps est celui de l'apprentissage de l'**arithmétique**. Celle-ci constitue la base des apprentissages ultérieurs par excellence. Le corpus arithmétique et l'agencement didactique de ses parties n'ont guère varié **sur plusieurs siècles**, de Jacques Pelletier du Mans (1554) jusqu'au milieu du XXème siècle. L'arithmétique fournit l'ensemble des réquisits sur lesquels, dans un deuxième temps, les auteurs fondent alors le parcours de l'**algèbre**. Présentant les **Elémens d'Algèbre** d'Euler (parus en français en 1774), ses éditeurs nous gratifient d'un charmant petit conte, bien significatif de cette manière de faire : «Les vues du célèbre auteur, écrivent-ils(5), étaient de composer un livre élémentaire, au moyen duquel on put apprendre, sans aucun autre secours, l'algèbre à fond (...) M. **Euler** choisit

(3) Nécessaire parce que, même dans le cas où il a connu — comme élève, ou comme professeur — des étapes antérieures de l'évolution de l'enseignement, le professeur tend en principe à limiter son horizon à l'étape actuelle de cette évolution : cette amnésie — que nous ne nous attacherons pas à mettre en évidence ici — joue un rôle fonctionnellement essentiel dans la dénégation de la transposition didactique (voir Chevallard 1982), en permettant aux agents du système d'enseignement d'accepter pleinement comme allant de soi, et naturel, l'état présent de la transposition didactique.

(4) L'ouvrage de François Viète (1540-1603), **In artem analyticam Isagoge** («Introduction en l'art analytique»), est publié à Tours en 1591.

(5) Dans l'**Avertissement** de l'édition française de 1807 (Courcier et Maire, Paris), que nous suivons ici.

pour cet effet un jeune homme qu'il avait pris à son service en quittant Berlin, qui possédait assez bien l'arithmétique, mais qui n'avait d'ailleurs aucune teinture des mathématiques ; il avait appris le métier de tailleur, et ne pouvait être mis, quant à sa capacité, qu'au rang des esprits ordinaires. Non seulement ce jeune homme à très bien saisi tout ce que son illustre maître lui enseignait et lui dictait(6), mais il s'est même trouvé en peu de temps en état d'achever tout seul les calculs algébriques les plus difficiles (...)». Si l'arithmétique constitue, à un premier niveau d'instruction, un ensemble cohérent et relativement complet, elle est ainsi, à un second niveau, le fondement sur lequel l'apprentissage de l'algèbre va venir prendre appui.

III – LE PASSAGE DE L'ARITHMETIQUE A L'ALGEBRE.

Avoir quelques rudiments d'arithmétique est, en tout métier, une exigence très anciennement attestée : les arithmétiques imprimées depuis la fin du XVème siècle ne sont-elles pas, en théorie, proposées aux marchands et négociants ? L'apprentissage de l'algèbre marque alors un passage, une manière de progresser dans le savoir qui est aussi une manière de s'élever dans la société. Et loin que ce passage soit gommé (comme il en va aujourd'hui, nous le verrons), il se trouve longtemps mis en avant par toute une rhétorique qui s'efforce de situer arithmétique et algèbre dans le prolongement l'une de l'autre, tout en les opposant.

La plupart des auteurs recourent, à cet égard, à une stratégie d'exposition simple et nette : partant d'un problème d'arithmétique, ils en rappellent la solution «par l'arithmétique» pour lui opposer ensuite la solution «par l'algèbre». Ainsi le document 1, première page d'un opuscule consacré à **L'algèbre à l'école primaire** (cours supérieur) et publié à Marseille en 1924, donne de cet abord de l'algèbre une illustration concise et significative.

Emploi des lettres
dans la solution des problèmes

Problème. — *On a un coupon de drap d'une certaine longueur et un deuxième coupon qui a 4 mètres de plus. Ces deux coupons ont ensemble 40 mètres. On demande la longueur de chaque coupon.*

(6) Euler était devenu aveugle en 1771.

SOLUTION ARITHMÉTIQUE

40 { 1er ———— ; 2me ———— 4m.

Représentons la longueur du 1er coupon par une ligne.
Une ligne semblable augmentée de 4 m. figurera le 2me coupon.

En examinant cette représentation graphique, on voit de suite que : petit coupon + petit coupon + 4 m. ou 2 fois le petit coupon + 4 m. = 40 m.
par conséquent, 2 fois le petit coupon = 40 m. — 4 m. = 36 m.
d'où, petit coupon = 36 m. : 2 = 18 m.
et, grand coupon = 18 m. + 4 m. = 22 m.

SOLUTION ALGÉBRIQUE

40 m. { 1er x ; 2me $x + 4$ m.

Au lieu de la ligne, mettons pour le 1er coupon la lettre x.
Nous aurons pour le 2me coupon : $x + 4$.

Nous avons ainsi sous les yeux, comme pour la solution précédente, une image très nette de l'énoncé et nous pouvons écrire :

$$x + x + 4 = 40 \text{ m.}$$
$$2 \text{ fois } x + 4 = 40 \text{ m.}$$
$$2 \text{ fois } x = 40 \text{ m.} - 4 \text{ m.} = 36 \text{ m.}$$
$$x = 36 : 2 = 18 \text{ m.}$$
et, grand coupon = 18 m. + 4 m. = 22 m.

Chaque fois que nous emploierons des lettres dans la résolution des problèmes, nous ferons de l'algèbre

La solution algébrique est plus simple, plus rapide que la solution arithmétique. Elle dispense de faire de longs raisonnements.

DOCUMENT 1

On notera ici que les auteurs rencontrent en général une difficulté didactique caractérisée. L'idéal serait évidemment de proposer un problème tout semblable à ceux que l'arithmétique permet en principe de résoudre, mais d'une complexité telle que les seules lumières de l'arithmétique nous laissent impuissants à le résoudre effectivement ; et d'en donner alors une solution par le moyen de l'algèbre ! Mais le commençant ne maîtrisant pas l'outil algébrique — par définition —, ils doivent s'en tenir à un problème de structure assez simple pour que l'introduction du langage et des procédures algébriques demeurent aisément compréhensibles, en soulignant éventuellement ensuite que les mêmes méthodes, présentées sur un exemple qui certes ne les requiert pas, permettraient de résoudre des problèmes «très-compliqués», devant lesquels l'arithmétique seule nous laisserait cois (document 2).

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre est d'autant mieux marqué, jusqu'au début du XIXème siècle, que c'est seulement avec l'étude de l'algèbre que s'introduisent les «signes algébriques». Longtemps, en effet, l'arithmétique les ignore(7).

(7) Voir Smith 1953, p. 395.

Les auteurs, donc, en présentant la solution algébrique du problème qu'ils ont pris pour matériel d'initiation, présentent aussi les signes usuels, que nous appellerions volontiers signes arithmétiques, soit +, -, X, =, etc. Dans un manuel qui peut dater de la fin du XVIIIème siècle, et dont le premier chapitre s'intitule opportunément «Notions préliminaires sur le passage de l'ARITHMETIQUE à l'ALGEBRE, explication et usage des signes algébriques», on voit ainsi l'auteur introduire soigneusement les signes d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, le signe d'égalité, et enfin l'inconnue x, qu'il rapporte d'ailleurs à l'usage adopté en arithmétique à propos du quatrième terme — inconnu et à déterminer — d'une proportion (document 2).

2. Les raisonnemens, fort simples dans le problème proposé ci-dessus, mais très-compliqués dans d'autres, se composant, en général, d'un certain nombre d'expressions, telles que *ajouté à, diminué de, est égal à, etc.* répétées fréquemment, et qui tiennent aux opérations par lesquelles les grandeurs qui entrent dans l'énoncé de la question, sont liées entre elles, il est visible qu'on abrégerait beaucoup en représentant chacune de ces expressions par un signe ; et c'est aussi ce qu'on fait, comme il suit :

Pour indiquer l'addition, on se sert du signe +, qui signifie *plus*.

Pour la soustraction, on se sert du signe —, qui signifie *moins*.

Pour la multiplication, on se sert du signe ×, qui signifie *multiplié par*.

Pour écrire que deux quantités doivent être divisées l'une par l'autre, on place la seconde sous la première, et on les sépare par un trait : $\frac{5}{4}$ signifie 5 *divisé par* 4.

Enfin pour marquer que deux quantités sont égales, on met entre leurs expressions le signe =, qui signifie *égale*.

Ces abréviations, quoique déjà très-considérables, ne suffisent pas encore, car on est obligé de répéter souvent *le nombre à partager, le nombre donné, etc. la plus petite partie, le nombre cherché, etc.* ce qui alonge beaucoup. A l'égard des données, l'expédient qui s'est offert le premier, a été de prendre, pour les représenter, des nombres déterminés qui servent d'exemple, comme on en use en arithmétique ; mais la chose n'étant pas possible à l'égard des nombres inconnus, on y a substitué un signe de convention, qui a varié avec le temps. On s'est enfin accordé à employer les lettres de l'alphabet ; presque toujours on se sert des dernières, comme en arithmétique on met une x pour le quatrième terme d'une proportion dont on ne connaît que les trois premiers ; et c'est de l'usage de ces divers signes qu'est résulté l'*Algèbre*.

DOCUMENT 2

De même, dans ses Elémens d'algebre, (édition de 1760), voit-on Clairaut, qui double le corps de son texte de notes marginales visant à éclairer le lecteur sur l'épisode en cours (document 3), présenter un à un ces nouveaux éléments du discours mathématique.

Méthode Algébrique d'exprimer le Problême précédent.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même queſtion, nous écrirons en langage ordinaire les raiſonnemens que l'Algébriſte fait pour réſoudre ſon Problême & en caracteres Algébriques, ce qui lui ſuffit d'écrire pour aider ſa mémoire.

La plus petite ou la troiſieme part, quelle qu'elle ſoit, je l'exprime par une ſeule lettre qui ſera, par exemple x

Le ſigne + indique l'addition.

La ſeconde ſera par conſéquent x plus 115, ce que j'écris ainſi . . . . $x + 115$, choiſiſſant le ſigne + qu'on prononce *plus* pour déſigner l'Addition des deux quantités entre leſquelles on le place.

Quant à la premiere part ou la plus grande, comme elle ſurpaſſe la ſeconde de 180, elle ſera exprimée par . . . . $x + 115 + 180$

Ajoutant ces trois parts, on aura . . . . $3x + 115 + 115 + 180$

ou en réduiſant . . . . $3x + 410$

Le ſigne = marque l'égalité.

Mais cette ſomme des trois parts doit égaler 890 ₶ ce qui s'exprime ainſi $3x + 410 = 890$, employant le caractere = qui ſe prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre leſquelles on le place.

La queſtion, par ce calcul, eſt donc changée en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410 faſſe 890.

Une équation eſt l'égalité de deux quantités.

On réſout une équation, lorſqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

Trouver la réſolution de ſemblables queſtions, c'eſt ce qu'on appelle réſoudre une équation, l'équation dans ce cas-ci eſt $3x + 410 = 890$ on l'appelle ainſi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités, réſoudre cette équation, c'eſt trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que ſon triple plus 410 faſſe 890.

III.

Réſolution de l'équation qui exprime le Problême précédent.

Pour réſoudre cette équation, voici comment l'Algébriſte raiſonne, & comment il écrit ſes raiſonnemens. L'équation à réſoudre . . . . $3x + 410 = 890$ m'apprend qu'il faut ajouter . . . . . . 410 à $3x$ pour faire la ſomme de 890, donc $3x$ ſont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainſi . . . . $3x = 890 - 410$

Le caractere — indique la Souſtraction.

Prenant le caractere — qui ſe prononce *moins* pour faire reſſouvenir que la quantité qu'il précede doit être retranchée de celle qu'il ſuit.

DOCUMENT 3

Bien entendu, l'introduction des signes «algébriques» dès les éléments d'arithmétique, qui va s'imposer définitivement au XIXème siècle, atténue quelque peu la marque formelle du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Mais la transition est toujours soulignée : elle participe de la rhétorique d'enseignement autour de la dialectique de l'ancien et du nouveau, que nous avons ailleurs présentée[8]. Elle se coule alors en d'autres analyses, et notamment dans une présentation de l'algèbre comme **mémoire**, permettant de conserver une trace des opérations effectuées. Propriété fort anciennement notée, semble-t-il, et de laquelle Clairaut — se situant, il est vrai, dans une perspective plus didactique qu'épistémologique[9] — fait même découler l'intérêt et la nécessité de l'algèbre[10].

Ainsi l'algèbre s'oppose-t-elle à l'arithmétique par une propriété qui lui donne une puissance supérieure. Mais, par là, dans un deuxième temps de la dialectique que tissent les auteurs entre arithmétique (l'ancien) et algèbre (le nouveau), l'algèbre apparaît, positivement, comme **l'accomplissement** de l'arithmétique. S'appliquant à l'origine au même corps de problèmes, elle est une arithmétique délivrée de l'opacité et de l'oubli qui dérobent à nos yeux la structure des problèmes étudiés. Elle est un instrument supérieur pour une tâche semblable. Elle est une arithmétique **universelle** — comme l'appelle Newton — ou encore une arithmétique **généralisée**, comme le note Poinsot un bon siècle plus tard, en une définition qu'un auteur de manuel de la fin du XIXème — début du XXème, comme beaucoup d'autres avant et après lui, reprend à son compte et propose à la méditation des élèves de collège : «L'algèbre élémentaire n'est autre chose qu'une arithmétique généralisée, c'est-à-dire étendue des nombres particuliers à des nombres quelconques, et, par conséquent, des opérations actuelles qu'on exécutait à des opérations qu'on ne fait plus qu'indiquer par des signes ; de

(8) Voir Chevallard 1980b.

(9) Il ne faut pas négliger, en effet, la part de rhétorique, d'intention didactique, que comporte ce genre de remarques.

(10) Ayant présenté — selon la technique didactique usuelle — la solution arithmétique d'un problème d'arithmétique pour lui comparer ensuite la solution au moyen de l'algèbre, Clairaut écrit en effet : «C'est vraisemblablement ainsi que les premiers Algébristes ont raisonné quand ils se sont proposés de pareilles questions, sans doute qu'à mesure qu'ils avançoient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur mémoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils en étoient; & lorsque les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avait pas de quoi se rebuter ; mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une manière plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques lignes simples, avec lesquels quelqu'avancés qu'ils fussent dans la solution d'un problème, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qu'il leur restoit à faire. Or, l'espèce de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algèbre» (**Elémens d'Algebre**, troisième édition, Paris 1760, p. 3).

manière que dans cette première spéculation de l'esprit on songe moins à établir le résultat de ces opérations successives qu'à en tracer le tableau, et à découvrir ainsi des formules pour la solution de tous les problèmes du même genre»[11].

IV – LE DEVENIR DE L'ARITHMETIQUE DANS LA REFORME.

En France, la réforme des mathématiques modernes est mise en œuvre à partir de la fin des années soixante : elle touche les classes de sixième et de seconde à la rentrée 1969, les classes de cinquième et de première en 1970, les classes de quatrième et de terminale en 1971, enfin, en 1972, la classe de troisième. C'est évidemment dans ce cadre d'ensemble que le phénomène étudié ici doit être situé. Du point de vue qui nous occupe, cette réforme réalise un changement profond dans l'organisation du corpus mathématique enseigné. Le programme réformé de la classe de quatrième comporte quatre titres. Les deux derniers sont consacrés à la géométrie[12]. Les deux premiers titres concernent, l'un les **relations**, l'autre les **nombres décimaux** et **l'approche des réels** (annexe 3). Formellement donc, la structuration arithmétique/ algèbre à disparu, comme nous le notions plus haut. Que s'est-il passé ?

Pour répondre à cette question, il est bon d'examiner rapidement les contenus des corpus traditionnels d'arithmétique et d'algèbre «élémentaires» (en écartant un instant les considérations de niveaux dans le cursus d'enseignement). L'arithmétique d'abord. Dans un manuel publié en 1934, à l'intention du cours moyen et du cours supérieur du premier degré[13], on trouve ainsi une première partie portant sur la numération, les quatre opérations, les problèmes d'application de ces notions, dont des problèmes «pratiques» (achat et vente à la douzaine, à la centaine ; problèmes de partage ; achats doubles successifs ; etc.), puis des «notions de géométrie» (circonférence, etc.), enfin un chapitre sur les nombres «complexes»[14]. La seconde partie,

(11) Félicien Girod, **Traité d'algèbre élémentaire**, théorie et pratique à l'usage des lycées, des collèges et de tous les établissements d'instruction (premier cycle), vingt deuxième édition, Paris, s.d., p. 9.

(12) Nous les laisserons de côté ici.

(13) **Arithmétique**, par une commission d'instituteurs, Vannes, deuxième édition 1934.

(14) Rappelons qu'on appelait **nombre complexe** «un nombre concret composé de plusieurs parties se rapportant à des unités différentes, et dont le système de numération n'est pas décimal. Ainsi 3 ans 4 mois 15 jours, 43 degrés 18 minutes 17 secondes sont des nombres complexes» (F.J., **Eléments d'arithmétique**, Tours et Paris, 1913, p. 182). «On dit qu'un nombre est concret quand il est accompagné du nom de l'unité», comme dans «vingt arbres, six billes, cinq francs soixante centimes» (d'après l'**Arithmétique** citée dans la note 13, p.2).

intitulée **Système métrique**, est consacrée aux mesures (surfaces, volumes, poids, capacités, etc.). Enfin, une troisième partie traite à la fois de la divisibilité, des fractions, des rapports et proportions, et des règles (de trois, etc.) ainsi que de leurs applications à des problèmes pratiques (caisse d'épargne, actions et obligations, etc.). D'une manière plus développée, et s'adressant à un niveau plus élevé du cursus (mathématiques élémentaires), un ouvrage de 1913[15] propose un plan qui n'est guère différent : le livre I traite de la numération et des opérations ; le livre II, des propriétés des nombres (divisibilité, plus grand commun diviseur, nombres premiers, etc.) ; le livre III, des fractions ; le livre IV, des puissances et des racines ; le livre V, des mesures (système métrique, monbres complexes) ; le livre VI, des rapports et de leurs applications (règles de trois, de société, etc.) ; le livre VII, des approximations numériques (opérations abrégées, erreurs relatives).

Corpus traditionnel — à quelques ajouts près —, avons-nous dit. Dans l'**Arithmétique** de Jacques Pelletier du Mans (1554), le premier livre traite des nombres et des opérations, de la règle de trois, directe et «rebourse» ; le deuxième livre, des fractions ; le troisième livre, de l'extraction de la racine carrée ; le quatrième et dernier livre, de la règle double de faux (de fausse position), de la règle de société, etc. Cette organisation de l'arithmétique, qui n'a pas survécu dans notre enseignement général, se retrouve aujourd'hui dans les périphéries ou dans les marges du système d'enseignement officiel : à l'intérieur, comme dans certains enseignements professionnels ; à l'extérieur, comme en tel manuel d'arithmétique[16], adressé aux «autodidactes», qui se publie aujourd'hui encore au Royaume Uni (dans le cadre d'une collection intitulée **Teach Yourself Books**), simplement mis à jour : présenté au lecteur comme «fully decimalised and metricated», il comporte, à côté des parties traditionnelles (nombres et opérations, factorisation des nombres, fractions, rapports et proportions, intérêts simple et composé, etc.), un chapitre sur la taxe à la valeur ajoutée ainsi qu'un chapitre sur les machines à calculer et la numération binaire. Un bon témoignage de l'état d'équilibre atteint à la veille de la réforme nous est fourni par l'édition de 1958 de l'**Encyclopédie autodidactique Quillet** en sa partie **Arithmétique**, dont la table des matières est reproduite plus loin (annexe 4a).

C'est ce corpus traditionnel qui vole en éclat, définitivement — car son érosion était fortement avancée —, avec la réforme du début des années soixante-dix[17]. Mais l'explosion de la nébuleuse arithmétique ne signifie pas pour autant la **disparition**

(15) Voir la note 13.

(16) L.C. Pascoe, **Arithmetic**, Decimalised and Metricated, Houdder and Stoughton, Londres, 1971.

(17) Cette rupture — évidente — recouvre pourtant, à un niveau plus profond, des éléments attestant la contiguité : nous y viendrons plus loin.

de l'arithmétique. Les parties traditionnelles de ce corpus, libérées de leur intégration au sein d'une organisation multiséculaire du savoir enseigné, vont désormais connaître des destins relativement indépendants. Le noyau essentiel — les nombres et les opérations sur les nombres —, qui constituait la base du système antérieur, non seulement ne disparaît pas, mais trouve une extension soudaine associée à une promotion en dignité mathématique : alors que, en effet, l'étude «arithmétique» des nombres ne traitait anciennement que des nombres entiers et des fractions, il s'établit désormais une progression dans l'étude des structures numériques qui, selon la logique de la filiation des structures, popularisée par l'école bourbakiste, est pensée idéalement comme allant sans solution de continuité des nombres entiers aux nombres réels, en passant par les nombres relatifs, les nombres décimaux et les rationnels. Dans cet ensemble progressivement développé, les fractions viendront occuper — dans le cadre du programme de 1978 pour la classe de quatrième, qui faisait suite aux «excès» du programme de 1971 — une place de toute première importance[18]. La «théorie des nombres», c'est-à-dire l'étude de la factorisation des nombres, du P.G.C.D., etc., à qui est réservée l'étiquette d'arithmétique, figure, elle, au programme de la classe de cinquième (et s'y trouvera maintenue sans changement par le programme de 1977). Seule, la partie constituée des «problèmes pratiques» fait véritablement les frais de la modernisation, et disparaît à peu près complètement, si l'on excepte quelques vestiges, telle l'étude des «suites finies proportionnelles» en classe de sixième (qui prolonge un thème abordé au CM2) — étude éventuellement conçue d'ailleurs comme préparant, mais de longue main, à la notion d'application linéaire, inscrite au programme de la classe de troisième[19].

Ce qui disparaît, en fait, à l'exception notable — répétons-le — des problèmes pratiques, ce n'est pas l'arithmétique (même si le mot lui-même ne renvoie plus qu'à l'une des parties du corpus arithmétique traditionnel), mais la **dialectique** de l'arithmétique et de l'algèbre. Or cet affaissement d'une structuration traditionnelle va moins peser sur la composante arithmétique que sur la composante algébrique des mathématiques enseignées au collège : c'est l'algèbre (entendue au sens traditionnel de ce mot à ce niveau des études mathématiques) qui va se trouver le plus violemment mise en cause par les changements opérés.

(18) «En calcul, notent les **Instructions** officielles, la nouveauté réside dans l'accent qui est mis sur la notion de fraction (...)» (Ministère de l'Education, **Mathématiques**, classes des collèges, 6ème, 5ème, 4ème, 3ème, 1980, p. 29).

(19) Les manuels correspondant aux programmes de 1978 redonneront une place au «problèmes concrets» ; ceux-ci y apparaissent toutefois, essentiellement, à titre d'applications, non de problèmes permettant la construction et l'appropriation des notions à enseigner.

V – UNE ALGEBRE INTROUVABLE ?

Il nous faut maintenant rappeler rapidement ce qu'était l'ancienne organisation du corpus algébrique. Formé de manière évidemment plus tardive que le corpus arithmétique, le corpus algébrique atteint pourtant assez vite une stabilité remarquable, qui le laisse à peu près inchangé sur deux siècles et plus. Ecartant le traité d'algèbre publié par Newton sous le titre d'**Arithmetica Universalis**[20], fort instructif à tous égards mais relativement atypique, considérons l'ouvrage d'Euler déjà mentionné. Son tome premier comporte quatre sections. La première traite «des différentes méthodes de calcul pour les grandeurs simples ou incomplexes», c'est-à-dire du calcul sur les nombres, mais sur les nombres (que nous appelons) relatifs, dont l'introduction fait un avec «l'explication des Signes + (Plus) et - (Moins)» (chapitre II), et sur les nombres fractionnaires. Les quatre opérations arithmétiques, les racines, les puissances, mais aussi les «quantités impossibles ou imaginaires» ainsi que les logarithmes y sont longuement présentés. La deuxième section traite «des différentes méthodes de calcul pour les grandeurs composées ou complexes», c'est-à-dire du calcul algébrique ; la troisième «des rapports et des proportions» ; la quatrième, «des équations algébriques, et de la résolution de ces équations». Quant au tome second, il est consacré à «l'analyse indéterminée», que nous n'examinerons pas ici[21]. Cette organisation subit évidemment d'une part des variations en fonction du niveau visé, d'autre part une évolution dans le temps, qui conduit, dans la première moitié du XXème siècle, à un ensemble relativement stabilisé dont, à la veille du grand mouvement de réforme, l'Encyclopédie Quillet, déjà citée, nous fournit une version commode (annexe 4b).

En ce qui concerne tout au moins **les débuts de l'algèbre**, trois thèmes apparaissent essentiels : les nombres algébriques (c'est-à-dire les nombres relatifs), le calcul sur les expressions algébriques, les équations algébriques. Que deviennent-ils dans le cadre de la réforme ? La difficulté de la réponse à apporter tient au moins en partie au fait que signifiants et signifiés se trouvent alors dissociés, redistribués et, en ce qui concerne les contenus, coulés en des cadres conceptuels nouveaux, qui rompent les anciennes concordances. Il en est ainsi notamment pour les nombres algébriques, qui perdent leur qualificatif, comme on l'a noté, pour devenir nombres relatifs. Sous cette étiquette, la place qui leur est dévolue n'est pas diminuée, mais au contraire majorée (et en cela, ils profitent du mouvement général d'amplification dont bénéficient

(20) Publiée (en latin) en 1707 mais établie sur la base de cours donnés par Newton une trentaine d'années auparavant, l'**Arithmétique universelle** paraît en français en 1802.

(21) Lorsque la question étudiée «ne fournit pas autant d'équations qu'on est obligé d'admettre d'inconnues, il y en a qui restent indéterminées, et qui dépendent de notre volonté ; et cela fait qu'on nomme ces sortes de questions des **problèmes indéterminés**. Ils font le sujet d'une branche particulière de l'analyse, et on appelle cette partie l'**Analyse indéterminée**» (Euler, **op. cit.**, tome second pp. 1-2).

les structures numériques). Leur étude, inscrite au programme de la classe de sixième, est développée en classe de cinquième : dans les programmes de ces deux classes, ils constituent un titre à part entière, aussi bien en 1969-1970 qu'en 1977-1978.

Il en va autrement du calcul algébrique et de l'étude des équations. Ces questions formaient traditionnellement le cœur de l'algèbre élémentaire. Dans un **Manuel d'algèbre** publié en 1827, «à l'usage des personnes privées du secours d'un maître», l'auteur[22] ouvrait sa première leçon par les lignes suivantes :

I L'algèbre est l'art d'exécuter sur des quantités quelconques, au moyen des signes généraux, toutes les opérations de l'arithmétique, et de représenter, à l'aide des mêmes signes, toutes les relations entre ces quantités.

II La partie de l'algèbre qui enseigne les règles pour exécuter les opérations arithmétiques sur des quantités quelconques se nomme **calcul littéral.**

III La partie de l'algèbre qui traite de la manière de représenter, à l'aide de signes, les relations entre les quantités, se nomme **calcul par équation.**

IV On verra dans la suite que, dans le calcul par équation, on a sans cesse besoin du calcul littéral ; c'est donc par celui-ci qu'il faut commencer.

C'est cet ensemble (calcul algébrique, équations algébriques) qui va se trouver fortement minoré dans les programmes réformés. Pour ne donner ici de cette brutale déflation qu'une seule illustration, on a réuni dans l'annexe 5 (dont on voudra bien excuser la longueur) les listes d'exercices relatives à la multiplication d'expressions algébriques, d'une part (a, b) dans deux manuels d'ancienne manière[23], d'autre part (c) dans un manuel considéré comme de niveau élevé[24], conforme au programme de 1971 : la confrontation est éloquente.

Le terme d'algèbre a disparu des programmes (à l'exception du programme de la classe de troisième), nous l'avions noté. Mais, avec le mot, la chose elle-même se trouve emportée : l'algèbre disparaît !... Cet évanouissement est en fait sélectif : les parties «numériques» de l'algèbre résistent bien. Les nombres relatifs sont un élément essentiel de l'enseignement de la classe de cinquième. Les fractions, un temps mises à l'écart (en 1971), seront ensuite réinstallées comme élément central du programme de

(22) M. Terquem, auteur d'un **Manuel d'algèbre** ou exposé élémentaire des principes de cette science, publié à Paris en 1827. La citation qui suit se trouve pp. 1-2.

(23) Il s'agit (a) du manuel de F. Girod (voir ci-dessus, note 11) et (b) du manuel de Lebossé et Hémery pour la classe de quatrième, dans son édition de 1962 (Fernand Nathan, Paris).

(24) Il s'agit du manuel de la collection Queysanne-Revuz, série rouge, dans son édition de 1973 (Fernand Nathan, Paris).

quatrième (en 1978). Ce sont les parties «algébriques» de l'algèbre — calcul et équations algébriques — qui pâtissent de la modernisation. Plusieurs raisons semblent devoir expliquer ce phénomène. Avançons d'abord une raison proprement didactique, qui a pu jouer négativement. Le calcul algébrique, à l'origine simple préliminaire à l'étude des équations était en fait devenu proliférant comme on peut en juger notamment sur le document de l'annexe 5a, étouffant progressivement les autres parties du corpus enseigné. Il était sain que l'on tente d'en limiter le développement, et la tendance antérieure à la réforme proprement dite allait en effet dans ce sens : les manuels avaient commencé le travail déflationniste (comme le montre la comparaison des documents a et b de l'annexe 5). Mais ce type de phénomène, qui constitue au demeurant davantage la règle que l'exception dans l'évolution du texte d'enseignement (que l'on songe ici à la dégénérescence de l'étude des équations du second degré en la fameuse «trinômite» qui frappait, à peu près dans le même temps, les classes du second cycle), et la réaction qu'il devait susciter, allaient rencontrer une autre force de changement, sans doute bien plus puissante : l'apparition de l'algèbre «moderne», sur laquelle il faut s'arrêter un instant.

Dans leurs **Eléments d'algèbre moderne**, dont la quatrième édition paraît en 1961 (la première étant de 1956), A. Lentin et J. Rivaud[(25)], qui situent l'apparition de l'algèbre moderne vers 1910, inscrivent celle-ci dans le prolongement de l'arithmétique et de l'algèbre traditionnelles (mais sans les nommer) : «A l'école primaire, écrivent-ils, l'enfant raisonne sur des collections et des grandeurs concrètes dont il dégage progressivement la notion de nombre abstrait, indépendant de la nature des choses comptées ou mesurées. L'enseignement du second degré apprend à l'adolescent la manipulation des x et des y indépendamment des nombres que ces lettres représentent. Un pas de plus dans le calcul et c'est le calcul sur les polynômes, puis la composition des transformations formelles. Eh bien, l'algèbre moderne formera l'étudiant à raisonner sur les propriétés des opérations indépendamment des éléments (nombres, polynômes, transformations...) sur lesquels s'exercent ces opérations»[(26)]. En fait, les parties traditionnelles de l'algèbre (calcul et équations algébriques) sont bien intégrées dans l'algèbre moderne ainsi présentée. Mais elles n'en constituent ni l'essentiel, ni, surtout, les **débuts**. Les auteurs cités, dont l'ouvrage est constitué de cinq livres, consacrent leur dernier livre à des «compléments sur les groupes et sur les équations algébriques» (un développement plus ample de la question eût conduit à la théorie des extensions de corps et à la théorie de Galois, dont les rudiments sont présentés dans ce livre). Ainsi le traitement des équations algébriques se trouve-t-il rejeté fort loin dans l'exposé moderne de l'algèbre. Le calcul algébrique, quant à lui, se retrouve

(25) A. Lentin et J. Rivaud, **Eléments d'algèbre moderne**, Vuibert, Paris, quatrième édition 1961.

(26) **Loc. cit.**, pp. V-VI.

ici dans le livre II, sous les espèces de l'étude des anneaux de polynômes. Mais le véritable commencement de l'algèbre moderne, **c'est l'étude des structures** (lois de composition, groupe, anneau, corps), qui occupe tout le livre I. L'honnête homme qui, en 1958 encore, s'initiant à l'algèbre, se voyait proposer nombres algébriques, expressions algébriques, équations, etc., se verra offrir quelques années plus tard relations binaires, élément neutre, etc. Le chapitre **Algèbre** que M. Glaymann écrit au début des années soixante-dix pour un ouvrage adressé au grand public (il paraît dans la collection «Les dictionnaires du savoir moderne») est à cet égard significatif : loi de composition, élément neutre, commutativité, élément symétrique, associativité, élément régulier, distributivité, et encore structures, monoïde, groupe, sous-groupe, groupe cyclique, morphisme de groupes, anneau, anneau intègre, corps, etc., en sont les maîtres-mots(27).

Il se produit, donc, en quelques années, une véritable **substitution d'objet**, dont le texte d'enseignement reçoit bientôt la marque : les programmes réformés de sixième, cinquième et quatrième comportent tous un titre **Relations** ; et le programme de quatrième introduit les notions de groupe et de division dans un groupe, qui conduisent à examiner l'équation $ax = b$ dans le groupe multiplicatif des réels non nuls. Le calcul algébrique est réduit à la portion congrue : il fait l'objet du point 4 du titre II du programme (annexe 3). L'étude des équations, conformément au plan moderne d'exposition de l'algèbre, est déchue de ses titres, et se trouve repoussée en classe de troisième.

VI — L'ALGEBRE SANS ALGEBRE ?

La situation créée par la réforme autour de 1970 consacre la promotion des structures numériques (à côté du géométrique, dont nous ne parlerons pas ici), en même temps qu'elle réalise une évidente inflation théorique, à propos du numérique comme du géométrique. C'est ce théoricisme qui, après avoir suscité d'abord un vif enthousiasme, se trouvera en butte à une multitude de critiques, qui conduiront à la rédaction des programmes de 1977-1978, actuellement en vigueur. La focalisation du débat se fait sur la manière de traiter les contenus — avec, notamment, le rejet du «purisme» qui imprégnait l'esprit de la réforme précédente(28) —, davantage que sur la **distribution** des contenus eux-mêmes et sur la structuration et l'équilibre des diverses parties du corpus enseigné. Celui-ci apparaît en conséquence plus comme

(27) Maurice Glaymann, L'algèbre, **in Les mathématiques**, Centre d'études et de promotion de la lecture, Paris, 1973, pp. 16-54.

(28) Dans la présentation déjà citée des programmes de 1978 (voir la note 2 ci-dessus), l'équipe de rédaction du **Bulletin de l'A.P.M.E.P.** dénonçait le purisme mathématique qui, en fait, «est un purisme d'exposition, non d'apprentissage ou de fonctionnement, qui n'a donc rien à faire dans le premier cycle (...)».

une version «dégraissée» du corpus des années soixante-dix que comme une version fondamentalement nouvelle : à côté du géométrique, que l'on entend «désaxiomatiser», le numérique y demeure prédominant, même si l'on n'y inclut plus les mêmes matériaux. Les nombres réels, en effet, sont les grands perdants du réaménagement opéré. Et ce sont les fractions et les rationnels qui, venant occuper la place ainsi libérée dans le programme de quatrième, constituent maintenant la pièce centrale de l'étude du numérique — les nombres relatifs (entiers et décimaux) conservant en classe de cinquième le rôle prééminent qui leur était antérieurement reconnu.

Il faut en ce point dire quelques mots de la promotion donnée dans ces programmes aux fractions et aux rationnels. Pour des raisons dans lesquelles nous n'entrerons pas ici, les fractions (associées aux rapports et aux proportions) étaient traditionnellement tiraillées entre l'arithmétique, la géométrie, et, dès la naissance du corpus algébrique, l'algèbre elle-même. Présentant ses **Elémens d'Algebre**, Clairaut ne manque d'ailleurs pas de faire connaître au lecteur l'embarras où cette question l'a tenu : «j'avois d'abord compté donner dans le même livre, écrit-il, tant les Elémens d'Arithmétique, que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elémens de Géométrie...». Bien entendu, en passant de l'arithmétique à l'algèbre, on passait aussi des fractions arithmétiques (rapports d'entiers, c'est-à-dire d'entiers naturels) aux fractions algébriques (rapports d'entiers «algébriques», c'est-à-dire relatifs) et aux fractions rationnelles (rapports de polynômes). Mais ces reprises sont significatives de l'intérêt didactique accordé au thème : les fractions constituent un sujet de choix pour l'enseignement.

Comme on l'a rappelé[29], «l'accent qui est mis sur la notion de fraction» constitue, selon les termes mêmes des **Instructions** relatives au programme de quatrième de 1978, l'élément de «nouveauté» de ce programme. Nouveauté d'antique mémoire !... Henri Lebesgue, presque un demi-siècle plus tôt, avait fermement invité les professeurs à se débarrasser de ce monstre du Loch Ness mathématique : «... on sera bien, je pense, d'accord avec moi, écrivait-il[30], pour déclarer que marier des 22ièmes et des 37ièmes est un martyre que nous infligeons aux gosses de douze ans par pur sadisme, sans aucune raison d'utilité comme circonstance aténuante...». Mais il ajoutait aussitôt : «J'entends tous les professeurs protester. Les uns parce que les fractions fournissaient d'innombrables exercices pour leurs jeunes élèves ; après un moment d'effroi, ceux-ci s'apercevront qu'ils ne manqueront jamais d'exercices. La plainte des autres m'émeut

(29) Voir la note 18.

(30) Dans **La mesure des grandeurs** (Albert Blanchard, Paris, 1975), p. 25.

davantage et, pour la vérité, je la formule moi aussi : «Supprimer dans la classe de mathématiques la théorie des fractions, c'est supprimer un chapitre admirable. Le seul peut-être, parmi ceux qui nous restent, qui ne soit pas là uniquement pour son utilité immédiate et qui donne le sentiment de la beauté pure»»[31]. Or cette admirable construction devient, dans le cadre des mathématiques modernes, plus admirable encore, ou disons plus subtile : le maniement sans complexe des fractions fait place à une ontologie raffinée, dans laquelle les fractions, devenues couples de nombres, ne sont plus — en théorie plus qu'en pratique, bien sûr — que le matériau de la construction des rationnels, classes d'équivalence de fractions. A vrai dire, cette présentation moderne n'était guère favorisée par le programme de 1971 (dans lequel les réels faisaient directement suite aux décimaux, les rationnels n'étant alors que des réels particuliers, les quotients d'entiers). Mais le programme de 1978 lui donne une nouvelle chance, et quelques manuels, impavides, la mettent en œuvre (document 4a). Cette perspective constructiviste peut en fait être aisément évitée, au profit d'une conception réaliste (celle-là même que le programme de 1971 poussait en avant : les réels étant supposés donnés — ils étaient «construits» dans le programme de 1971 —, un rationnel est un réel qui peut s'écrire comme quotient d'entiers), et la plupart des manuels utilisent cette possibilité (document 4b), conceptuellement et techniquement moins difficile, et sans doute plus proche de la représentation du nombre qui est effectivement celle des élèves, et même du «working mathematician». Mais le souci de purisme n'a pas disparu : le goût de la «rigueur» (sic) conduit chez quelques-uns (document 4c) à une véritable confusion sur le sens du signe d'égalité (qui ne signifie en principe nullement que les deux membres de l'égalité sont des **expressions** identiques — formellement, ou syntaxiquement —, ce qui interdirait déjà d'écrire que $6 = 2 \times 3$, mais que **ce qu'ils désignent** sont une seule et même chose, le signe d'égalité ne signifiant rien d'autre qu'une identité **sémantique**). Cela dit, le problème — élégamment mais coûteusement résolu par le moyen des classes d'équivalence — existait avant les mathématiques modernes, et continue d'exister : mais le corpus ancien le traitait (inconsciemment ?) avec une grande discrétion (document 4d), en distinguant, chaque fois qu'il était nécessaire, la fraction (considérée alors implicitement comme **écriture**, à savoir comme **rapport**) et la **valeur** de la fraction (soit le nombre — rationnel — désigné par cette écriture). Quoi qu'il en soit, tout ce jeu, laissé autrefois implicite, et plus ou moins fortement explicité aujourd'hui, participe de l'admirable construction des fractions, qui séduit tant les professeurs, comme dit Lebesgue.

(31) Ibid., pp. 25-26.

6 Ensemble $\mathbb{Q}$

Nombres rationnels

RAPPELONS :

Dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des fractions, nous avons défini la relation $\mathcal{R}$ suivante :

Quelles que soient les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on a : $\left(\frac{a}{b}\,\mathcal{R}\,\frac{c}{d}\right) \longleftrightarrow (ad = bc)$.

Nous avons établi (p. 48) que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{F}$.

Pour traduire que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont liées par $\mathcal{R}$, nous avons écrit : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

et nous avons dit que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont équivalentes.

DÉFINITION :

Nous donnons la définition suivante :

Chaque classe d'équivalence selon $\mathcal{R}$ est appelée un nombre rationnel.

Nous désignons par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

REPRÉSENTANT D'UN RATIONNEL.

Soient x un élément de $\mathbb{Q}$ et $\frac{a}{b}$ une fraction, élément de $\mathcal{F}$.

Nous disons que x **est un nombre rationnel dont un représentant est $\frac{a}{b}$ si et seulement si x est la classe d'équivalence selon $\mathcal{R}$ de la fraction $\frac{a}{b}$.**

Le nombre rationnel x est donc l'ensemble des fractions $\frac{c}{d}$ équivalentes à $\frac{a}{b}$; nous avons : $x = \left\{\frac{c}{d} \,\middle|\, c \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\right\}$.

Remarquons que toute fraction équivalente à $\frac{a}{b}$ est un représentant du nombre rationnel x.

DOCUMENT 4a
(Mathématiques/4ème, collection Monge, 1978)

CHAPITRE 4
algèbre

Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

1/Définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels

définition

> Un nombre réel (ou réel) est appelé **nombre rationnel** (ou rationnel) s'il est égal à un quotient de deux entiers relatifs.

Autrement dit :
Un réel x est un rationnel s'il existe un entier relatif a et un entier relatif non nul b tels que x soit égal au quotient $\frac{a}{b}$.

exemples

- Les quotients suivants sont des rationnels :
$\frac{2}{3}$; $\frac{-4}{78}$; $\frac{-13}{-5}$; $\frac{248}{-614}$; $\frac{57}{57}$; $\frac{-29704}{1}$; $\frac{0}{25}$; $\frac{37}{-1000}$; $\frac{0}{-14}$; $\frac{359}{1}$.
- Le réel r égal au quotient $\frac{-2{,}7815}{0{,}013}$ est-il un rationnel?

-2,7815 et 0,013 ne sont pas des entiers relatifs.

On sait que (propriétés des quotients de réels) :

$$\frac{-2{,}7815}{0{,}013} = \frac{-2{,}7815 \times 10^4}{0{,}013 \times 10^4} = \frac{-27815}{130}.$$

Conclusion : r est un rationnel.

DOCUMENT 4b
(Mathématiques/4ème, collection Durrande, 1979)

5 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

1 - DÉFINITION ET EXEMPLES

Dans le chapitre 4, nous avons rencontré des nombres qu'on pouvait obtenir comme quotient exact d'un entier relatif *a* par un entier relatif non nul *b*. Ces nombres s'appellent les **nombres rationnels** (ou plus simplement : les rationnels). Ils sont représentés par des fractions, ainsi :

Nombre rationnel x	Exemples de fractions représentant x
l'entier relatif -2	$\frac{-2}{1}$; $\frac{-6}{3}$; $\frac{-18}{9}$; $\frac{2}{-1}$; ...
le décimal relatif 3,5	$\frac{7}{2}$; $\frac{14}{4}$; $\frac{35}{10}$; $\frac{-7}{-2}$; ...
le rationnel $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$; $\frac{10}{6}$; $\frac{50}{30}$; $\frac{-5}{-3}$; ...

Récapitulation des principales définitions.

***Définitions.* Soit *a* un entier relatif quelconque, et soit *b* un entier relatif non nul.**

1/ Le couple *(a, b)*, écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ s'appelle la *fraction* de numérateur *a* et de dénominateur *b*.

2/ Cette fraction représente le *quotient exact* de *a* par *b*, que l'on note aussi $\frac{a}{b}$. On a donc, par définition :

$$b \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times b = a$$

3/ On appelle *nombre rationnel* tout nombre que l'on peut obtenir comme quotient exact d'un entier relatif par un entier relatif non nul.

Attention ! La même notation $\frac{a}{b}$ est utilisée pour désigner deux choses différentes :

le couple *(a, b)*
le quotient exact de *a* par *b*.

Quand on écrit $\frac{14}{4}$, il faut préciser s'il s'agit de la fraction $\frac{14}{4}$ (le couple (14; 4)) ou du rationnel $\frac{14}{4}$ (qui est égal à 3,5) :

le rationnel $\frac{14}{4}$ est égal au rationnel $\frac{7}{2}$;

la fraction $\frac{14}{4}$ n'est pas égale à la fraction $\frac{7}{2}$.

(puisque les couples (14, 4) et (7, 2) sont distincts).

Une convention commode

Pour éviter cet inconvénient, nous conviendrons toujours que, dans les calculs, $\frac{a}{b}$ désigne le nombre rationnel $\frac{a}{b}$, quotient exact de *a* par *b*. Ainsi, nous pourrons écrire :

$$\frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Quand vous voudrez parler du couple (14, 4), il faudra préciser : « la fraction $\frac{14}{4}$ ».

DOCUMENT 4c

(Mathématiques, classe de quatrième, collection Queysanne et Revus, 1979)

SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

149. Simplifier une fraction c'est la remplacer par une fraction égale, mais ayant des termes plus petits.

150. *PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.*

1° On mesure deux rubans avec le septième d'une longueur donnée A B. L'un mesure 2 septièmes, l'autre 4 septièmes de l'unité. Il est évident que le deuxième est double du premier :

$$\frac{4}{7} = \frac{2 \times 2}{7} = \frac{2}{7} \times 2 \quad \text{donc :}$$

Théorème I. — Si on multiplie le numérateur d'une fraction par un nombre, la fraction est multipliée par ce nombre.

2° Un ruban mesure 5 septièmes de la longueur A B; un deuxième ruban vaut 5 quatorzièmes de la même unité.
Un quatorzième étant deux fois plus petit qu'un septième, la deuxième longueur est deux fois plus petite que la première.

$$\frac{5}{14} = \frac{5}{7 \times 2} = \frac{5}{7} : 2 \quad \text{par suite :}$$

Théorème II. — Si on multiplie le dénominateur d'une fraction par un nombre, la fraction est divisée par ce nombre.

3° Soit la fraction $\frac{3}{5}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

Elle ne change pas de valeur si on multiplie ses deux termes par 3.
En effet, si on multiplie son numérateur, elle devient 3 fois plus grande; si on multiplie son dénominateur, elle devient 3 fois plus petite. Par conséquent :

Théorème III. — Si on multiplie les deux termes d'une fraction par un même nombre, la fraction ne change pas de valeur.

On voit qu'une même grandeur peut être mesurée par une infinité de fractions toutes égales.

Corollaire. — Si on divise les deux termes d'une fraction par un même nombre (*l'opération étant possible*), **on obtient une fraction égale à la première.**

Soit la fraction $\frac{18}{21}$ dont les deux termes sont divisibles par 3.

On peut écrire : $\frac{18}{21} = \frac{6 \times 3}{7 \times 3}$

et, d'après le théorème précédent : $\frac{6}{7} = \frac{6 \times 3}{7 \times 3}$

On a donc $\frac{18 : 3}{21 : 3} = \frac{6}{7}$; la fraction $\frac{6}{7}$ a des termes plus petits que la fraction $\frac{18}{21}$, d'où la règle de simplification des fractions :

151. **Règle. —** *Pour simplifier une fraction, on divise ses deux termes par un même nombre.*

DOCUMENT 4d

Arithmétique de l'Encyclopédie Quillet, 1958

Fractions et rationnels, en fait, ne constituent pas seulement une admirable construction mathématique : ils composent en même temps un objet didactique intéressant à bien des égards. La place de l'élève (c'est-à-dire ce qui peut être requis de l'élève à ce propos) y est nettement dessinée : Lebesgue le soulignait judicieusement, le chapitre regorge d'exercices, dont la difficulté (c'est-à-dire, en gros, la complexité) peut être finement graduée. La place de l'enseignant, elle aussi, s'y trouve préparée : le professeur éprouve toute sa spécificité, face à l'élève, en tant qu'architecte et bâtisseur — fonctions dans lesquelles l'élève ne saurait lui disputer sa place — d'une construction mathématique à la fois simple, rigoureuse, riche, dont la complète transparence n'est acquise qu'au prix de quelque subtilité intellectuelle, nullement inaccessible à l'élève, mais relativement exigeante. Toutefois, il y a plus. En un sens, tout objet de savoir didactiquement acceptable laisse voir deux «places» : il doit contenir le «lieu» que l'élève viendra occuper (les tâches que le contrat didactique lui assignera en propre), il doit contenir aussi un lieu spécifiquement alloué à l'enseignant. Ce marquage des places, consubstanciellement lié au fonctionnement didactique du savoir, est un processus général, que j'ai proposé(32) d'appeler la **topogénèse** (du grec **topos**, lieu). Mais la dialectique topogénétique peut être plus ou moins resserrée, plus ou moins relâchée : dans ce dernier cas (qui correspond, comme j'essaierai de l'indiquer plus loin, à ce que nous voyons majoritairement se produire aujourd'hui à propos de l'emploi du langage algébrique), les échanges entre élèves et enseignant demeurent pauvres, la communication est distante, parce que les uns et les autres ne se mesurent pas aux mêmes tâches (le professeur **démontre** une égalité littérale, l'élève l'**applique** à des cas particuliers numériques). Avec les fractions, une fois fixée l'architecture générale de l'édifice, il en va autrement : passés les calculs les plus simples, les calculs qui ne sont pas triviaux pour l'élève — tout en demeurant de l'ordre de ce qui peut loyalement lui être demandé — ne le sont qu'à peine moins pour le professeur. Les partenaires de l'interaction didactique se rapprochent, autour d'une tâche unique, jusqu'à sembler parfois unir leurs efforts à la recherche d'une commune réponse. Tout comme la géométrie (qui s'oppose par cela, et du seul point de vue didactique déjà, à l'algèbre en général), les fractions constituent l'occasion d'une réelle **convivialité** dans la classe. Les distinctions qualitatives (marquées par des tâches de natures différentes) s'estompent au profit de simples différences quantitatives (l'enseignant va plus vite, plus sûrement, mais il ne sait rien de plus que l'élève, et ne fait rien de plus que lui). Le groupe à la fois se rassemble, gagne en cohésion, et en même temps se différencie continûment sans que son identité s'y perde.

Il y a là quelques-unes des raisons **didactiques** qui expliquent la prééminence de fait de l'étude des fractions dans les classes actuelles de quatrième. Or — et nous faisons là retour à notre sujet, qu'en fait nous n'avions pas quitté —, dans le vocabulaire des enseignants, les fractions **font partie de l'algèbre !** Même si le programme officiel n'utilise pas le terme, il semble que l'usage se soit spontanément créé de nommer «algèbre», dans la pratique de la classe, ce qui n'est pas géométrie : l'algèbre c'est, globalement, l'**autre** de la géométrie. Cet emploi, peut-être irréfléchi, du mot ne manque pourtant pas de justificatifs. Les hésitations historiques dont nous avons parlé traduisent aussi (par delà l'opposition fractions de nombres arithmétiques / fractions de nombres algébriques) une réalité qui perdure : les fractions (d'entiers) ne sont pas

(32) Voir Chevallard 1980b.

de l'algèbre au sens où elles ne contiennent pas de lettres (les lettres sont essentiellement utilisées **par le professeur**, pour formuler les lois qui régissent leur calcul) ; mais elles relèvent de l'«algébrique» en cela qu'elles sont le lieu d'un **jeu formel** portant sur des **écritures**. Elles offrent donc l'occasion d'une algèbre sans algèbre, qui fait le gros morceau de l'algèbre aujourd'hui enseignée. Il faut voir par quel cheminement on en est venu là.

VII – LA DIALECTIQUE NUMERIQUE/ALGEBRIQUE.

Pour expliquer plus complètement et l'évanouissement des parties algébriques de l'algèbre, et – corrélativement – le **come-back** des fractions, il nous faut compliquer quelque peu le tableau que nous avons tracé jusqu'ici. A l'opposition structurelle de l'arithmétique et de l'algèbre correspondait – en principe – une dialectique fonctionnelle entre **numérique** et **algébrique**. C'est sur cette dialectique que nous devrons d'abord nous arrêter un instant.

Il faut pour cela prendre quelque recul. Cette dialectique, en effet, existe historiquement avant l'algèbre (avant la construction d'un langage algébrique proprement dit). Les Grecs distinguent entre deux arithmétiques, l'arithmétique vulgaire, ou **logistique**, celle des calculateurs, et l'arithmétique «propre aux philosophes», comme dit Platon, c'est-à-dire, en gros, la théorie des nombres. Les calculateurs calculent. Les arithméticiens étudient la structure du numérique. Tous manipulent, pour cela, un **langage du numérique**, mais tous ne l'emploient pas aux mêmes tâches, et ne lui reconnaissent pas les mêmes valeurs. Dans l'arithmétique pratique, l'analyse du numérique procurée par le langage adopté est un **moyen**, ordonné à un but : opérer des dénombrements, effectuer des calculs. Si, dans notre système actuel de numération, je désire calculer 12×12 par exemple, je n'ai besoin d'autre analyse du nombre 12 que celle qui m'est immédiatement donnée dans l'écriture (décimale) de ce nombre (chiffre des dizaines : 1 ; chiffre des unités : 2). Mais si, comme le scribe du papyrus Rhind, je ne sais multiplier que par duplications successives et additions, je devrai recourir à une analyse moins immédiate du nombre 12 (qui ne m'est pas offerte par l'écriture décimale actuelle). Il me faudra observer que $12 = 4 + 8$, et calculer ainsi(33) :

1	12
2	24
4	48
8	96

(33) Voir Smith 1953, p. 106.

d'où je déduirai que $12 \times 12 = 12 \times (4+8) = 48 + 96 = 144$. De telles manières de faire, qui se rencontrent encore à des dates rapprochées[34], apparaissent à l'utilisateur contemporain comme des survivances d'un âge imparfait. Un bon système numération-algorithmes de calcul, en effet, doit être tel que toute l'information requise pour mettre en œuvre les algorithmes de calcul soit donnée d'emblée avec les nombres donnés écrits dans le langage numérique utilisé, c'est-à-dire soit **apparente dans l'écriture même de ces nombres**. En d'autres termes, un bon système numération-algorithmes **récuse tout appel aux mathématiques**, fût-ce sous une forme apparemment anodine. L'usager d'un tel système est évidemment supposé pouvoir calculer que $4 + 8 = 12$ (ce pour quoi le système est fait) ; mais le contrat d'utilisation qui règle ses rapports avec le système exclut qu'il ait à penser que $12 = 4 + 8$. Paradoxalement peut-être, l'un des effets, et sans doute des buts (poursuivis de manière plus ou moins intentionnelle), de l'activité mathématique est de proposer à l'usage social des procédures non mathématiques, obtenues par démathématisation progressive de procédures à l'origine proprement mathématiques. Le fait est banal et général : les progrès de l'électronique me dispensent aujourd'hui du bricolage auquel étaient tenus les utilisateurs du poste à galène...

En fait, le royaume du calcul numérique est régi par la **loi de simplification**, intériorisée en habitus[35], dont l'une des clauses est constituée par le **principe d'achèvement des calculs**. Selon ce «principe», l'expression «4 + 8» ne saurait, en calcul numérique, figurer comme réponse, le calcul, à ce stade, étant «inachevé»[36]. L'expression «4 + 8» ne saurait ainsi être qu'une forme transitoire, labile (parce que quatre plus huit égale douze), et n'existe pas plus d'une manière libre que l'atome d'oxygène en dehors de la molécule O_2.

Il en va tout autrement avec la tradition «noble» de la «théorie des nombres». Les Pythagoriciens, au tout début de la science grecque, élaborent ainsi toute une conception de la représentation «géométrique» des nombres, soit une **arithmo-géométrie**[37]. Considérons par exemple les entiers impairs 5 et 7. Leurs représentations

(34) **Ibid.**

(35) P. Bourdieu désigne par **habitus** des «systèmes de **dispositions** durables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principe de génération et de structuration de pratiques et de représentations (...)» (Bourdieu 1974, p. 175).

(36) Les **Instructions** de janvier 1957 (sur lesquelles nous revenons plus loin) parlent explicitement de «calcul conduit jusqu'à son achèvement» : fait rare et remarquable car il est de la nature d'un habitus de ne pas supposer l'explicitation des principes à l'origine de son efficace.

(37) Sur l'arithmo-géométrie des Grecs, voir Michel 1959, pp. 295-325.

figurées peuvent être disposées ainsi :

O	O O O O
O O	O O O
O O	
5	7

Réunissons ces représentations de la manière suivante :

O O O O

O O O O

O O

O O

En les regroupant adéquatement, il apparaît que la somme 5 + 7 est un multiple de 4 (plus précisément que $5 + 7 = 3 \times 4$) :

O O   O O

O O   O O

O O

O O

De plus, si on «complète» le carré, on voit apparaître immédiatement que 5 + 7 est une différence de deux carrés (plus précisément que $5 + 7 = 4^2 - 2^2$) :

O O O O

O O O O

O O X X

O O X X

Ces monstrations qui, au sens strict, n'ont de force démonstrative que pour les valeurs numériques particulières traitées, ont en fait une valeur **générique**, comme les figures (et les démonstrations qu'elles permettent) en géométrie : on n'est pas loin d'une démonstration valable pour tous les couples d'impairs consécutifs. Nous pouvons, rétrospectivement, admirer la finesse intellectuelle que l'invention et l'emploi de telles procédures supposent. Mais nous pouvons aussi voir que notre langage algébrique actuel (créé par Viète, Descartes et quelques autres) s'inscrit dans le prolongement de cette **analyse du numérique**, tout en la dépassant en souplesse et en puissance.

Sur le même problème, aujourd'hui, nous obtenons par exemple ceci : soient 2p - 1 et 2p + 1 deux impairs consécutifs ; leur somme, $(2p - 1) + (2p + 1) = 4p$, est un multiple de 4 ; et, puisque $4p = (p + 1)^2 - (p - 1)^2$, elle s'écrit aussi comme une différence de deux carrés... Le langage nouveau permet d'abord de formuler le problème dans sa généralité, puis de le résoudre de manière également systématique.

Le calcul numérique utilise le langage numérique pour son pouvoir désignatif essentiellement : «3/4» et «0,75», ou encore «4 + 8» et «12», sont à cet égard équivalents, puisqu'ils désignent le même nombre (simplement, «3/4» est une fraction «non effectuée», «4 + 8», une somme non effectuée) : ils sont des noms différents pour un même être mathématique. L'arithmétique «algébrique», au contraire, distingue ces noms, parce que, bien qu'ils désignent la même chose, ils ne montrent pas la même chose (ils n'apportent pas la même information monstrative) à propos de l'être mathématique dont ils sont deux noms différents («4 + 8», ou mieux, «$2^2 + 2^3$», montre que 12 est une somme de puissances de deux, etc.). C'est ainsi que, au cœur même du langage numérique, s'insinue un clivage, et pour tout dire une tension, entre deux modes de fonctionnement : l'efficacité désignative (propre à l'usage calculatoire du langage numérique) tend à ignorer la valeur monstrative de l'expression écrite ; le principe d'achèvement des calculs voue à l'éphémère les «noms intermédiaires», et «4 + 8» devient ainsi «12», sans qu'aucune trace nous soit conservée de l'histoire de ce «12». Au contraire, le langage algébrique — notamment parce qu'il est une mémoire — vient permettre de conserver de meilleure façon l'information monstrative, et surtout de faire apparaître l'information monstrative pertinente : le passage, en simplification, de l'expression $(2p - 1) + (2p + 1)$ à l'expression 4p, fait apparaître que $(2p - 1) + (2p + 1)$ désigne un nombre multiple de 4 ; le passage, en complexification, de 4p à $(p + 1)^2 - (p - 1)^2$, fait apparaître que $(2p - 1) + (2p + 1)$ est une différence de deux carrés.

La création du langage algébrique permet de dégager plus nettement la problématique d'étude du numérique, en la posant — sans l'opposer — à côté de la perspective calculatrice. Elle permet donc d'expliciter ce qui demeurait largement implicite — la coprésence de deux manières d'avoir affaire au numérique —, et par là d'apaiser les tensions. Mais son surgissement historique permet surtout de mieux maîtriser la dialectique du numérique et de l'algébrique, jusque-là conduite avec des moyens mathématiques insuffisamment adéquats. L'algébrique est un outil de l'étude du numérique, le premier outil, le plus élémentaire sans doute (à un niveau avancé interviendraient par exemple la théorie des séries entières, la théorie des fonctions analytiques, etc.). Mais, inversement (et c'est ce qui nous autorise à parler de dialectique), pour que le fonctionnement de cet outil soit efficace, il faut quelque peu étudier cet outil, par exemple se poser les problèmes de la factorisation des expressions algébriques (afin notamment de résoudre des équations algébriques). Or, en ce point, le numérique lui-même est un outil d'étude à l'algébrique : le flux s'inverse. Sans parler de toutes les méthodes numériques, qui font appel le plus souvent à des propriétés d'analyse (c'est-à-dire concernant le corps des réels et les fonctions d'une variable réelle par exemple), on peut citer — pour prendre un exemple assez gros pour être tout à fait visible —, le théorème d'Einsenstein sur la factorisation dans Q[X](38). Newton, dans son **Arithmetica Universalis** déjà mentionnée, montre une grande attention à ce genre de «retours» du numérique vers l'algébrique. Ainsi donne-t-il une méthode ingénieuse pour trouver les facteurs d'une expression algébrique(39) :

Si, par exemple, la quantité proposée est $x^3 - x^2 - 10x + 6$, à la place de x je substitue successivement les termes de la progression arithmétique 1, 0, -1, il en naîtra les nombres -4, +6, + 14. Je place chacun d'eux avec tous ses diviseurs dans la ligne du terme de la progression 1, 0, -1, qui l'a produit, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

1	4	1, 2, 4	+ 4
0	6	1, 2, 3, 6	+ 3
- 1	14	1, 2, 7, 14	+ 2

Ensuite comme le terme le plus élevé x^3 n'a pas de diviseur de l'unité, je cherche parmi les diviseurs quelque progression dont les termes ne diffèrent que d'une unité, et qui, en descendant des plus forts au plus faibles, décroissent comme ceux de la progression 1, 0, -1. Je ne trouve qu'une progression de cette espèce, c'est 4, 3, 2. Je prends donc le terme + 3 qui se trouve dans la même ligne que 0 de la première progression 1, 0, -1, je le joins à x, et je tente la division par $x + 3$; elle réussit, et j'obtiens pour quotient $x^2 - 4x + 2$.

Au-delà de la disparition de la structure du corpus mathématique enseigné en arithmétique et algèbre, c'est la dialectique du numérique et de l'algèbre — implicitement présente à travers l'«opposition» de l'arithmétique et de l'algèbre — qui va se trouver atteinte. Plus que jamais, les liens du numérique et de l'algébrique s'en trouveront relâchés.

VIII — UNE CONCEPTION EMPIRISTE DU REEL MATHEMATIQUE.

L'effacement de l'opposition arithmétique/algèbre, en effet, altère les conditions de la mise en rapport du numérique et de l'algébrique. L'ancien rapport d'outil

(38) Soit $P(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. S'il existe un nombre premier p tel que : 1) p ne divise pas a_n ; 2) p divise $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$; p^2 ne divise pas a_0, alors P est irréductible sur Q.

(39) **Arithmétique universelle,** tome premier, pp. 47-48. Nous laissons au lecteur le soin d'apporter la justification mathématique requise.

de travail à objet travaillé semble perdu. Les deux domaines — le numérique, le littéral — vont coexister dans une simple juxtaposition, existants qui trouvent en eux-mêmes leur propre justification. Les rapports, naguère encore banals entre ces deux ordres de réalité mathématiques, semblent désormais abolis. Ou plutôt, ils laissent place à des rapports nouveaux, et inversés : ce n'est plus l'algébrique qui vient permettre d'étudier le numérique, c'est le numérique qui «justifie» et «permet de comprendre» l'algébrique. Le document 5, extrait d'un manuel de quatrième actuel[40],

III. DIFFÉRENCE DE DEUX DÉCIMAUX

$x \in D$, $y \in D$, $z \in D$. $z = x - y$ signifie que $z + y = x$.
Comment est appelé z pour x et y dans cet ordre?
Observe :

$z = 13 - (-7)$	$z = x - y$
$z + (-7) = 13$	$z + y = x$
$[z + (-7)] + 7 = 13 + 7$	$(z + y) + (-y) = x + (-y)$
$z + [(-7) + 7] = 13 + 7$	$z + [y + (-y)] = x + (-y)$
$z + 0 = 13 + 7$	$z + 0 = x + (-y)$
$z = 13 + 7$	$z = x + (-y)$.

Pour tout x de D, pour tout y de D, $x - y$ est un décimal et $x - y = x + (-y)$.
Exemples : $8 - (-7) = 8 + 7 = 15$; $9 - 14 = 9 + (-14) = -5$.
L'opération qui, à chaque couple (x; y), $x \in D$, $y \in D$, fait correspondre le décimal $x - y$ est la soustraction dans D.

DOCUMENT 5
L'algébrique comme essence du numérique

nous donne de ce phénomène un exemple très net : l'intention didactique est ici de justifier le fait que x - y = x + (-y). Pour le mathématicien, la «justification» — qui est alors, strictement, une démonstration — est toute entière contenue dans la colonne de droite : si je définis en général - y comme étant le nombre tel que y + (-y) = 0, et si les propriétés ordinaires — associativité, etc. — valent encore pour le nouvel ensemble de nombres ainsi défini, alors le nombre z que je dois ajouter à y pour obtenir x — ce qu'on appelle la différence de x et y et qu'on note x - y — n'est pas autre chose que x + (-y). Or la «justification» passe, dans la didactique ici examinée, par **l'appel au concret**, c'est-à-dire au **numérique** : tel est le rôle de la colonne de gauche. Ce sont les calculs numériques de la colonne de gauche qui soutiendraient le sens (pour l'élève) des calculs littéraux de la colonne de droite. Malheureusement, le contenu de la colonne de gauche est, si l'on peut dire, **hautement improbable**,

(40) Il s'agit du manuel **Mathématique contemporaine** pour la classe de quatrième, publié chez Magnard et conforme au programme de 1978.

parce que le numérique ne fonctionne pas ainsi. En fait, les calculs numériques présentés ici n'existent qu'à être l'image en miroir des calculs littéraux de la colonne de droite ! Et c'est pour permettre de tels calculs que le langage algébrique, précisément, est nécessaire... Il y a ainsi méprise sur la spécificité des deux ordres de calcul et, conséquemment, sur le type de rapports qu'ils entretiennent : la justification de l'algébrique s'appuierait sur un mode de fonctionnement du numérique qui n'est en fait qu'un décalque du fonctionnement de l'algébrique, et qui, donc, suppose l'algébrique !

L'élucidation du nouveau rapport qui s'affirme ainsi n'est pas chose facile. Elle est pourtant nécessaire afin de préciser, par delà la surface des programmes, les mouvements profonds produisant des décisions didactiques qu'on aurait tort de regarder seulement comme des «trucs», éléments atomiques de stratégies trouvant en elles-mêmes et dans leurs effets supposés leur unique mobile. Revenons à l'exemple que nous avons examiné. L'algébrique y apparaît comme la «théorie» de cette «réalité» que serait le numérique. Mais les relations en acte entre théorie (permettant l'étude) et réalité (objet de l'étude) y ressortissent incontestablement à une conception empiriste (et même, nous allons le voir, empiriste-sensualiste) de la connaissance. Tel est en fait le mobile — vécu sans doute comme allant de soi, dans l'évidence que l'idéologie procure — de la tentative de «faire sortir» la théorie (l'algébrique) de la réalité (numérique). Il y a ici inversion des rapports entre théorie et réalité. Car le surgissement du théorique — faut-il le rappeler ? — ne s'autorise jamais que de lui-même et, loin de procéder de la réalité, la constitue (ou la renouvelle) comme objet de connaissance. Si j'écris par exemple $13 + 7 = 13 - (-7)$, selon un fonctionnement du numérique antinomique de la pratique calculatoire (c'est-à-dire arithmétique) du numérique — laquelle voudrait qu'on écrivît $13 + 7 = 20$ —, je fais de l'algèbre sur du numérique : c'est l'outil algébrique, et lui seul, qui me permet ce travail du numérique. Entre le fonctionnement arithmétique et le fonctionnement algébrique du numérique, il y a ainsi une distance — un saut — que nul procédé d'«abstraction» ne peut venir combler.

On aurait tort de penser que l'analyse précédente ne vaut que pour l'exemple sur laquelle nous l'avons illustrée. En réalité, sa portée est beaucoup plus étendue et, pour en saisir toute la signification, il faut revenir à cette acmé de l'évolution de la transposition didactique que représente la réforme de 1971 (celle des «mathématiques modernes»). Contrairement aux opinions aujourd'hui dominantes qui, selon un opportunisme nécessaire et une constante inconstance, récusent cette réforme pour ses excès et la regardent comme l'aberration d'un moment, il faut tenir que cette aberration n'en est pas une, qu'elle ne fait que précipiter, cristalliser et rendre explicites des traits qui déjà se repèrent dans l'évolution des décennies précédentes. Elle est un moment qui donne sens, rétrospectivement, à ce qui vient avant lui, et détermine largement ce qui viendra après lui. Car, s'il y a en quelque façon rupture, c'est sur le fond d'une très large surdétermination. En profondeur, le programme de 1971 — pour s'en tenir à la classe de quatrième — constitue une radiographie saisissante d'une évolution que le programme de 1978 n'adoucira qu'en surface. C'est cette image «dure» qu'il faut interroger.

On a trop vitupéré l'inflation moderniste, le parti pris théoriciste, l'ambition de rigueur des mathématiques promues par la réforme, et trop peu vu, derrière cet écran, deux mouvements corrélatifs, moins spectaculaires mais déterminants. Le premier — que nous avons déjà plusieurs fois mentionné —, c'est **l'envahissement du champ d'étude par les structures numériques.** Les «excès» du programme de 1971 sont le prix à payer pour ce coup de force, qui se mène alors — simple tactique d'un moment : le programme de 1978 installera une version apaisée de la même stratégie — avec l'artillerie lourde de «l'approche des réels», des «calculs approchés», des «encadrements», de haute ambition mathématique. Le second, c'est la pénétration d'un thème qui va devenir central, celui de **l'«observation» et de l'«expérimentation» mathématiques.**

Fausse modernité : ce thème est mis en place **dès les Instructions de janvier 1957** (annexe 6a), dont les **Instructions** de 1971 se réclameront non sans raison. Il prend alors l'allure d'une réflexion sur les liens entre mathématique et extramathématique. La caution bergsonienne ici invoquée — **homo faber, homo sapiens** —, bien que datée, est à cet égard très significative. La perspective proposée ne conduit pas très loin : les problèmes d'enseignement se trouvent «résolus» par une didactique euphorique (annexe 6b). Au vrai, la conjoncture historique qui verra la mise en place des mathématiques modernes n'est alors qu'incomplètement formée. Ce qui manque encore, afin que l'idée d'expérimentation puisse passer dans les faits, c'est une **matière**, que l'on pourrait soumettre à l'observation et à l'expérience. A cet égard, les **Instructions** de 1957 raisonnent encore à l'ancienne : la notion d'expérimentation y est surtout l'occasion d'une rhétorique qui tourne sur elle-même, faute de pouvoir s'appliquer. Mais cette matière d'application qui fait défaut, la réforme va l'apporter en abondance : ce sera **le numérique**, dont nous comprenons mieux, dès lors, la place de choix que les programmes réformés vont lui accorder. Son expansion se trouvait en fait comme appelée par l'exigence «expérimentale» induite par une certaine conception épistémologique et didactique.

Le décor de l'action est installé, en consonance avec une mise en scène empiriste du procès de connaissance(41). Il y a la «réalité», qui est un **donné** dont la présence s'impose avec la dernière force ; et il y a la «théorie» de ce donné, que l'on prétend tirer, par abstraction, de l'objet à laquelle elle se voue. La dialectique du numérique et de l'algébrique est alors perdue : l'un de ses termes (l'algébrique) se dissout dans

(41) Pour l'intelligence de ce qui suit, nous renvoyons à Althusser 1968, notamment pp. 38-45.

l'autre (le numérique), à qui est octroyé par nature une existence presque matérielle, et dont l'algébrique procédera génétiquement. La réforme de 1971 remanie donc le champ d'étude pour y produire de solides objets «réels», à forts coefficients d'existence : les structures numériques, et aussi la mystérieuse «droite physique» dont la soudaine promotion ontologique serait autrement encore plus inexplicable(42). Cela posé, l'introduction du littéral (l'algébrique) s'identifie au mouvement par lequel, dans le procès empiriste de connaissance, se représente l'essence du réel, qui est toute la connaissance que le sujet peut tirer de l'objet par abstraction : il permet de distinguer entre un réel essentiel et un réel inessentiel, gangue ou accident que le processus d'abstraction abandonne comme un résidu impensé. L'abstraction, qui vise à porter à la lumière ce qu'on pourra connaître de l'objet, agit par décrassage et décapage :

CHAPITRE 6 — 61

Pour différentes valeurs de n, on obtient des partitions différentes. La figure 2 représente (partiellement) les partitions correspondant à $n = 1$, $n = 0$, $n = -1$, et, grossie à la loupe, la partition correspondant à $n = -2$.

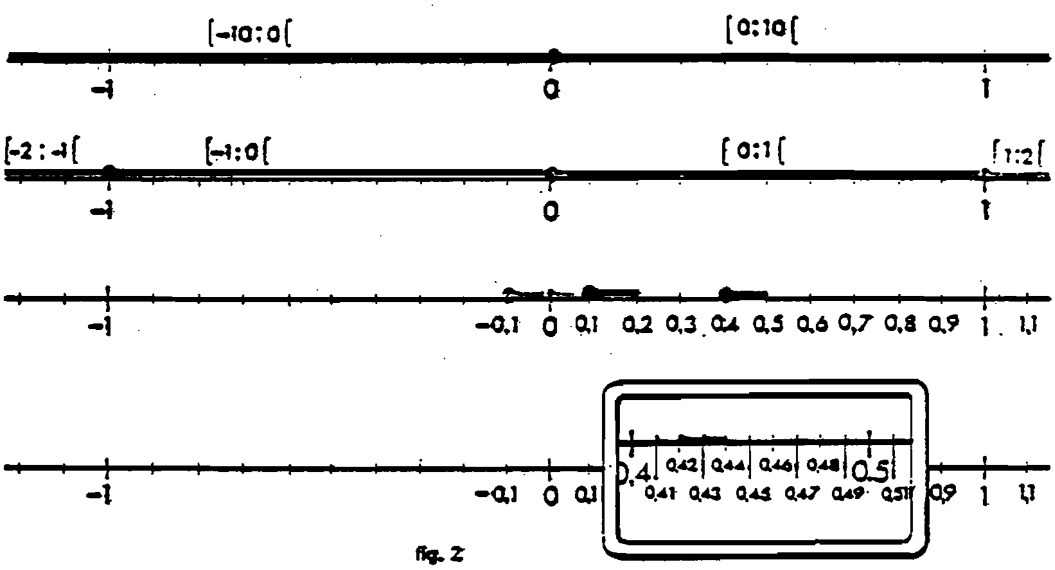

fig. 2

b) De même, si n est un entier relatif fixé, et si a prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des intervalles de $\mathbb{D}$

$$]a\,10^n, (a+1)\,10^n]$$

est une *partition* de $\mathbb{D}$.

La figure 3 représente (partiellement) cette partition pour $n = 0$.

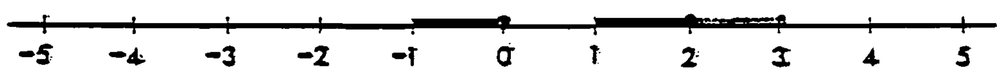

fig. 3

DOCUMENT 6

Le décapage du donné dans le processus empiriste de connaissance

(42) Voir Chevallard et Johsua 1982, notamment pp. 200-203.

à ce thème général de la connaissance empiriste répond correctement, dans les programmes, la notion d'«approche» ou d'«approximation» des «réels» (qui n'ont jamais aussi bien porté leur nom). Ceux-ci sont atteints par le moyen de purifications successives, qui éliminent peu à peu la gangue inessentielle. Tel manuel[43], pris parmi tant d'autres, en offre la superbe illustration (document 6) : l'image de la loupe — emblème de la connaissance empiriste, dont elle est l'instrument privilégié, parce qu'elle permet de mieux voir et de **faire voir** —, y est requise et symbolise, mieux qu'un long commentaire, cette conception de la connaissance comme visant à amener **l'invisible à la vue de tous.**

Une telle conception de la connaissance rate le réel dont il s'agirait précisément de produire la connaissance, parce qu'elle en manque la constitution comme objet de connaissance[44]. L'algébrique ne sert plus à connaître le numérique. Il n'est plus désormais qu'une sténographie essentialisante, qui décrit, résume, et sépare l'essence de l'accident. Le surgissement, «moderne», de la dichotomie de l'«observation» et de la «théorie» — que les manuels actuels reprennent à l'envi — est ainsi corrélatif d'une dissolution de l'objet de connaissance au profit de l'objet réel, maintenant **donné à voir** dans une abstraction réputée immédiate et facile. L'ordre didactique va s'organiser autour de cette épistémologie imaginaire.

REFERENCES.

ALTHUSSER L. (1968), *Lire le Capital,* François Maspéro, Paris.

BOURDIEU P. (1974), *Le sens pratique,* éditions de Minuit, Paris.

BROUSSEAU G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques,* 1, 1, pp. 11-59.

CHEVALLARD Y. (1980a), Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante, *Recherches,* 41, pp. 71-99.

CHEVALLARD Y. (1980b), *La transposition didactique,* IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1982), *Pourquoi la transposition didactique ?,* Publication du séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques, 32, Grenoble.

CHEVALLARD Y. et JOHSUA M.A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 3, 2, pp. 157-239.

MICHEL P.H. (1950), *De Pythagore à Euclide,* Les Belles Lettres, Paris.

SMITH D.E. (1953), *History of mathematics,* volume II, Dover publications, Inc., New York.

(43) Il s'agit de l'ouvrage mentionné dans la note 24 ci-dessus.

(44) Sur la distinction entre «objet réel» et «objet de connaissance», voir Althusser 1968, pp. 46-49.

CLASSE DE QUATRIEME CLASSIQUE A ET B
ET DE QUATRIEME MODERNE

PROGRAMME DE 1945
(extraits)

Arithmétique

Pratique, sur des exemples, de la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers, de la recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres. Applications aux fractions.

Algèbre

Nombres algébriques (positifs, nuls, négatifs). Opérations sur ces nombres exposés à partir de problèmes concrets. Inégalités.

Mesures algébriques de vecteurs sur une droite orientée. Formule de Chasles. Repérage d'un point sur un axe.

Eléments du calcul algébrique : propriétés des sommes et des produits. Puissances. Produit et quotient de deux puissances d'un nombre : usage de l'exposant nul et d'exposants négatifs.

Monômes. Produit de monômes. Quotient de deux nombres. Somme de monômes semblables (on se bornera à des monômes à une, deux ou trois variables). Polynômes à une variable ; addition, soustraction, multiplication par une constante.

Equations numériques du premier degré à une inconnue.

Problèmes conduisant à une équation numérique du premier degré à une inconnue.

Annexe 1

CLASSE DE QUATRIEME
PROGRAMME DE 1958
(extraits)

Arithmétique

Pratique, sur des exemples, de la décomposition d'un nombre entier en un produit de nombres premiers ; pratique de la recherche du plus grand diviseur commun et du plus petit multiple commun de deux ou plusieurs nombres. Applications.

Algèbre

I. — Nombres relatifs (positifs, nuls, négatifs).

Orientation d'un segment (vecteur) ; orientation d'une droite (axe) ; mesure algébrique d'un segment orienté sur un axe ; repérage d'un point sur un axe (abscisse).

II. — Opérations élémentaires sur les nombres relatifs : addition et soustraction, multiplication et division.

Extension aux nombres relatifs des propriétés fondamentales établies pour les nombres arithmétiques (classe de cinquième), concernant les sommes, les différences, les produits, les puissances n-ièmes, les quotients, l'inverse d'un nombre non nul. Condition pour qu'un produit soit nul.

Définition des exposants négatifs et de l'exposant nul.

Comparaison des nombres relatifs ; inégalités.

Inégalités concernant la valeur absolue d'une somme ou d'une différence.

Formule de Chasles pour trois points situés sur un axe. Segment défini par les abscisses des deux points qui le limitent : mesure algébrique de ce segment orienté, mesure de la longueur de ce segment, abscisse du milieu de ce segment.

III — Notions de variables et de correspondance entre variables.

Expressions algébriques dépendant d'une ou de plusieurs variables ; calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique pour des valeurs numériques données aux variables.

Monômes à une ou plusieurs variables, multiplication ; addition de monômes semblables.

Polynômes ; forme réduite. Polynômes ordonnés ; addition ; multiplication.

Identités relatives aux produits : $(x + y)^2$, $(x - y)^2$, $(x + y)(x - y)$.

IV — Equations : position du problème ; signification du signe = dans ce problème. Equations du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques. Résolution de problèmes simples à l'aide d'une telle équation.

CLASSE DE QUATRIEME

PROGRAMME DE 1971
(extraits)

I. — Relations

Révision des notions présentées dans les classes antérieures et compléments : produit cartésien, relation, application, composition des applications ; bijection d'un ensemble sur un ensemble et bijection réciproque.

Notion de groupe : définition (on la dégagera des exemples du programme).

II. — Nombres décimaux relatifs et approche des réels

1. Groupe des puissances de dix.

   Nombres décimaux relatifs écrits $a \cdot 10^p$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ et sous forme de nombres à virgule : addition, multiplication, ordre, valeur absolue. Résumé des propriétés fondamentales de l'ensemble ainsi structuré des décimaux relatifs.

2. Calculs approchés.

   a) Encadrement d'un nombre décimal par des intervalles des types $[a \cdot 10^p, (a+1)\, 10^p[$, $]a \cdot 10^p, (a+1)\, 10^p]$, $[a \cdot 10^p, (a+1)\, 10^p]$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Sur des exemples : encadrement d'une somme, d'un produit.

   b) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $x \cdot 10^n$, avec $x \in \mathbb{N}$, tel que soient vérifiées les inégalités $0 \leqslant d \cdot x \cdot 10^n \leqslant 1 < d\,(x+1) \cdot 10^n$.

   c) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $y \cdot 10^n$ avec $y \in \mathbb{N}$, tel que soient vérifiées les inégalités : $[y \cdot 10^n]^2 \leqslant d < [(y+1) \cdot 10^n]^2$.

   d) Suites décimales illimitées, nombres réels, encadrements d'un nombre réel.

3. Enumération des principales propriétés qui structurent l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : addition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif ; multiplication, associativité, distributivité par rapport à l'addition ; ordre et valeur absolue.

   On admettra que pour tout nombre réel a différent de 0 il existe un nombre réel a^{-1} et un seul tel que $aa^{-1} = 1$. Pour tout couple de nombres réels (a, b), avec $a \neq 0$, il existe un nombre réel unique x, appelé quotient de b par a, et noté ba^{-1} ou $\frac{b}{a}$ tel que $ax = b$.

   Exercices simples de calcul sur de tels quotients.

   Sur des exemples numériques, équations et inéquations du premier degré à une inconnue.

   Usage des exposants entiers : groupe des puissances d'un nombre réel non nul.

   Calculs approchés sur les nombres réels.

4. Exemples de fonctions polynômes (applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Degré.

   Exercices de calcul sur les polynômes.

   Produits $(x + a)^2$, $(x - a)^2$, $(x + a)\,(x - a)$. Exercices de factorisation.

ENCYCLOPEDIE QUILLET (1958)

TABLE DES MATIERES

(extraits)

ARITHMÉTIQUE

Annexe 4a

Pages

ALGÈBRE

Annexe 4b

EXERCICES SUR LA MULTIPLICATION DES EXPRESSIONS ALGEBRIQUES
dans divers manuels

EXERCICES

Effectuer les multiplications suivantes :

133. $ab \times cd$ 134. $xy \times dh.$ 135. $gt \times xz.$

136. $ab^2x \times c^2d.$ 137. $a^2bc \times dx^3.$ 138. $fg \times hk^2.$

139. $5a^2b \times 3cd^2.$ 140. $0,45am \times 3bc^4.$ 141. $3\frac{1}{8}ax^3 \times 2\frac{1}{4}c^2d$

142. $0,3838\ldots a \times 0.4545\ldots b.$ 143. $\frac{9}{4}a^3c \times \frac{10}{3}dy^4.$ 144. $\frac{12}{7}a^4b \times 3\frac{1}{5}c^4y^3.$

145. $3a^4b$ par $\frac{5}{6}c^3d.$ 146. $4a^4b$ par $5\frac{1}{3}cx.$ 147. $\frac{2}{9}a^5b^2$ par $4\frac{3}{4}hy^2.$

148. $\frac{4}{7}pq$ par $+\frac{2}{9}rt^2.$ 149. $\frac{5}{9}a^3b$ par $6\frac{1}{4}x^3y^2.$ 150. $0,48a$ par $0,33\ldots b^2.$

151. $3a^2$ par $4a^3.$ 152. $\frac{5}{8}a^2b$ par $6\frac{3}{4}ab^2c^3.$ 153. $8a^4x$ par $\frac{2}{3}ax^2y.$

154. $20b^2z$ par $0,4a^2b^3.$ 155. $2mx$ par $\frac{1}{5}b^2x^6.$ 156. $4\frac{5}{8}a^3bc^2$ par $0,65ab^2y^3$

157. $0,2a^4xy^3$ par $8ay^2.$ 158. $\frac{3}{7}a^2$ par $\frac{5}{8}a^3y.$ 159. $7a^3b$ par $2a^4bz^2,$

160. $4a^m$ par $2a^n.$ 161. $\frac{2}{9}b^{m+n}$ par $\frac{4}{5}b^{m-n}.$ 162. $3\frac{1}{4}a^3$ par $2\frac{1}{9}a^m.$

163. $3a^4c^4$ par $2a^4c^{4-1}.$ 164. $4ax^{m+n}$ par $3x^my^n.$ 165. $\frac{2}{3}ab^x$ par $\frac{3}{4}a^pb^{1-x}.$

166. $4c^{x-1}dy^4$ par $3c^{2-x}d^{4-y}.$ 167. $3x^{m-3n}$ par $\frac{2}{3}x^{m+4n}$

168. $0,48a^{x-y-2}$ par $\frac{3}{4}a^{x-3y+2}.$ 169. $4\frac{5}{8}p^{r-t}q^{a-b}$ par $0,456p^{r+2t}q^{a+1}.$

170. $(2a^{m+1}b^{n-2}c^q)^2.$ 171. $\left(\frac{5}{8}a^2b^mc^p\right)^2.$

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE. 67

172. $(2x - 4y + 3) \times 3x.$ 173. $(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \times a^2b$

174. $(3a^3 + 2a^2b - 4ab^2) \times 5a^2b^2.$ 175. $(3ax - 2by - 4c^3) \times 2bcy.$

176. $(4x^2 - 5xy^2 + 7y^3) \times 2ax^2.$ 177. $(8b^4 - 5cy^3 - 2b^2x^2) \times \frac{2}{7}b^2cy.$

178. $\left(\frac{3}{5}a^2b^2 - \frac{5}{8}a^6b^3 - \frac{2}{3}a^3b\right) \times \frac{15}{4}a^2bc.$ 179. $(8a^2 - 3b^2 + 4c^2) \times 3a^mb^nc^p.$

180. $(7a^{m-4} - 3a^{m-2} + 4a^{m-3}) \times 0.5a^{n+1}b^p.$

181. $\left(\frac{2}{3}a^m - \frac{4}{9}a^{m-1}b - \frac{3}{8}a^{m-2}b^2 + 4a^{m-3}b^3\right) \times 6\frac{2}{3}a^{2m-1}b^{2n-2}.$

182. $(0,3535\ldots x^{2-m}y^{3-2n} + 4,5x^my^n - 0,48x^2y^{4-3n}) \times 5\frac{3}{8}x^{2m}y^{3n}.$

183. $(3y^{m-n+p} - 8y^{2-3m-1} + 5y^{2-4m} - 6y^2) \times 6y^{m+n-p}.$

184. $\left[3a^2 - (4a^2 - 3b) + 8a^2 - 5b^2(2a + b^2)\right] \times 4a^3b^2.$

185. $\left\{3b + (2b - c) - 4c + \left[2a - (3b - c)\right]\right\} \times 3a^2bc^2.$

186.
$\left\{4a^{m-n}b^p - \left[2a^m(b^n - c^p) - \frac{2}{3}b^{n-1}(2a^{m-2}b^{p+n} - 3ab^{n+1})\right]\right\} \times 4\frac{2}{3}a^{2m-n}b^{p+n}.$

187. $(3a^2 - 2a + b) \times (4a - 2b).$

188. $(7a^2 - 2ab - 3b^2) \times (6a^2 - 3ab).$

189. $(3a^4 - 2a^3b - 5a^2b^2 + 6ab^3 - 8b^4) \times (3a^2 - 2ab + b^2).$

190. $(6a^3 - 2a^2x + 8ax^2 - 3x^3) \times (a^2 - 4ax + x^2)$.

191. $(x^2 - 3ax + 2a^2) \times (5x^2 + 8ax - 3a^2)$.

192. $(2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - 4xy^3) \times (2x^2y - 3xy^2 + y^3)$.

193. $(2m^3 - 3m^2n + 4mn^2 + 5n^3) \times (6m^2n - 3mn^2 + n^3)$.

194. $(2x^4 - 3x^3y - 5x^2y^2 + 7xy^3) \times (-2x^2 + 3xy - 4y^2)$.

195. $\left(0{,}4a^4 - \frac{3}{8}a^3 + 6{,}35a^2 - \frac{7}{16}a\right) \times \left(0{,}56a^2 - \frac{3}{8}a\right)$.

196. $\left(0{,}1212\ldots a^3b - \frac{4}{9}a^2b^2 + 0{,}2727\ldots ab^3 + 0{,}4646\ldots b^4\right) \times \left(\frac{5}{6}a^2 - \frac{3}{8}ab + 2b^2\right)$

197. $(3a^2 - 2a + 5a^3 - 1) \times (2a + 3 - 5a^2)$.

198. $(4a^3 - 3a^2 + 5a + 2) \times (1 - 3a + 2a^2)$.

199. $(3ax^3 + 2a^4 - 5a^2x^2 - 6a^3x + 7x^4) \times (15ax^2 - 3a^2x + 4x^3)$.

200. $(8p^2y^2 + 4y^4 - 5p^3y - 8p^4 + 6py^3) \times (2p^2y - 3y^3 + 2py^2 - p^3)$.

201. $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{2x}{5} + \frac{3}{4} - \frac{6x^2}{7}\right) \times \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{5} - \frac{3}{4}\right)$.

202. $\left(\frac{4p^2y^2}{5} - \frac{3p^4}{8} - \frac{2p^3y}{5} + \frac{7py^3}{5} - \frac{9y^4}{11}\right) \times \left(\frac{2p^3}{7} - \frac{5p^2y}{6} + \frac{4py^2}{3} + \frac{2y^3}{13}\right)$

203. $(mx^3 - q - px + nx^2) \times (m'x^3 - n'x^2 - p'x + q')$.

204. $(ax^3 + d - cx + bx^2) \times (fx^2 + h - gx)$.

205. $(4pz - 2qz^3 + 5rz^2 - rs) \times (3az^2 - 5bz + 3cz^3 - 4d)$

206. $(a - bx + cx^2) \times (-2bx - 3a + 5cx^2) \times (a - 3bx - cx^2)$.

EXERCICES SUR LA MULTIPLICATION.

207. $(a - 3bx^2 - 2cx^2 + 3dx) \times (5dx - 4bx^3 - a + 6cx^2) \times (3a - bx^3 - bx^2)$.

208. $\left[(a - b)x^2 - (a - b)x + (1 - b)\right] \times (ax - b)$.

209. $\left[(a^2 + ab + b^2)x^2 - (a + b)x + ab\right] \times \left[(a - b)x^2 + 2x - 1\right]$

210. $\left[(2m - 3n)p^2 - (m - n)p + (2m + n)\right] \times \left[(2m + 3n)p^2 + (m + n)p - (2m - n)\right]$.

211.
$\left[y^3 + (a + b)y^2 + (a^2 - b^2)y + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)\right] \times \left[y^2 - (a - b)y + (a^2 - 2ab + b^2)\right.$

212. $\left[x^3 + (2a - 1)x^2 - (a^2 - 2a + 1)x + (a^2 - 4a + 2)\right] \times \left[x^2 + (2a + 1)x + (a + 1)\right]$.

213.
$(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y - 5xy^2) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y + 5xy^2) + \frac{x^2 - y^2}{7} \times (63x^2y - 42x^3)$.

214. $(4x - 3y)(7x + 8y) - (8x - 9y)(5x + 7y) - (3x - 2y)(5x - 8y)$.

215. $(2a - 3b)(5a - 8b) - \left[(4a - 5b)(2a - 6b) - (3a - 4b)(7a - 2b)\right]$.

216. $(2x^2 - 3x + 1)(5x^3 - 4x^2 - 2x + 1) - (4x^4 - 3x^2 + 1)(x - 1)$.

217. $(x^m - x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 - x^{m-3}y^3 + y^4) \times (x + y)$.

218. $(a^{m+1} + 3a^m - 4a^{m-1} - 2a^{m-2}) \times (a^{2m-1} - a^{2m-2} + a^{2m-3})$.

219. $(3x^{m+n-1}y^p - 4x^{2m-3n}y^{p-n} - 2x^{m-2n+1}y^{p+2}) \times (5x^{m-n+1}y^{4-p} - 2x^{3n+2m}y^{n+p})$.

220. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$.

221. $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$.

222. $(y^3 + y^2 + y + 1)(my^3 + ny^2 + oy + p)$.

EXERCICES

— Effectuer les produits suivants :

- **443.** $(3a^2b^3)\left(\frac{2}{3}ab^5\right)$.
- **444.** $\left(\frac{4}{5}a^3b^2c\right)\left(-\frac{3}{4}abc^4\right)$.
- **445.** $\left(\frac{4}{7}a^2xy^3\right)\left(-\frac{5}{2}a^3y^4\right)$.
- **446.** $\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)\left(+\frac{3}{5}a^3y^5\right)$.
- **447.** $\left(\frac{9}{4}a^4x^2y^3\right)\left(-\frac{4}{3}ax^2\right)$.
- **448.** $\left(\frac{14}{3}a^2b^3x\right)\left(-\frac{6}{7}a^2b^4\right)$.
- **449.** $\left(-\frac{7}{2}ax^2y\right)\left(-\frac{8}{15}b^3xy^2\right)\left(\frac{5}{21}abx^3\right)$.
- **450.** $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^2(-4x^2y)$.
- **451.** $\left(\frac{5}{12}a^4b^2x\right)\left(-\frac{2}{7}ax^2y^3\right)\left(-\frac{14}{5}b^2xy^4\right)$.
- **452.** $\left(\frac{3}{5}x^2y\right)^2\left(-\frac{5}{4}xy\right)$.

— Calculer les expressions suivantes :

- **453.** $\left(-\frac{2}{5}ab^3\right)^2$.
- **454.** $\left(\frac{5}{3}a^2b^3x^4\right)^2$.
- **455.** $\left(-\frac{3}{2}a^4b^3y^2\right)^2$.
- **456.** $\left(\frac{7}{2}a^3b^6x^3\right)^2$.
- **457.** $\left(-\frac{9}{4}a^4b^2x^5\right)^2$.
- **458.** $\left(-\frac{6}{5}ax^4y^6\right)^2$.

— Effectuer les produits suivants :

- **459.** $\left(\frac{3}{2}a^2b-\frac{5}{4}ab+3a\right)\left(-\frac{4}{3}a^2b^3\right)$.
- **460.** $\left(\frac{5}{4}ax^2+\frac{3}{2}bx-4c\right)\left(-\frac{4}{5}abx^3\right)$.
- **461.** $\left(\frac{2}{5}a^2x-3ay-4by\right)(4a^2x^2y)$.
- **462.** $\left(-\frac{3}{2}x^4+\frac{15}{4}x^3-\frac{2}{5}x\right)\left(-\frac{20}{3}x^4\right)$.
- **463.** $(2x-3y)(4x-2)$.
- **464.** $(2a+3b)(-4a+6b)$.
- **465.** $(-4x+3y+1)(y-3)$.
- **466.** $(-2a+3b-5)(a-b)$.
- **467.** $(2x^3-3y^2+5)(x^2-y)$.
- **468.** $(4a^2-5b^4+ab)(a^2-b)$.
- **469.** $(5xy+3x-2y)(2x-y)$.
- **470.** $(-3xy+4x-2y)(x+5)$.
- **471.** $(14a^2b+5a^2-b)(a^2-2b)$.
- **472.** $(7a^2b-4b^2+2a^3)(2a^3+4b^2)$.
- **473.** Soient les polynômes : $A=-2x^2+3x+5$ et $B=x^2-x+3$.

  1° Calculer le produit A.B.

  2° Vérifier, pour $x=-3$ en calculant les valeurs numériques de A, B et du produit A.B.

• **474.** Soit le polynôme : A $= x^2 - 3x + 2$.

1° Calculer le carré, puis le cube de ce polynôme.

2° Vérifier pour $x = -4$, en calculant les valeurs numériques du polynôme et des résultats trouvés.

— Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

• **475.** $(2x - 7)(-3x + 2)$.

• **476.** $(4x^4 + 7 - 2x^3)(x^2 - 2x)$.

• **477.** $(5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$.

• **478.** $(2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$.

• **479.** $\left(-2x + \frac{3}{2}\right)(4x + 3)$.

• **480.** $\left(\frac{8}{3}x - \frac{3}{2}x^2 + 5\right)(4x^3 - 5x^2 + 7)$.

• **481.** $(7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$.

• **482.** $(2x^2 - 4x^3)(x^2 - 2x)$.

• **483.** $(2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$.

• **484.** $\left(\frac{5}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}x^3 - \frac{2}{3}x + x^2\right)$.

— Calculer les expressions suivantes :

• **485.** $(2x + 3)(3x + 2)(x - 4)$.

• **486.** $(5x - 1)(2x + 3)(7 + 4x)$.

• **487.** $(3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$.

• **488.** $\left(x - \frac{3}{5}\right)(5x^2 - 1)(5x + 3)$.

• **489.** $(2x^2 + 3x - 4)^2$.

• **490.** $(4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$.

• **491.** $(7x - 5)^3$.

• **492.** $(x^2 - x + 2)^3$.

— Développer et réduire les expressions suivantes :

• **493.** $5(3a^2 - 4b^2) - [9(2a^2 - b^2) - 2(a^2 - 5b^2)]$.

• **494.** $3a^2(2b - 1) - [2a^2(5b - 3) - 2b(3a^2 + 1)]$.

• **495.** $(2a + 5b)(3a - 2b) - (2a - 1)(3a + 2b) - (a - 2b)(5b - 1)$.

• **496.** $(2x - 3y)(5x - 2y) - (3x - 2y)(2x + 1) - (5x - y)(3y + 1)$.

• **497.** $(ax^2 - b)(ax^2 - 2b) + 3b(ax^2 - b) + b(b - 1)$.

• **498.** $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 6(x - 1)(x - 2) + 7(x - 1)$.

• **499.** $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x - y) + xy(x^3 + y^3)$.

• **500.** $\frac{2}{3}x^2y\left(2x^2 - \frac{y}{3}\right) - 2x^2(2x^2 - 1) + \left(2x^2 - \frac{y}{3}\right)\left(1 - \frac{y}{3}\right)(2x^2 - 1)$.

CHAPITRE 14

5

Calculez les produits suivants (exercices 13 à 18).

13. $2 \times \left(x^2 - 5x + \frac{7}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^3 - x + \frac{1}{9}\right)$. $\frac{11}{4}x^2(x^2 + 12x - 5)$

14. $(x - 2)(2x + 3)$; $(x^2 + x - 1)(2x - 5)$; $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 1)$

15. $(x^2 - 2x + 5)(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1)$; $\left(\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - 1\right)$

16. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$; $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

17. $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$; $(2x - 3)(3x + 1)(x^2 + 1)$; $-\frac{5}{2}(x + 2)(-x + 5)$

18. $(x + 2)^2$; $(2x - 5)^2$; $(3x + 2)^2$; $(2x - 1)^2$; $(3x - 4)(3x + 4)$

19. Réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de la variable z :

$$2(z - 3)(z + 3) - 8\left(\frac{1}{2}z + 1\right)^2; \quad z(z + 1)(z + 2) - 3(z - 1)^2$$

20. Ordonnez suivant les puissances décroissantes de la variable x le polynôme

$$P(x) = (4x - 9)(5x + 7) - 1 + x$$

Calculez le plus rapidement possible $P\left(\frac{9}{4}\right)$ et $P\left(-\frac{7}{5}\right)$.

Annexe 5c

LES INSTRUCTIONS DE JANVIER 1957

a) Observation et expérimentation

Observation et expérimentation : s'agit-il vraiment d'aligner les mathématiques sur les autres disciplines scientifique ?

Il n'est pas douteux qu'au départ, dans l'élaboration de toutes les sciences, les démarches intellectuelles sont du même ordre : une discrimination intervient après, lorsque le mathématicien, ayant créé des êtres de raison, va s'efforcer d'en étudier les propriétés. Mais son travail n'a de valeur profonde que si sa construction toute abstraite quelle soit, prend solidement appui sur le réel, si elle est capable de le rejoindre et de s'y adapter dans une large mesure.

N'est-il pas indispensable de faire bien saisir à l'enfant, puis à l'adolescent, les liens étroits qui unissent les mathématiques au monde sensible ? N'est-ce pas là un moyen – l'un des meilleurs sans doute – pour mettre en confiance le débutant, pour éviter qu'il ne se sente très vite rebuté par une étude où il pourrait ne voir, si elle reste privée de toute vraie lumière, qu'une sorte de jonglerie, souvent purement verbale, et sans signification apparente ?

Lors des premières étapes de l'initiation et de l'apprentissage, c'est par l'observation et l'expérimentation que cette liaison peut être réalisée et rendue évidente. Leur rôle apparaît clairement dans la créations des êtres mathématiques, munis de leur définition complète. Il n'est pas moindre lorsqu'il s'agit de découvrir certaines de leurs propriétés et à cette occasion, d'accéder aux voies du raisonnement.

L'observation des faits, des individus, de leur comportement, que les éléments en cause soient concrets ou abstraits, est la première opération, sensorielle et mentale, intervenant dans toute recherche. Mais l'expérimentation, c'est-à-dire une observation de phénomènes volontairement provoqués, dans des conditions déterminées d'avance, et non pas imposées de l'extérieur, se présente naturellement à l'esprit actif et curieux comme une espèce de nécessité. Bien entendu, elle ne porte pas obligatoirement sur les objets matériels ; elle peut être, ou devenir, une sorte d'expérimentation figurée, comportant une série de gestes imaginés, mais qui seraient effectivement réalisables.

La phase essentielle d'une telle recherche est, bien entendu, celle de l'interprétation des résultats, qui permettra de dégager des conclusions : elle nécessite une analyse qui doit être conduite avec un soin extrême et, en mathématiques, la nature des êtres mis en jeu oblige à prendre des précautions particulières qu'il importe de faire comprendre aux débutants. Car une expérience, quelle qu'elle soit, ne met en jeu que des objets particuliers, en nombre limité : dès lors, même si elle est répétée plusieurs fois, et modifiant quelque donnée, elle ne révèle, en toute rigueur, q'un résultat valable dans telle ou telle condition : c'est là le premier point qui doit être expliqué et acquis. Vient alors la critique : «Les opérations que j'ai réalisées, ou que j'ai imaginées, sont-elles conditionnées inévitablement par les situations et par les éléments particuliers sur lesquels j'ai travaillé ?» Si oui, les conséquences obtenues n'ont de valeur que pour ces situations et pour ces éléments ; si non, une nouvelle question se pose, ou plutôt une suite de questions, où l'abstraction devient peu à peu dominante : «les opérations restent-elles possibles et les résultats restent-ils valables si je modifie certaines données ? Ces modifications sont-elles, à leur tour, assujetties à quelques restrictions ? Les résultats restent-ils valables quelles que soient ces modifications ?» Ainsi s'organise une réflexion, lente et progressive, qui doit accrocher et retenir l'attention, et donner accès aux formes, abstraites et générales, propres à la pensée mathématique.

Naturellement, les types d'«expériences» de ce genre peuvent être très variés, et il importe, pour chacune, d'en bien dégager la nature et la portée, en s'efforçant d'aller au fond des choses. Voici, pris au hasard, quelques exemples bien simples :

On a, au début de l'arithmétique, défini le produit d'un entier a par un entier b comme étant la somme de b nombres égaux à a ; les deux nombres a et b jouent des rôles différents ; si l'on représente un tel produit par le symbole a X b, il n'y a aucune raison de penser que a X b puisse être égal à b X a. Cependant, quelques expériences simples, ne serait-ce que celles qui ont été faites pour construire une table de multiplication, montrent que cette égalité a bien lieu quand on effectue les calculs à partir de deux nombres effectivement donnés. Ces constatations, même renouvelées maintes fois, ne permettent nullement d'affirmer que le résultat est encore exact avec deux nombres différents de ceux que l'on a déjà «éprouvés». On suggère alors une autre idée d'expérience : revenir à l'origine, analyser le multiplicande en «réalisant» par quelque moyen la collection d'unités qu'il symbolise, puis réunir un nombre de ces collections égal au multiplicateur ; le nombre d'unités ainsi rassemblées est égal au produit du multiplicande par le multiplicateur. Si toutes ces unités ont été mises en vrac, on ne voit rien de plus, on n'est pas plus avancé que tout à l'heure, les deux nombres jouent toujours des rôles différents. Une nouvelle idée doit être découverte : mettre de l'ordre dans chacune des collections, puis dans le groupe de ces collections ; la difficulté est peut-être d'«inventer» une disposition utilisable telle que la disposition rectangulaire, en lignes et en colonnes, ensuite la symétrie des rôles apparaît bien vite, et l'on constatera que, pour les deux nombres particuliers qui ont servi à construire ce schéma, les produits du premier par le second et du second par le premier sont égaux, sans avoir besoin de calculer effectivement ces deux produits. Voilà une expérience faite ; est-il utile de la recommencer en changeant les nombres ou la nature des objets représentant les unités ? Non, bien sûr. Alors le résultat obtenu est encore valable pour deux autres nombres ? Pour deux nombres quelconques ? Quels que soient les deux nombres ? Ainsi se dégage la propriété générale qui, une fois bien énoncée, pourra être représentée symboliquement par une «formule» dont la signification ne risque guère d'être oubliée.

. . . .

Bien entendu, l'organisation systématique de travaux manuels, conçus non comme le pré-apprentissage de tel ou tel métier, mais comme une éducation, est tout à fait souhaitable ; il est à peine utile de mentionner tout le profit que peut tirer l'élève d'une entente et d'une collaboration bien comprises entre le professeur de travaux manuels et le professeur de mathématiques.

Il est bon de rappeler, à ce propos, quelques phrases d'Henri Bergson, dont les premières devraient, à vrai dire, servir d'épigraphe à tout essai sur l'éducation :

«Nous croyons qu'il est de l'essence de l'homme de créer matériellement et moralement, de frabiquer des choses et de se fabriquer soi-même. Homo faber, telle est la définition que nous proposons. L'homo sapiens, né de la reflexion de l'homo faber sur sa fabrication, nous paraît tout aussi digne d'estime tant qu'il résout par la pure intelligence les problèmes qui ne dépendent que d'elle, homo faber, homo sapiens, devant l'un et l'autre qui tendent d'ailleurs à se confondre, nous nous inclinons. Le seul qui nous soit antipathique est l'homo loquax, dont la pensée, quand il pense, n'est qu'une réflexion sur sa parole».

«— On oublie que l'intelligence n'est que la faculté de manipuler la matière, quelle commence du moins ainsi — Comment alors l'intelligence ne profiterait-elle pas de l'éducation de la main ? Allons plus loin. La main de l'enfant s'essaie naturellement à construire. En l'y aidant, en lui fournissant au moins des occasions, on obtiendrait plus tard de l'homme fait un rendement supérieur ; on accrîtrait singulièrement ce qu'il y a d'inventivité dans le monde. Un savoir tout de suite livresque comprime et supprime des activités qui ne demandent qu'à prendre leur essor. Exerçons donc l'enfant au travail manuel, et n'abandonnons pas cet enseignement à un manœuvre. Adressons-nous à un vrai maître, pour qu'il perfectionne le toucher au point d'en faire un tact : l'intelligence remontera de la main à la tête —».

*

* *

annexe 6a

b) Une didactique euphorique

Les remarques précédentes ont évoqué, à diverses reprises, la nature des êtres mathématiques : sans doute le caractère d'abstraction dont ils sont marqués est-il un obstacle susceptible d'arrêter ou de gêner les débutants. Mais à de rares exceptions près, il semble bien qu'un enfant peut normalement saisir les conventions élémentaires qui correspondent aux premiers symboles de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie ; une initiation prudente doit obtenir ce résultat.

Pourtant, les premières notions acquises, lorsqu'il s'agit de manier ces symboles et de mettre en jeu les idées qu'ils représentent le débutant paraît très souvent frappé d'une sorte de paralysie, entravant le progrès et risquant de conduire à l'échec. Sans doute les possibilités intellectuelles de l'enfant — ou de l'adulte — jouent-elles un rôle en cette affaire, mais c'est là une excuse assez pauvre, d'une portée limitée, et la question doit être placée sur un autre plan.

Se préoccupe-t-on suffisamment, dès les débuts, de faire saisir que ces êtres de raison, que l'on a créés, sont doués d'une vie véritable, conditionnée seulement par la définition de leurs propriétés fondamentales ? Ne peut-on essayer de leur garder, le plus longtemps possible, la fraicheur et la puissance de leur «état naissant» ? C'est d'autant plus facile qu'ils possèdent, par leur nature même, le privilège de pouvoir être, à tout instant, recréés. Ne risque-t-on pas de les étouffer, de les dessécher, de leur faire perdre toute vie par une avalanche de «règles» et de contraintes dont beaucoup sont inutiles, sinon nuisibles ?

Pourquoi, par exemple, énoncer une «règle» — puis en imposer la récitation — concernant la multiplication d'un produit de facteurs par un nombre, alors que cette opération, si on la rencontre, doit être immédiatement reconnue comme très familière, puisqu'on y retrouve sans peine la définition même que la multiplication de plus de deux nombres ? Au lieu d'attendre et d'exiger l'application d'un mécanisme, d'ailleurs souvent mal enregistré, n'est-il pas plus intéressant et plus fructueux de faire analyser le symbole $(a, b, c) \times d$, qui possède déjà les propriétés d'un produit de deux facteurs, et qui, une fois identifié, se trouve muni de toutes les propriétés d'un produit de quatre facteurs ? C'est alors un jeu d'en découvrir les différentes formes, puis, s'il y a lieu de choisir parmi elles pour poursuivre une transformation ou un calcul.

La théorie élémentaire des polynômes et des fractions rationnelles ne perdrait-elle pas ce caractère d'aridité qu'elle a parfois, si on montrait, à l'occasion de tous les problèmes qu'elle pose qu'il ne s'agit que de la mise en jeu de définitions de l'addition, de la multiplication, de leurs opérations inverses et des propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité ? L'observation attentive, et non passive, des symboles et des signes qui interviennent, et de leur comportement, mettra presque toujours dans la voie d'une solution. Et les «identités remarquables» et autres formules, prendront ainsi naissance dans une amosphère vivante qui en assurera sans doute mieux, et peut-être définitivement, la conservation.

Toute la théorie des proportions n'est-elle pas contenue dans la définition du quotient exact d'un nombre par un autre, et ne peut-on lui faire prendre corps à partir de là ?

Bien des mots du langage mathématique évoquent la vie et l'action : variables, fonctions correspondantes, transformations, équations, inéquations. Qu'on prenne garde de les «scléroser», de rendre inertes les êtres qu'ils représentent et passifs les actes qu'ils désignent, car leur maniement, leur mise en œuvre se réduisent alors très vite à de fastidieux exercices, qu'un appel à la mémoire, le recours à quelque automatisme permettront peut-être de «résoudre» correctement, formellement, mais sans qu'apparaissent un prolongement, une vue d'ensemble, un véritable motif d'intérêt.

La multitude des chapitres où sont traitées des questions relatives au binôme du premier degré et au trinôme du second degré ne serait-elle pas éclairée par une saine lumière, si on commençait, avant tout, par «présenter» ces deux êtres, qui vont tenir l'affiche pendant un long moment (équations, inéquations, variations des fonctions, représentations graphiques, «problème du premier et du second degrés») ? Présenter c'est-à-dire faire vraiment leur connaissance, rechercher les différentes formes qu'ils peuvent revêtir, pour pouvoir les identifier, puis à notre gré, les transformer, afin, ensuite, de pouvoir choisir. Ne pourrait-on ainsi réduire à néant de fâcheuses accusations. souvent formulées : «la trinômite» sévit, «on débite» du trinôme ?

Il est inutile de multiplier les exemples ; on en trouverait à tous les pas, en algèbre, en trigonométrie, en géométrie.

*

* *

annexe 6b