ELEMENTS POUR L'ELABORATION D'ACTIVITES DE CALCUL ALGEBRIQUE EN 1er CYCLE

I.R.E.M. de Grenoble

Bernard CAPPONI
Collège «Le Vergeron», Moirans
Philippe CLAROU
Lycée Camille Vernet, Valence

I – PRESENTATION.

Les réflexions présentées ici ont pour cadre un travail sur le calcul algébrique en 1er cycle, mené par un groupe de l'I.R.E.M. de Grenoble. Bien que l'action engagée soit loin d'être achevée, nous souhaitons en présenter certains aspects.

Nous nous sommes intéressés à l'utilisation des lettres pour la désignation d'objets mathématiques, ainsi qu'à l'apprentissage du calcul algébrique, à la suite d'un certain nombre de constats :

■ C'est au cours du 1er cycle seulement qu'un élève doit, pour la première fois, conduire un calcul dans lequel certains nombres sont désignés par des lettres. Cette activité apparaît comme une manipulation formelle ou une modification des écritures plutôt qu'un calcul au sens traditionnel de l'utilisation des quatre opérations. C'est une situation tout à fait nouvelle pour lui. Elle lui est présentée de façon très globale et très achevée sans être toujours accompagnée d'une réflexion sur l'introduction et l'utilisation de telles désignations et sans une véritable progression.

■ Bien qu'elle pose beaucoup de problèmes aux élèves, cette utilisation des lettres ne fait presque jamais l'objet d'un apprentissage identifié comme tel. Elle n'est pas explicitée dans les programmes. Ainsi dans une étude des désignations Colette Laborde (1982) ne l'a trouvée mentionnée qu'une seule fois : c'était au niveau des classes dites d'accueil pour recommander de l'éviter scrupuleusement... Effectivement et de façon un peu schématique on constate en prenant pour référence les manuels scolaires actuels, que cette utilisation est peu présente en 6ème, à peine plus en 5ème, alors que dès la 4ème elle est censée être complètement acquise dans tous ces aspects. Notons cependant une très légère évolution dans deux ou trois ouvra-

«petit x» n°5, pp. 19 à 50.

ges parus à partir de 1981 ; ils abordent les conventions d'écriture des expressions littérales et proposent un certain nombre d'exercices à ce propos.

■ Les performances des élèves, quant à cette utilisation des lettres, semblent très variables suivant les situations proposées. Certains savoir-faire, bien acquis à un moment donné, peuvent par la suite être mis en défaut. Ainsi après des exercices de développement d'expression du type $(3x + 2)(3x + 2)$, nous avons pu observer des élèves écrivant

$$\begin{aligned}(3x \times 2)^2 &= (3x \times 2) \times (3x \times 2)\\ &= 9x^2 \times 6x \times 6x \times 4\\ &= 1\,296x^4\end{aligned}$$

alors qu'avant cet apprentissage ils réussissaient bien ce genre de calculs.

■ La maîtrise du calcul algébrique peut conditionner l'accès à un mode de pensée nouveau pour l'enfant. Par exemple, l'apprentissage de la programmation s'appuie nécessairement sur l'utilisation ou la construction d'outils algébriques. Et encore, comment expliciter en vue d'une utilisation pour des calculs numériques, le lien existant entre le prix d'un voyage en train et la distance parcourue si ce n'est en écrivant une égalité du type* $p = ax + b$. Le fait de pouvoir réinvestir cette écriture dans des calculs, permet à l'élève de mieux approcher la notion sousjacente : celle de fonction. Il est même indispensable qu'il ne considère plus x comme désignant un réel dont la valeur est ignorée mais comme représentant un élément quelconque d'un ensemble de données, à savoir l'ensemble des distances envisagées.** [Remarquons que cette seule approche de la notion de fonction resterait insuffisante puisqu'elle écarte les cas où la détermination de l'image ne se fait pas au moyen du calcul].

Pouvoir établir, sans trop de difficultés, par le simple fait du calcul algébrique, des résultats importants aide a postériori à la compréhension des notions sous-jacentes à ces résultats. Le calcul algébrique peut être un moyen de preuve pour des propositions arithmétiques ou géométriques. Pensons par exemple, à la règle des signes : aucune situation familière à l'enfant ne lui permet de justifier le produit de deux nombres négatifs ; seule la distributivité de la multiplication sur l'addition permet d'établir que le produit de deux nombres négatifs est positif.

Ainsi pour le mathématicien C.F. Gauss, comme l'atteste la citation suivante, le calcul au moyen des lettres est une aide indispensable au raisonnement lui-même. Il prend soin néanmoins de souligner l'importance des hypothèses implicites qui accompagnent l'usage de tout système de notation.

* a désignant le prix du kilomètre et b celui de la prise en charge.

** Cette expression n'est utilisable par tranche de 5 km, que pour les trajets supérieurs à 50 km.

EXTRAITS DE LETTRES DE C.F. GAUSS A SCHUMACHER*

«Tous [...] les nouveaux systèmes de notation sont tels que rien ne peut être accompli avec leur aide qui n'aurait pu l'être sans eux ; mais l'avantage est que, lorsqu'un tel système de notation correspond de la façon la plus essentielle aux besoins fréquemment rencontrés, on peut résoudre les problèmes appartenant à cette catégorie ; en fait, on peut les résoudre mécaniquement dans des cas si compliqués que sans cette aide même le génie devient impuisant. Il en est ainsi avec l'invention du calcul au moyen de lettres en général ; il en fut ainsi avec le calcul différentiel...».

«La caractéristique des mathématiques modernes est que, par l'intermédiaire de notre langage de signes et de notre nomenclature, nous possédons un moyen par lequel les raisonnements les plus compliqués peuvent être réduits à un mécanisme particulier. La science a gagné ainsi une richesse, une beauté et une solidité presques infinies. Mais, dans l'usage quotidien de cet outil, la science a perdu presque autant qu'elle a gagné. Trop souvent ce moyen n'est appliqué que mécaniquement, alors que son usage autorisé implique en général certaines hypothèses tacites. J'insiste pour que, lors de toute utilisation d'un système de notation et de toute utilisation d'un concept particulier, chaque utilisateur soit conscient des conditions originelles et ne regarde jamais comme sa propriété aucun des produits du mécanisme au-delà de son usage clairement autorisé».

II – PRATIQUE ACTUELLE DES LETTRES : LEUR PREMIER USAGE DANS L'ENSEIGNEMENT.

Essayons d'identifier les premières occasions où l'élève rencontre les lettres dans le cursus scolaire actuel.

Dans l'enseignement primaire, l'usage est restreint aux quelques situations suivantes :

1. Pour désigner une dimension (longueur, largeur, hauteur, diamètre, rayon) dans une «formule».

Par exemple, $2 \times (L + \ell)$ est la «formule donnant» le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ. Ou encore $\frac{(B + b)}{2} \times h$ «donnent» l'aire du trapèze. Remarquons tout de suite, que ces désignations (B et b pour «grande» et «petite» base, h pour hauteur) sont très liées à l'objet représenté. Comment envisager que la lettre t puisse représenter une longueur ? Elles peuvent ne pas être perçues dans leur aspect fonctionnel mais plutôt comme raccourci sténographique décrivant un schéma de calcul (Booth, 1984).

2. Pour désigner des objets géométriques simples, bien déterminés comme un point, une droite, un cercle, un angle. A ce propos, il semble nécessaire de distinguer les désignations du type «la droite d» de celles plus complexes du type «le seg-

*Lettres du 15 mai 1843 et du 1er septembre 1850, citées par N Wirth dans «Introduction à la programmation», Paris : Masson, 1977.

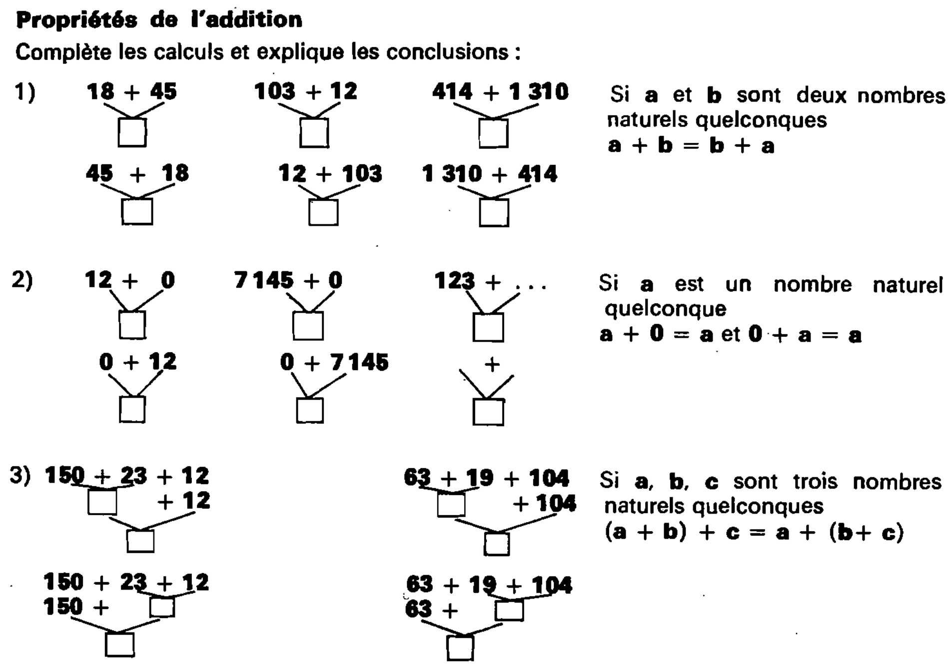
ment AB». La désignation du segment, en effet, est obtenue à l'aide de celle de deux objets géométriques de nature différente : les deux points A et B (Laborde 1982).

3. Pour désigner un nombre à l'occasion d'une opération à trou comme par exemple $3 + ... = 7$ ou $5 \times ... = 75$. Certains enseignants, dès le cycle primaire vont jusqu'à substituer au «trou» la lettre x, facilement suivis en cela par les élèves. Il s'agit «d'équation lacunaire». (Booth 198). Dans le 1er cycle, lorsqu'il s'agit de résoudre les équations $3 + x = 7$ ou $5 \times x = 75$, les enfants répondent très naturellement $3 + 4 = 7$ ou $5 \times 15 = 75$. Par contre les écritures $x = 4$ ou $x = 15$ sont très difficiles à obtenir.

Cette réticence très forte que nous pouvons observer en classe montre bien que, lorsque l'élève accepte de substituer à $3 + ... = 7$ l'écriture $3 + x = 7$, le statut qu'il attribue à x est très restreint. Il aura des difficultés à utiliser de lui même cette désignation ou à envisager qu'elle puisse subir un quelconque traitement. Il faudra que l'enseignant insiste fortement s'il veut faire accepter l'écriture des différentes étapes de la résolution de cette équation. Une telle explication n'est d'ailleurs peut-être pas indispensable à ce niveau. On peut vouloir la réserver à des situations plus délicates.

Très tôt, notamment dès la 6ème et parfois même dès le CM2, les enseignants présentent les propriétés des opérations dans les ensembles de nombres à l'aide de lettres désignant des variables quantifiées.

Voici un exemple extrait d'un ouvrage de cm2 : M.A. Touyarot, Cl. Hameau, Mathématique au cours moyen 2ème année, collection «Itinéraire mathématique» F. Nathan, 1976, p. 34.


• Propriétés de l'addition
Complète les calculs et explique les conclusions :

1) 18 + 45 → ☐ ; 103 + 12 → ☐ ; 414 + 1 310 → ☐
45 + 18 → ☐ ; 12 + 103 → ☐ ; 1 310 + 414 → ☐
Si **a** et **b** sont deux nombres naturels quelconques
a + b = b + a

2) 12 + 0 → ☐ ; 7 145 + 0 → ☐ ; 123 + . . . → ☐
0 + 12 → ☐ ; 0 + 7 145 → ☐ ; + → ☐
Si **a** est un nombre naturel quelconque
a + 0 = a et **0 + a = a**

3) 150 + 23 + 12 ; ☐ + 12 ; ☐
63 + 19 + 104 ; ☐ + 104 ; ☐
150 + 23 + 12 ; 150 + ☐ ; ☐
63 + 19 + 104 ; 63 + ☐ ; ☐
Si **a, b, c** sont trois nombres naturels quelconques
(a + b) + c = a + (b + c)

Que représente pour l'enfant une telle égalité ? Quelle compréhension en a-t-il ? Quel statut confère-t-il à a et à b ?

On peut supposer qu'un élève de 6ème verra là l'illustration de quelques exemples numériques venant d'être donnés : a et b représentent pour lui des nombres dont la valeur est ignorée. Il ne perçoit pas le caractère universel attaché à ces deux variables.

III – QUELQUES ELEMENTS DE NOTRE REFLEXION A PARTIR DE LA PRATIQUE ACTUELLE.

1. Nouvelle approche du nombre dans le 1er cycle.

Les programmes du 1er cycle confrontent les élèves, petit à petit, à une nouvelle approche du nombre.

En effet, au cours moyen et au début de la 6ème, le nombre est essentiellement issu de la mesure : un naturel dénombre les unités ; le nombre décimal apparaît comme le codage d'une mesure (d'un dénombrement) après un changement d'unité. Or, dès la 6ème avec les nombres relatifs, en 4ème et en 3ème ensuite avec les rationnels et les réels, un nouveau point de vue apparaît conjointement : un nombre est défini comme solution d'une équation qui elle, est sans dimension. Il y a de ce fait rupture avec le «nombre-mesure» (Glaeser, 1981).

Ces dernières années, les enseignants s'évertuent à donner une interprétation familière des nombres relatifs (gain, perte, crédit, débit, pas en avant, en arrière, au-dessus, en-dessous...). Cela peut aider beaucoup les élèves à aborder ce nouvel ensemble de nombres. Mais cette invocation du concret est à la fois précaire et insuffisante. Rappelons en effet, que les relatifs ne sont pas utilisés en comptabilité, crédit et débit sont traités selon deux rubriques bien distinctes. En outre, si l'addition de deux négatifs peut très bien s'interpréter comme l'addition de deux pertes ou de deux débits, il n'en va pas de même pour la multiplication. L'addition itérée d'un négatif permet de justifier les règles de la multiplication d'un relatif par un naturel :

$$(-7) + (-7) + (-7) = 3 \times (-7) = -21$$

Mais à quels exemples concrets peut-on rattacher le produit $(-7) \times (-3)$? Comment justifier que ce produit est $+21$?

Du point de vue mathématique $\mathbb{Z}$ est un ensemble muni d'une structure additive et multiplicative «prolongeant» celle de $\mathbb{N}$ et pour laquelle toute équation du type $x + n = 0$ admet une solution. Le fait que, dans $\mathbb{Z}$, la multiplication demeure distributive sur l'addition permet de justifier la règle des signes. Ce n'est plus un algorithme classique qui donne le produit de deux nombres mais les propriétés de la structure multiplicative. Cela déroute les élèves qui n'accèdent pas toujours facilement à cette approche du nombre.

Ces difficultés sont du même ordre lorsqu'un élève se trouve confronté à un nombre décimal exprimant une fréquence ou une densité. Par exemple, on «compte» en France 2,1 enfants par famille et la densité de la population est environ de 98 habitants au km^2. Ces nombres ne sont pas directement issus d'une mesure ; ils serviront le plus souvent d'opérateur pour estimer le nombre d'enfants pour un nombre de familles donné ou le nombre d'habitants pour une superficie donnée.

Ainsi dès la 6ème, il est nécessaire d'amener les élèves à envisager les nombres d'un nouveau point de vue : celui des structures opératoires. Ceci va être renforcé en 4ème avec l'étude des rationnels et des réels.

Un rationnel peut être défini comme la solution d'une équation du type $ax = b$, $(a \neq 0)$. L'écriture $\frac{2}{3}$ désigne le nombre qui, multiplié par 3, donne 2. L'écriture π désigne le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. $\sqrt{2}$ est une désignation du nombre qui, élevé au carré, donne 2. L'élève est obligé de se détacher des algorithmes classiques qu'il utilise avec les décimaux pour concevoir les nombres réels selon les propriétés de la structure de corps et non de l'écriture décimale (parfois inexistante). Nombreux sont les élèves qui ne considèrent pas que $\sqrt{2}$ puisse être une désignation satisfaisante pour un nombre et qui lui substituent dès le début de tout calcul une valeur approchée comme 1,414. De la même façon, 1,414 et −1,414 sont considérés comme solution de l'équation $x^2 = 2$ au détriment de $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Des remarques analogues se font à propos de π.

Et le calcul algébrique dans tout cela ?

Nous pensons que l'apprentissage de la gestion des calculs dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$ et celui du calcul avec des lettres doivent être menés en interaction, car le problème est pour nous de même nature (il faut se détacher des écritures décimales et des algorithmes des opérations).

Avant de poursuivre, faisons une remarque : l'usage des lettres est nécessaire pour aborder non seulement la notion d'équation mais aussi pour expliciter la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Il est difficile de faire écrire à un enfant de 6ème une égalité comme

$$7 \times 17 + 3 \times 17 = 10 \times 17$$

bien qu'il réalise l'intérêt que représente de tels regroupements. Par contre, il est presque impossible de lui faire illustrer cette propriété par des écritures comme

$$7 \times 17 + 3 \times 17 = (7 + 3) \times 17$$

Nous pensons que la distributivité prend tout son sens seulement lorsqu'on est amené à développer des expressions du type $7(x + 3)$ ou à factoriser $7x + 21$.

2. Le calcul algébrique : un outil.

Les élèves sont toujours mal à l'aise à l'apparition des lettres. Quel enseignant n'a pas entendu l'un d'eux lui demander : «Mettez donc des nombres ; c'est plus facile ; on comprend mieux» ; «Avec des nombres, je comprends ; avec des lettres je ne comprends plus». En fait, une telle demande est souvent incompatible avec la situation ou simplement tout à fait contraire au caractère universel du calcul littéral. En tout cas, elle atteste que le rôle spécifique des lettres est mal perçu. Comment aider les élèves à approcher et à saisir le sens et l'utilité de ces désignations ? Comment leur faire surmonter leur réticence ? Avec plus ou moins de difficultés, ils sont arrivés à faire fonctionner les nombres et leurs opérations. Pourquoi abandonneraient-ils ces activités numériques qui leur sont parfois tout juste familières, au profit du calcul algébrique plein d'embûches et si abstrait ? Il est nécessaire de leur montrer l'utilité, l'efficacité et la performance du calcul algébrique et ceci, avant même qu'ils ne le maîtrisent. Cela est loin d'être une tâche évidente.

L'utilisation des lettres dans le calcul est un outil performant à plusieurs titres :

— elles permettent de désigner un nombre dont la valeur n'est pas connue ou fixée ;

— elles se prêtent aux modifications d'écritures qui conduisent à la détermination des nombres désignés ;

— elles permettent de conserver «l'histoire» du nombre en laissant figurer certains calculs. (En arithmétique au contraire, on effectue les calculs au fur et à mesure).

Enfin, les élèves ne perçoivent tout le sens et toute l'efficacité de notions comme la relation d'ordre et la valeur absolue que lorsqu'elles sont utilisées dans les situations algébriques. Ainsi en présence de $17 \leqslant 23$ l'élève peut ne porter son attention que sur les deux nombres 17 et 23. Seule une écriture comme $x \leqslant 23$ l'oblige à prendre en compte la relation $\leqslant$.

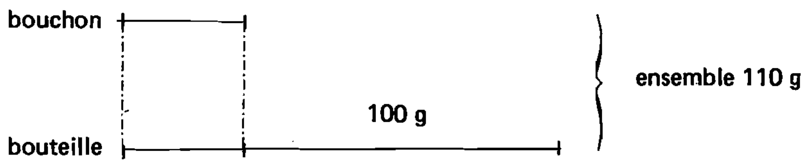
Il en est de même avec la notion de valeur absolue : on écrit 17 au lieu de $|-17|$ et la notation $|\ |$ ne s'impose pas dans ce cas. Par contre, si x désigne un nombre, il peut être important de pouvoir désigner sa valeur absolue d'où l'introduction de la notation $|x|$.

Au CM2, les élèves ont parfois quelques petits «problèmes» à résoudre : des robinets aux trains, en passant par l'âge du capitaine ! Si d'aventure, ils demandent à leurs parents (ou même à des enseignants du secondaire) de les aider, ils risquent de s'entendre répondre : «écoute, mon petit, moi je sais résoudre par «l'algèbre» mais je ne sais pas te l'expliquer par «l'arithmétique»». Y a-t-il donc 2 écoles qui s'affrontent ?

Pour illustrer notre propos, voici un petit exemple :

Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 g.
La bouteille pèse 100 g. de plus que le bouchon. Combien pèse le bouchon ?

■ Dans un manuel de CM2 n'utilisant pas le calcul littéral, on proposera par exemple le schéma suivant :



Le raisonnement est alors explicité de la façon suivante : si le bouchon et la bouteille pèsent 110 g et si la bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon alors 10 g représentent le double du poids du bouchon.

Une telle résolution serait intitulée : résolution par l'arithmétique !.

■ On peut utiliser ce même problème pour illustrer l'utilisation des lettres et proposer une résolution «par l'algèbre».

Si x désigne le poids du bouchon, $x + 100$ désigne le poids de la bouteille. On peut écrire $x + x + 100 = 110$ qui conduit à : $x = 5$.

Comparons ces deux résolutions : le poids du bouchon est représenté par un segment, celui de la bouteille par un autre. Ce type de représentation est bien adapté à cette situation puisqu'on peut opérer par addition en juxtaposant bout à bout des segments.

Dans la deuxième résolution, on utilise une lettre pour représenter le poids du bouchon et on opère par addition sur cette lettre. Le schéma précédent illustre parfaitement l'équation et les différentes transformations conduisant à sa résolution : $x + (x + 100) = 110$; $x + x = 10$; $x = 5$.

Pourtant, il semble que ces méthodes soient perçues de façons bien différentes. Cela tient-il au fait que l'addition apparaît avec les segments plus «concrétement» qu'avec les lettres ? Il y a là un sujet qu'il faudrait approfondir. Nous voudrions attirer ici l'attention sur la difficulté des élèves, à mettre en œuvre une résolution du type «algébrique» d'un tel problème. Cette difficulté est double. Tout d'abord, quelle quantité désigner par x ? Et ensuite que faire avec deux désignations comme x et x + 100 ? A notre avis la plupart des élèves ne pensent pas que la détermination de x soit possible à partir d'une relation entre x et x + 100. Une fois l'équation posée, il lui resterait à reconnaître là une situation analogue (plus simple d'ailleurs) à celle de multiples exercices qu'il n'a pas manqué de rencontrer en classe sur la transformation d'expressions littérales et sur la résolution d'équations.

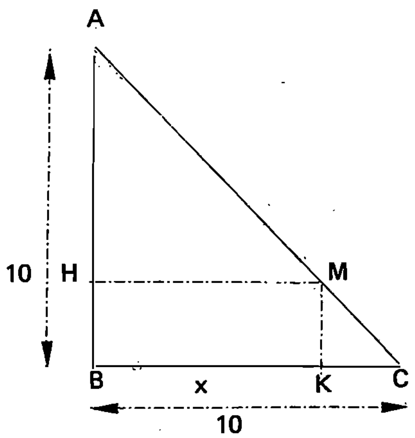
En fait, hormis quelques exemples très simples, la performance de l'outil algébrique n'apparaît que si l'on maîtrise assez bien les écritures et leurs transformations. Avant même d'entreprendre un travail, l'élève doit prévoir quelle incidence cela aura sur la découverte du résultat cherché.

Pour résoudre l'équation :

$$(x - 3)(3x - 1)^2 - 4(x - 3) = 0$$

l'élève doit-il développer ? Mettre en facteur ? Il faut, pour décider, entrevoir ce qu'apporte la factorisation de x - 3 par rapport au problème posé, à savoir la recherche de toutes les valeurs de x vérifiant l'équation. Mais à quoi peut donc bien servir une telle résolution ?

Voici un petit problème de géométrie dont la résolution recourt à une identité remarquable.



Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que AB = BC = 10.
M désigne un point quelconque de AC et H et K les projections orthogonales de M respectivement sur AB et sur BC.

Il est facile d'établir que, si x désigne la longueur BK et A(x) l'aire du rectangle HMKB, $A(x) = 10x - x^2$. En revanche, il n'est pas facile, sans changer son écriture, de donner les variations de A(x) en fonction de x et la valeur de x pour laquelle A(x) est maximum. Mais si on écrit $A(x) = 25 - (5 - x)^2$ il devient assez facile de montrer que $A(x) \leqslant 25$ et que $A(5) = 25$.

3. Situations analogues ou différentes ?

Parmi les situations dans lesquelles on utilise les lettres, certaines ne semblent pas poser trop de problèmes. D'autres au contraire, qui paraissent pourtant très proches, mettent plus particulièrement les élèves en situation d'échec. Voici un exemple illustrant ce propos.

Dans une classe de 5ème ou de 4ème, posons le problème suivant :

donner une désignation du suivant d'un entier ;
donner une désignation d'un entier pair ;
donner une désignation d'un entier impair.

Après de nombreuses hésitations, les élèves perçoivent assez bien que, si n désigne un entier, n + 1 désigne son suivant. Il y a plus de difficultés pour les désignations 2n et 2n + 1. Un élève admet généralement après avoir constaté sur quelques exemples de valeurs données à n que 2n et 2n + 1 sont respectivement pair et impair. Il attribue à n, dans ces trois cas, le statut de désignation d'un nombre particulier. Or, pour les mathématiciens 2n n'est pas seulement une désignation du double de n mais plutôt une désignation générique d'un nombre pair. De même, 2n + 1 est une désignation générique d'un nombre impair. La notation n + 1 est utilisée pour désigner le suivant d'un nombre donné et non tout suivant. Si on caractérisait un entier non nul par n + 1, ce serait alors une désignation générique de tout suivant, mais ce n'est pas l'usage. Nous sommes persuadés que les difficultés de compréhension de 2n et 2n + 1 sont liées au caractère générique de ces écritures et donc au statut de variable de n. L'élève cherche à les appréhender de la même façon que n + 1.

Dans un premier temps d'ailleurs, cette diversité de conception peut sembler être sans conséquence. Mais si on en vient à les utiliser pour établir par exemple, que le carré d'un nombre impair est impair (le suivant d'un multiple de 4), que la somme de deux nombres impairs est paire, ou que par contre leur produit est impair, les élèves qui n'accèdent pas au concept de variable, ne «voient» absolument pas en quoi ce «calcul» constitue une véritable démonstration d'un résultat universel. Ils sont alors dans un profond désarroi.

Il est nécessaire que l'enseignant prenne conscience du ou des statuts conférés aux lettres en fonction des traitements nécessaires à la résolution de divers problèmes. Il doit être à même de présenter différents types d'activités qui aident les élèves à aborder puis à surmonter les difficultés propres à chaque désignation. Nous pensons à cet égard que certains aspects ne peuvent être profitablement abordés dès la 6ème ou la 5ème mais devraient être réservés pour la 4ème ou la 3ème.

4. Quelques statuts des lettres en mathématiques.

Les lettres servent à différentes désignations.

1. Dans des activités de communication.

- Désignation d'objets géométriques élémentaires comme point, droite, segment.

■ Désignation d'un nombre lié à un objet ou à une situation, dans une formule de calcul numérique (c'est-à-dire décrivant un calcul à faire) : formule de périmètre, d'aire, calcul de la valeur d'une expression.

2. Dans des activités de calcul donnant lieu à un traitement.

■ Désignation d'un nombre dont l'existence ne fait aucun doute, dans des équations lacunaires avec une gestion différente de celle des nombres ayant une écriture décimale : opérations à trou, certains types d'équation...

3. Dans des activités de modélisation.

■ Désignation d'une quantité physique pour exprimer dans un modèle donné une relation avec une autre quantité. C'est le cas par exemple, pour un modèle proportionnel : le prix à payer p est proportionnel à la quantité x de «super» délivrée et $p = 4{,}88x$.

■ Désignation d'une variable définie non par sa valeur mais par son appartenance à un ensemble de nombres et par les propriétés de la structure associée à cet ensemble. (Résolution d'équations dont l'existence des solutions n'est pas acquise, «identités remarquables», fonction numérique de la variable réelle, lieu géométrique d'un point...).

— Dans notre esprit, les deux premiers types de désignations sont de simples dénominations. Elles ne subissent aucun traitement.

— Celle d'un vecteur par contre dans un calcul vectoriel (somme vectorielle, multiplication par un réel, équation vectorielle...) est à rattacher au type 2.

— Si on considère trois points A, B et M tels que M soit équidistant de A et de B, il s'agit de trois lettres désignant trois points donnés et donc des désignations du type 1. Mais si on envisage que M appartient à la médiatrice de [AB], cette désignation est plutôt du type 3. b).

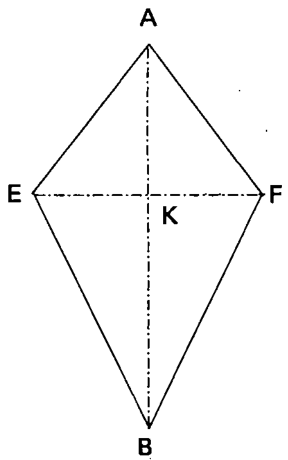
Ces catégories semblent correspondre à des types de réactions et de difficultés des élèves. En 6ème, il est assez facile d'obtenir avec un excellent taux de réussite, le calcul d'expression comme $2a^2 + b^2 - a + 2b + 7$ dans le cas où on donne des valeurs numériques pour a et b comme par exemple $a = 3$ et $b = 1$. Mais toute modification d'une expression littérale posera problème. Dès le CM2, les élèves ne sont pas trop gênés de devoir utiliser une formule du type $(B + b) \times h : 2$ pour trouver l'aire d'un trapèze s'ils connaissent les 3 valeurs de B, de b et de h. Par contre, ils auront beaucoup de difficultés et moins de réussites si, connaissant l'aire et 2 valeurs, on leur demande de déterminer la troisième valeur. Plus généralement, les élèves manifestent plus de difficultés s'il est nécessaire «d'opérer» sur des lettres.

Lors des premières résolutions d'équations qu'il rencontre, un élève cherche tout de suite à substituer un nombre à l'inconnue x. Il évite aussi toute manipulation et toute opération sur la lettre. Il recherche la solution par tâtonnement. Ce comportement est sûrement à rapprocher de la méthode dite de fausse position décrite au 18ème siècle et s'appliquant à la résolution d'équation de type $ax = b$. En voici un exemple :

Soit à résoudre l'équation : $x + 2x + 3x = 162$. Si $x = 4$ on trouve au 1er membre **36** au lieu de **162**. Puisque $36 : 4 = 9$ alors $x = 162 : 9$ c'est-à-dire $x = 18$.

En fait, le statut d'une lettre est directement lié à son traitement. Au cours d'une même activité, ce statut peut se modifier (en liaison avec le traitement entrepris) et l'élève ne suit pas toujours le point de vue de l'enseignant qui est généralement plus abstrait. Le plus souvent, il reste en deçа, avec des désignations fortement liées aux objets représentés. Illustrons ce propos d'un exemple tiré des activités proposées par le groupe calcul algébrique en 1er cycle de l'I.R.E.M. de Grenoble.

Soit un quadrilatère AFBE dont la diagonale AB soit axe de symétrie et mesure 10 cm. (On a un cerf-volant). Posons $AK = x$ et $EF = y$. Il est facile d'établir les résultats suivants : aire $(AKE) = \frac{xy}{4}$ aire $(EKB) = \frac{y(10-x)}{4}$. Un simple calcul permet d'obtenir que l'aire de AFBE est : $5y$.



Jusque là x et y désigne deux nombres ignorés liés à des objets géométriques bien définis. Mais le dernier calcul donne un résultat beaucoup plus général à savoir que l'aire du cerf-volant est indépendante de x. Ce point de vue nécessite de considérer l'ensemble des figures semblables à celle-ci ; x et y ont alors un statut de variable. Si, pour l'enseignant, ce passage semble naturel, il n'en est pas de même pour des élèves de 1er cycle qui ont du mal à se placer à ce niveau d'abstraction.

Certes il est fondamental que l'élève puisse à l'occasion de nombreux exercices acquérir une certaine habitude du calcul avec des lettres si l'on veut qu'il évite les erreurs et les traditionnelles confusions résultant des notations elles-mêmes. Cependant nous ne pensons pas que ce soit ce type de difficulté qui gêne le plus son apprentissage, qui le mette parfois en situation de véritable blocage ou qui l'empêche d'utiliser le calcul algébrique de façon performante. C'est plutôt son manque de compréhension du rôle exact de ces désignations, son manque de prise de conscience de la problématique à laquelle elles permettent de répondre. Il hésite alors à s'écarter du domaine numérique et à investir dans cet outil qu'il ne maîtrise pas encore. Les situations rencontrées doivent l'obliger à créer une rupture avec l'arithmétique. Elles doivent faire ressentir l'utilisation du calcul algébrique comme un gain réel par rapport à des méthodes de tâtonnement ou d'approximation. Elles pourront aussi mettre en évidence le caractère universel des calculs mis en place.

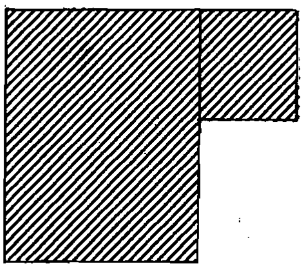
Nous avons vu comment un raisonnement «arithmétique» permet de trouver la masse d'une bouteille et d'un bouchon sachant qu'ensemble ils font 110 g et que la bouteille fait 100 g de plus que le bouchon. La résolution du système

$$x + y = 110$$
$$x - y = 10$$

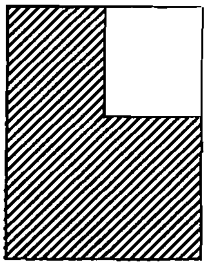
constitue une méthode possible pour toute une gamme de problèmes pouvant apparaître comme très différents.

— Calculer les dimensions d'un rectangle sachant que son périmètre mesure 110 cm et que la longueur mesure 10 cm de plus que sa largeur.

— Calculer l'aire des 2 rectangles sachant que :



aire hachurée 110



aire hachurée 100

— 110 cailloux sont répartis en deux tas. L'un des deux a 10 cailloux de plus que l'autre. Combien y a-t-il de cailloux dans chacun des tas ?

Si un élève se rend compte de la généralisation que représente l'outil algébrique il en acceptera mieux les règles, les contraintes, la rigueur et l'abstraction.

IV – NOTRE DEMARCHE ACTUELLE.

Nous cherchons actuellement à mettre au point et à expérimenter dans nos classes, quelques activités permettant de reconnaître certaines étapes de l'apprentissage du calcul algébrique.

Pour l'instant nous en distinguons 4 :

- Activités où la lettre a un statut de désignation d'un nombre ignoré lié à un objet bien déterminé. Nous parlerons de «simple» désignation.

■ Activités où la lettre a ce même statut mais au cours desquelles elle subit un traitement (transformations d'écritures, substitution) qui peut faire perdre de vue l'objet auquel elle se rapporte. Le statut de la lettre devient ainsi plus abstrait.

■ Activités conduisant à la résolution d'une équation.

■ Activités sur la notion de fonction.

1. Activités où la lettre a un statut de «simple» désignation.

1.1 Premier exemple : «jouons au magicien».

Un élève demande à un camarade :

1 — de penser un nombre
2 — de le multiplier par 5 (sans donner le résultat)
3 — d'ajouter 6 au résultat
4 — de multiplier la réponse par 4
5 — d'ajouter 9 au nombre obtenu
6 — de multiplier le nombre trouvé par 5

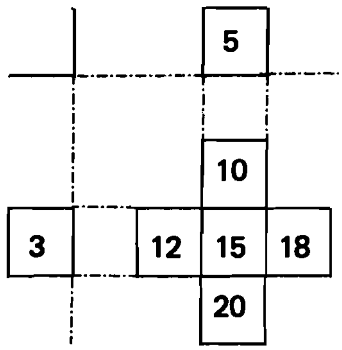
Il lui demande ensuite d'annoncer le résultat. Il «devinera» le nombre en retranchant 165 au résultat annoncé et en divisant par 100.

L'ensemble des consignes de calcul peut très bien être «décrit» ; si on désigne par x le nombre «pensé», le résultat annoncé est $100x + 165$. Dans ce cas x désigne un nombre qui existe et qui est parfaitement déterminé pour le camarade. Mais ce nombre est désigné de manière indéterminée pour l'enfant ayant le rôle du magicien. L'écriture $100x + 165$ est une écriture à trou.

Suivant l'exploitation qu'on en fait, ce thème peut devenir une activité de résolutions d'équation. Ce n'est pas notre objectif ici. Nous pensons l'utiliser seulement comme prétexte pour introduire une réflexion sur les désignations. Les élèves admettent d'ailleurs très bien la stratégie du magicien sans envisager d'équation.

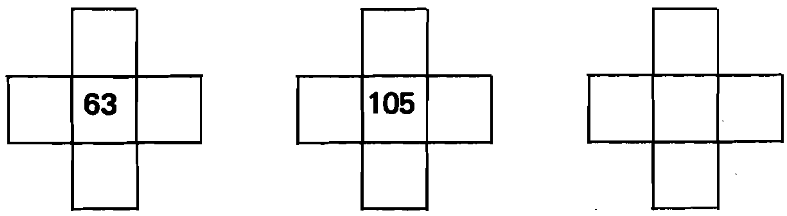
1.2 Deuxième exemple : table de Pythagore.

a) Il s'agit d'observer certaines propriétés des nombres figurant à l'intérieur d'une table de Pythagore (pour la multiplication) dans une disposition en croix. Par exemple à l'intersection de la ligne 3 et de la colonne 5 on peut observer



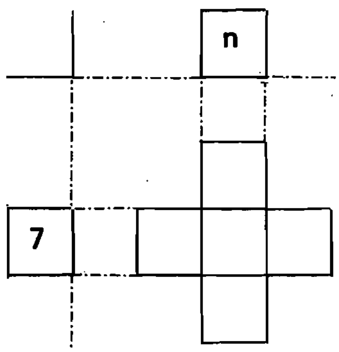
on a :
$12 + 15 + 18 = 10 + 15 + 20 = 3 \times 15$

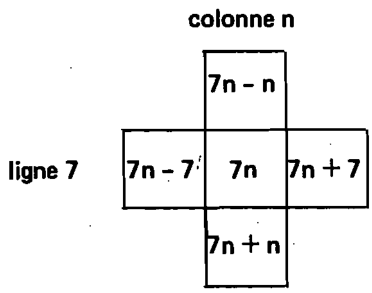
b) On propose ensuite de compléter certaines croix sans faire de multiplication.



ligne 7, colonne 9 ligne 7, colonne 15 ligne 7, colonne 23

c) On propose ensuite de compléter une croix située à l'intersection de la ligne 7 et d'une colonne indéterminée désignée par n.

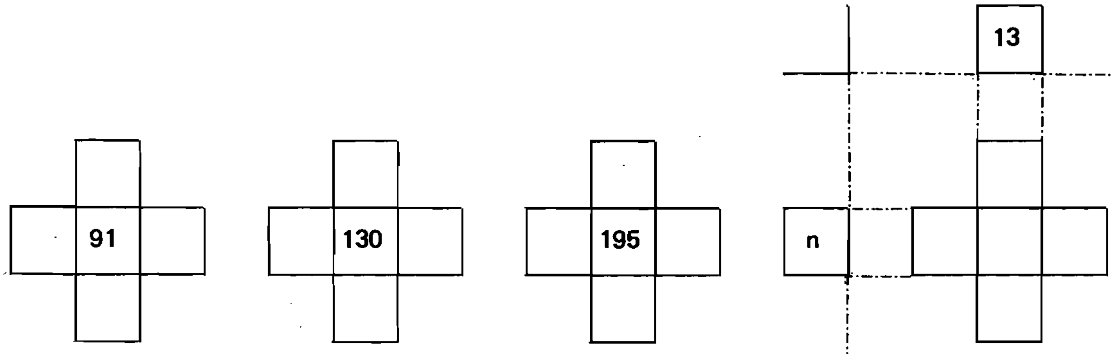




L'écriture de la somme des désignations obtenues met en évidence de façon assez immédiate le résultat $7n + 7n + 7n$ dans les deux cas.

Ce résultat représente une étape vers une généralisation de l'égalité précédente de la même façon que la désignation par n du rang de la colonne est une généralisation des cas particuliers (ligne 7, colonne 9), (ligne 7, colonne 15), (ligne 7, colonne 23).

On peut renouveler cette approche par un exercice portant cette fois sur une ligne n.



ligne 7 colonne 13 ligne 10 colonne 13 ligne 15 colonne 13

On aboutit cette fois à l'égalité :

$$13n - 13 + 13n + 13n + 13 = 13n - n + 13n + 13n + n$$

Suivant la classe et la réaction des enfants, on peut envisager de désigner une ligne par a et une colonne par b. On obtient alors :

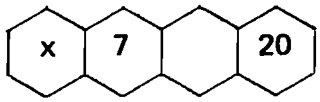
$$(ab - b) + ab + (ab + b) = (ab - a) + ab + (ab + a) = 3ab.$$

Il y a là certainement un problème didactique : les enfants trouvent que cela marche au niveau des écritures. Mais quel sens attribuent-ils à ces égalités et à la disparition de $(-b) + b$ d'une part, $(-a) + a$ d'autre part ?

Dans ces deux activités, il n'y a pratiquement pas d'opérations à effectuer sur des nombres désignés par des lettres ni de transformations d'écriture de ces désignations. Dans l'activité 1 les seules opérations portent sur les termes constants et ici, il suffit de constater que $(-n)$ et n, $(-b)$ et b, $(-a)$ et a se neutralisent. Il n'est pas indispensable de regrouper les termes comme $7n + 7n + 7n$ ou $ab + ab + ab$. Ces désignations sont du même type que celles utilisées dans les opérations à trou du cycle élémentaire. Leur statut est le même que celui de n dans l'activité équation présentée dans «petit x», numéro 3, 1983.

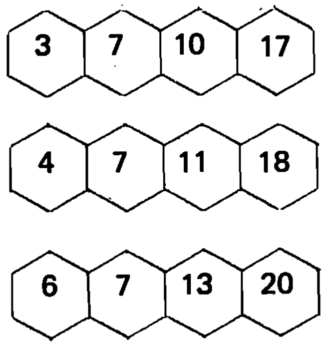
1.3 Mais avant d'aborder d'autres activités, donnons un exemple pour montrer comment le statut d'une lettre dans une activité donnée est déterminé par le traitement entrepris.

«Activité... Suite de Fibonacci».

Il faut déterminer x pour que la suite 

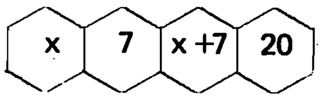
soit une suite de Fibonacci (chaque terme est la somme des 2 précédents).

a) Considérer x comme une désignation à trou, conduit à procéder par essais successifs.



Cette stratégie est souvent adoptée «spontanément» par les élèves au début du 1er cycle. Elle incite à classer cette activité dans le 1er type.

b) Considérer x comme une désignation indéterminée peut amener à compléter cette suite à l'aide de x.



On peut écrire l'égalité $7 + (x + 7) = 20$ soit $x = 6$. Ce deuxième traitement rattache l'activité à des exercices sur la notion d'équation, le statut de x est plus abstrait.

2. Action où la lettre a un statut de simple désignation mais où elle subit un traitement avec diverses substitutions ou modifications d'écriture qui l'éloigne de l'objet désigné.

Dans ces activités, la désignation littérale doit apparaître comme un outil performant.

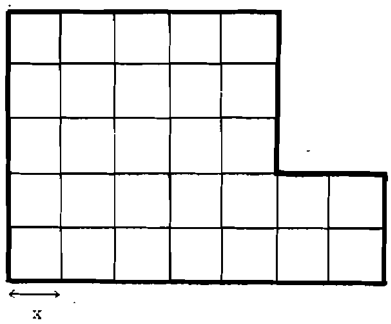
2.1 «Activité... A l'aide de».

a) Dans une première partie la lettre x joue le rôle d'unité de longueur. Un périmètre est désigné à l'aide de x (en fonction de x), une aire l'est en utilisant x^2 qui représente l'unité d'aire. Cette situation est très familière aux élèves. Elle ne pose pas de problème au numéro 1 :

irem
de grenoble

A L'AIDE DE... 1

1 Exprime le périmètre de ce dessin à l'aide de x.
Que représente x^2 ?
Exprime l'aire de ce dessin à l'aide de x.



une des méthodes les plus simple sera la suivante :

5x représente la largeur.

5x X 5x désigne l'aire du carré.

2x X 2x désigne l'aire du petit carré restant.

$25x^2 + 4x^2$ c'est-à-dire $29x^2$ désigne l'aire cherchée.

Ce résultat est obtenu à partir des deux désignations initiales 5x et 2x.

De même, au numéro 2 (voir ci-dessous), 6x et 4x désignent les longueurs des côtés de l'angle droit.

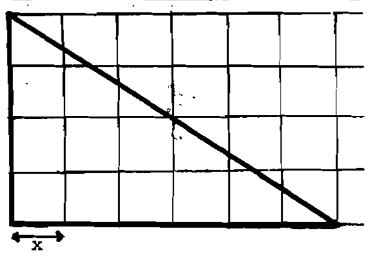
6x X 4x désigne l'aire du rectangle.

$\frac{1}{2}(6x \times 4x)$ désigne donc l'aire du triangle.

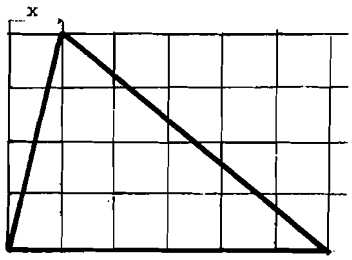
Le résultat $12x^2$ est obtenu à partir des deux désignations 6x et 4x.

b) Dans la deuxième partie, la lettre x représente la longueur d'un élément de la figure (et non plus simplement l'unité). Les autres longueurs et les aires sont ensuite désignées à l'aide de x et de x^2. Contrairement à la première partie, l'élément servant de référence n'est pas le plus «élémentaire» ; il figure dans le dessin en tant que partie et non pas en tant qu'unité. Il s'agit ici d'analyser une figure par référence à l'un de ses éléments. Nous avons préféré utiliser l'expression «à l'aide de» plutôt que «en fonction de». Nous réservons cette dernière pour les situations où l'élément x prend successivement plusieurs valeurs. Nous voulons respecter une constatation de «variation» dans l'emploi du mot fonction, la situation présentée ici n'induit pas cette idée de variation. Rien n'indique que x va parcourir un ensemble de valeurs. Chaque figure est considérée pour elle-même. Elle est composée de différents segments. Il s'agit de les évaluer par référence au segment de longueur c (x est un nombre dont l'existence ne fait aucun doute et l'enfant l'identifie à l'objet représenté) au cours de chaque exercice, quelques questions sont consacrées à un changement de référence et au «calcul» des désignations à partir de ces nouveaux éléments.

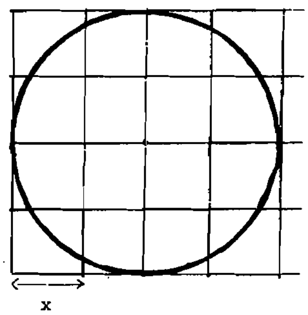
2 Exprime l'aire de ce triangle à l'aide de x.
Dessine un triangle qui a pour aire : $3x^2$.



3 Exprime l'aire de ce triangle à l'aide de x.



4 Exprime le périmètre de ce disque à l'aide de x.
Exprime son aire à l'aide de x.



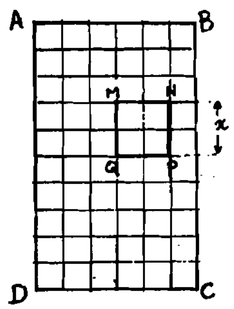
irem de grenoble

A L'AIDE DE... 2

5

- Observe la figure géométrique ci-contre.
- Exprime chaque longueur à l'aide de x.

  AB =
  BC =
  CD =
  AD =
  MN =
  NP =
  PQ =
  QM =

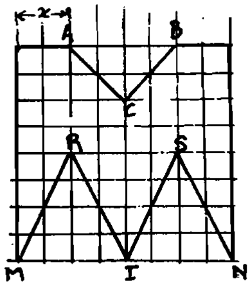


- Exprime l'aire du rectangle à l'aide de x. $\mathcal{A}$ =
- Exprime chaque longueur à l'aide de AB.
- Exprime $\mathcal{A}$ à l'aide de AB.

6

Observe le dessin.

- Evalue l'aire du triangle ACB à l'aide de x.
- Evalue l'aire des triangles MRI et ISN à l'aide de x.
- Evalue l'aire délimitée par la figure à l'aide de x.
- Exprime les aires précédentes à l'aide de AB.



irem
de grenoble

A L'AIDE DE... 3

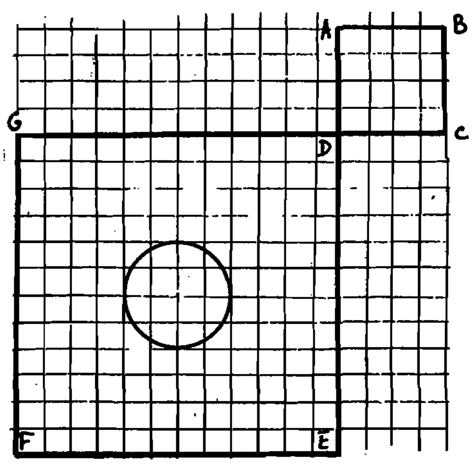
7

x est le diamètre du cercle.

- Exprime le périmètre des carrés ABCD et DEFG à l'aide de x.
- Exprime le périmètre du cercle à l'aide de x.
- Exprime l'aire du disque à l'aide de x.

On appelle y le côté du grand carré.

- Exprime x à l'aide de y.
- Exprime le périmètre des carrés à l'aide de y.
- Exprime le périmètre du cercle à l'aide de y.
- Exprime l'aire du disque à l'aide de y.



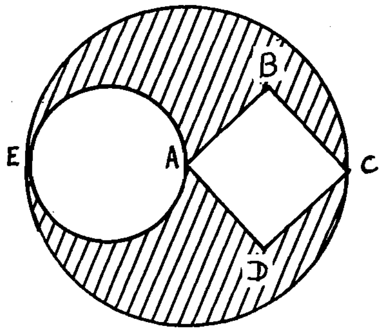
8

Observe la figure : EC est un diamètre du grand cercle et AE un diamètre du petit cercle. ABCD est un carré x désigne le rayon du petit cercle.

- Exprime l'aire du grand cercle à l'aide de x.
- Exprime l'aire du carré à l'aide de x.
- Exprime l'aire de la partie hachurée à l'aide de x.

Appelle y le diamètre du grand cercle.

- Exprime y à l'aide de x.
- Exprime toutes les aires précédentes à l'aide de y.



2.2 «Activité... Piscine».

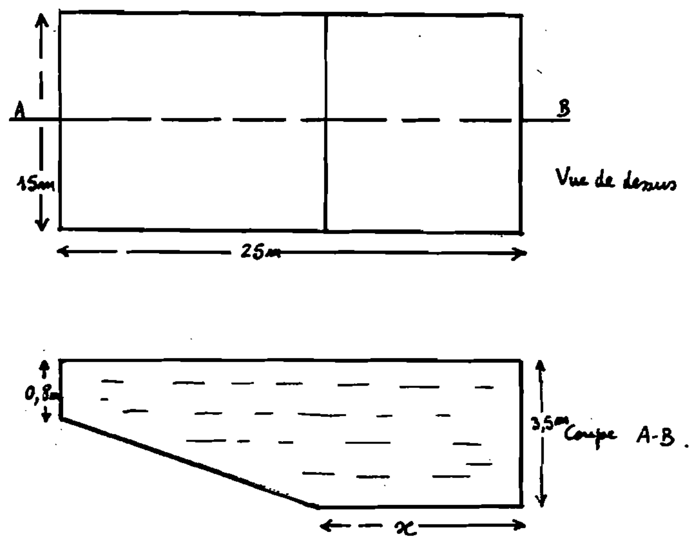
C'est la modélisation d'une situation réelle. L'activité est tout à fait semblable à la précédente. Seule la dernière question diffère. Il s'agit en effet de trouver x de façon que :

$$20{,}25x + 806{,}25 = 867 \quad \text{(c'est-à-dire } x = 3\text{)}.$$

Nous avons choisi ces valeurs pour que la solution de cette équation soit entière. L'objectif n'est pas ici la résolution d'une équation. Il s'agit simplement de montrer par cette question comment les opérations sur les désignations servent à répondre à une question qui, sans cette méthode, serait difficile, voire impossible.

irem de grenoble

PISCINE



Ceci est la vue de dessus et la coupe d'une piscine. Comme tu peux le voir, la profondeur n'est pas la même partout. La partie horizontale du fond a une longueur désignée par x.

Exprime le volume du bassin à l'aide de x.

Trouve x pour que la piscine contienne 867 m^3.

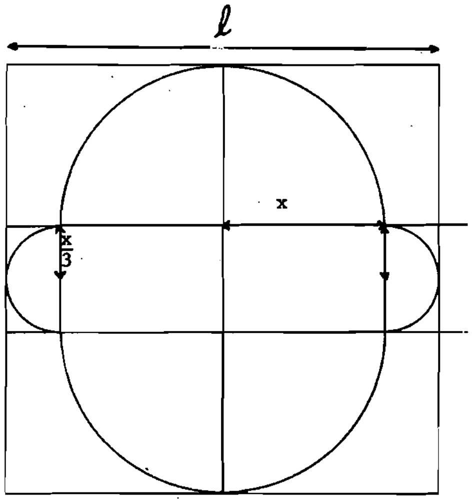
2.3 «Activité... Demi-cercles» et «Activité... Trajet».

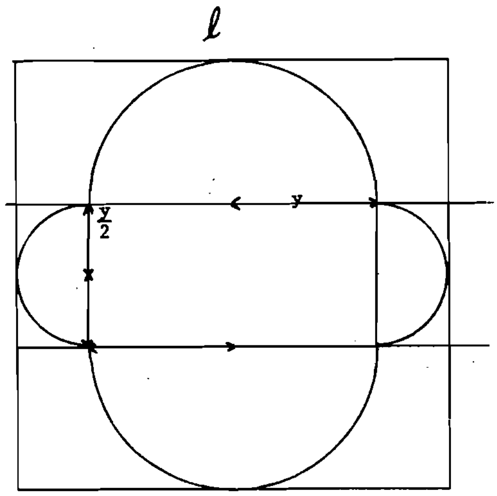
Outre les objectifs assignés à «piscine», les deux activités «demi--cercles» et «trajet» constituent une introduction à la notion d'invariant. En effet pour «demicercles», les deux périmètres p_1 et p_2 sont tous les deux égaux à $\pi \ell$ et les deux trajets C_1 et C_2 à $\frac{1}{2}\pi d$ $(d = 7x = 13y)$.

Il est très important d'être attentif aux réactions (ou au manque de réaction) des élèves à ce propos : ils analysent très difficilement ce résultat et n'en perçoivent pas la signification.

irem
de grenoble

DEMI-CERCLES





1 **Ces deux figures représentent des pièces de tôle découpées dans un même carré. Toutes les deux sont dessinées à partir de demi-cercles comme sur les dessins :**
— la première avec deux demi-cercles de rayon x et deux demi-cercles de rayon x/3 ;
— la deuxième avec deux demi-cercles de rayon y et deux demi-cercles de rayon y/2.

2 Exprime à l'aide de x et du nombre π le périmètre p_1 de la première pièce.

Exprime à l'aide de x et du nombre π l'aire A_1 de cette pièce.

3 Exprime à l'aide de y et de π le périmètre p_2 et l'aire A_2 de la deuxième pièce.

4 **On appelle l le côté du carré.**

Exprime x et y à l'aide de l.

Pour comparer p_1 et p_2, puis A_1 et A_2 procède de la manière suivante :

Exprime p_1, p_2, A_1 et A_2 à l'aide de l.
Compare p_1 et p_2.
Compare A_1 et A_2.

5 Dans un carré de 15 cm de côté dessine une figure constituée de demi-cercles comme les précédentes mais avec un rapport des rayons égal à 5.

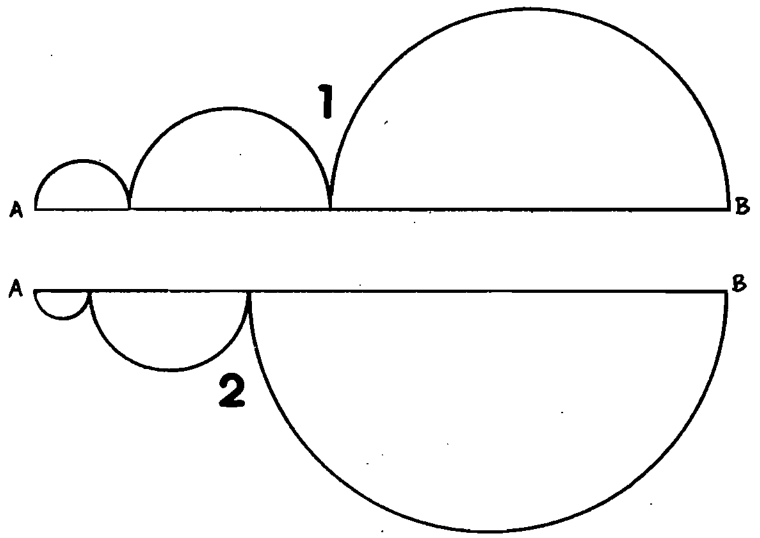
Si tu appelles l le côté du carré exprime le périmètre p_3 et l'aire A_3 de cette figure à l'aide de l et compare-les à p_1, p_2 et A_1, A_2.

Prolongement possible.

6 Fais le même travail en prenant un rapport des rayons égal à k et un rapport des rayons égal à h et calcule à l'aide de h, k et l les périmètres p_k et p_h et les aires A_k et A_h et compare-les.

irem de grenoble

TRAJET



Sur le dessin 1 le petit cercle a pour diamètre x et les deux autres ont pour diamètre respectivement 2x et 4x.
Sur le dessin 2 le petit cercle a pour diamètre y et les deux autres ont pour diamètre respectivement 3x et 9x.

1 Pour aller de A à B sur chacun des dessins il y a 2 trajets possibles :

— par la droite AB soit T_1 et T_2 ces trajets
— par les cercles soit C_1 et C_2 ces trajets.

Exprime la longueur de T_1 et C_1 à l'aide de x.
Exprime la longueur de T_2 et C_2 à l'aide de y.

2 La distance de A à B est la même sur les deux dessins.

Appelle d cette distance. Compare C_1 et C_2 (pour cela exprime-les à l'aide de d).

3 Compare l'aire de la figure 1 et de la figure 2.

3. Activités sur la notion d'équation.

Du point de vue mathématique, résoudre une équation dans IR, c'est rechercher les zéros d'une fonction. Pratiquement, cela correspond à 2 types de problèmes. On recherche :

— Soit tous les antécédents d'un élément donné pour une fonction numérique donnée.

— Soit tous les éléments qui ont la même image par deux fonctions numériques données.

Dans le premier cas on a une équation du type $f(x) = k$ avec $k \in IR$ et $f : IR \longrightarrow IR$.

Dans le deuxième cas on a une équation du type $f(x) = g(x)$ avec $f : IR \longrightarrow IR$ et $g : IR \longrightarrow IR$ qui peut d'ailleurs se ramener au premier cas : $(f - g)(x) = 0$.

Cette approche confère à la lettre x un statut de variable. Or ce dernier est mal perçu par de jeunes élèves. Aussi pour aborder cette notion d'équation en premier cycle, nous avons préféré une approche dans laquelle l'inconnue a un statut beaucoup plus concret. L'élève peut ainsi se familiariser avec les notions et les techniques propres à la résolution d'équation, tout en s'appuyant sur la représentation d'objets bien définis.

3.1 «Activité... Caillou... x».

Au numéro 1, il y a 2 tas de cailloux. On connait le nombre total de cailloux et la différence entre les deux tas.

irem de grenoble

CAILLOU... X

1

Voici deux tas de cailloux.

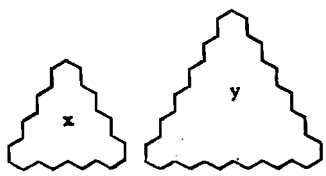
x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
y désigne le nombre de cailloux du 2ème tas.

Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.

a) Donne une écriture de y à l'aide de x. Il y a 133 cailloux en tout.

b) Ecris une égalité vérifiée par x et y.

c) Trouve x et y.

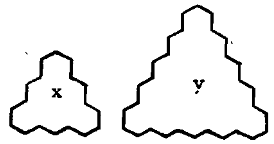


Si on présente en classe cette situation sans induire une méthode particulière, la grande majorité des élèves finit par donner le nombre de cailloux du premier tas : 57. Si on les questionne sur leurs méthodes ils décrivent leur calcul ($133 - 19 = 114$ puis $114 : 2 = 57$) mais ils sont incapables d'expliciter et de justifier autrement leur raisonnement.

Au numéro 2, il y a cette fois dans le deuxième tas 7 fois plus de cailloux que dans le premier. La plupart des élèves cette fois se trompe en cherchant à diviser 56 par 7 (au lieu de 8).

2 Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :

- Le 2ème tas a 7 fois plus de cailloux que le 1er.
- Il y a 56 cailloux en tout.



Nous avons choisi d'utiliser cette situation en classe pour montrer comment les désignations avec les lettres permettent d'arriver facilement au résultat tout en rendant compte du raisonnement. Par les questions posées, nous avons voulu induire les écritures suivantes :

La première phrase se traduit par l'égalité $y = x + 19$ (1)
la deuxième phrase par $x + y = 133$ (2)
Il est alors possible d'écrire $x + x + 19 = 133$ (3).

Transformer l'écriture de l'égalité (3) ainsi : $x + x = 14$ illustre bien la première étape du raisonnement (si on enlève 19 cailloux les deux tas sont égaux) et permet de justifier la deuxième étape (on divise 114 par 2).

Au numéro 2, cette démarche permettra de bien mettre en évidence la division par 8 : $x + 7x = 56$ Il est évident que ces deux situations ne permettent pas de présenter la résolution des équations $2x + 19 = 133$ et $8x = 56$ comme étant la recherche des antécédents de 133 et de 56 respectivement par l'application

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x + 9 \end{array} \quad \text{et l'application} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 8x \end{array}$$

Ici $2x + 19 = 133$ et $8x = 56$ fonctionnent comme des écritures à trou. Cette interprétation n'est qu'un cas particulier de la précédente. L'interprétation fonctionnelle, redisons-le, s'adapte à toutes les situations. Mais elle peut être inaccessible à certains enfants à un moment donné de leur développement.

L Nous avons tenu à réaliser une approche de la notion d'équation avec des situations conférant à l'inconnue x un statut très concret. Nous voulons dire par là que x désignera une quantité. Nous aurons une inconnue concrète comme l'on avait un nombre concret. Cela pour permettre à l'enfant :

— de se familiariser assez tôt mais sans malentendu avec des désignations littérales ;

— d'écrire des égalités entre différentes désignations ;

— de réaliser et de maîtriser diverses modifications d'écriture ;

— de constater la performance de ces méthodes (en dehors des premiers exercices, il serait très difficile d'obtenir le résultat sans avoir recours aux lettres) ;

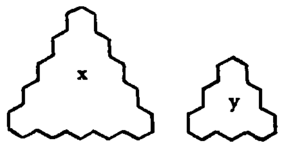
— de manipuler les techniques simples de résolution d'équation d'une équation sans être gêné par le concept plus abstrait de fonction.

3

Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :

— **Le 2ème tas à 26 cailloux de moins que le 1er.**

— **Il y a 88 cailloux en tout.**

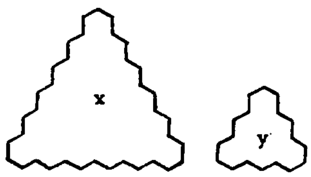


4

Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :

— **Le 1er tas à 65 cailloux de plus que le 2ème.**

— **Il y a 175 cailloux en tout.**

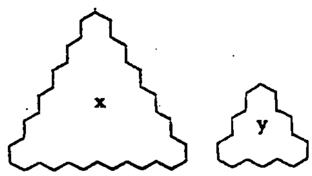


5

Refais le même travail avec les renseignements suivants :

— **Le 1er tas a 3 fois plus de caillous que le 2ème.**

— **Il y a 24 cailloux en tout.**

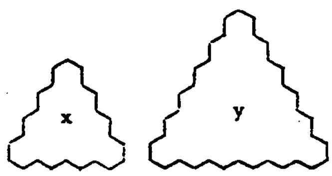


6

Refais le même travail avec les renseignements suivants :

— **Le 2ème tas a 5 fois plus de cailloux que le 1er.**

— **Il y a 30 cailloux en tout.**

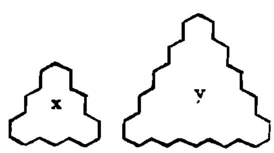


7

Refais le même travail avec les renseignements suivants :

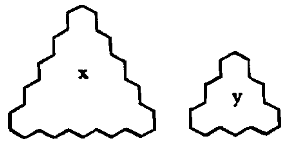
— **Le 2ème tas a 5 fois plus de cailloux que le 1er.**

— **Il y a 42 cailloux en tout.**



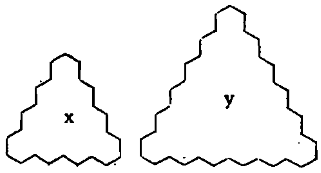
8 Refais le même travail avec les renseignements suivants :

– Le 2ème tas a 12 cailloux de moins que le 1er.
– Il y a 20 cailloux en tout.



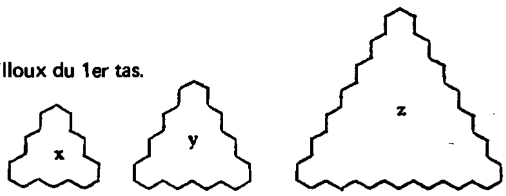
9 Refais le même travail avec les renseignements suivants :

– Le 2ème tas a 7 fois plus de cailloux que le 1er.
– Il y a 352 cailloux en tout.



10 **Voici 3 tas de cailloux :**

– x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
– y celui du 2ème tas.
– z celui du 3ème tas.



Tu sais que : **– Le 1er tas a 15 cailloux de moins que le 3ème.**
– Le 2ème tas a 5 cailloux de moins que le 3ème.

a) Donne une écriture de **x** à l'aide de **z** ; de **y** à l'aide de **z**.
– Il y a 31 cailloux en tout.

b) Ecris une égalité vérifiée par **x, y** et **z**.

c) Trouve **x, y** et **x.**

11 Refais le même travail avec les renseignements suivants :

– Le 1er tas a 5 cailloux de moins que le 3ème.
– Le 2ème tas a 15 cailloux de plus que le 3ème.
– Il y a 31 cailloux en tout.

12 **Tu sais que :** **– Le 2ème tas a 3 fois plus de cailloux que le 1er.**
– Le 3ème tas a 2 fois plus de cailloux que le 1er.
– Il y a 72 cailloux en tout.

Refais le même travail mais en calculant cette fois **y** et **z** à l'aide de **x**.

13 **Tu sais que :** **– Le 1er tas a 2 fois plus de cailloux que le 2ème.**
– Le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er.
– Le 2ème tas a 86 cailloux de moins que le 1er.

Trouve **x, y** et **z.**

14	Tu sais que : – Le 1er tas a deux fois plus de cailloux que le 2ème. – Le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er. – Le 2ème tas a 43 caillaux de moins que le 3ème. Trouve x, y et z.
15	Tu sais que : – Le 1er tas a 13 cailloux de plus que le 3ème. – Le 2ème tas a 4 fois plus de cailloux que le 3ème. – Le 2ème tas a 86 cailloux de plus que le 1er. Trouve x, y et z.
16	Tu sais que : – Le 1er tas a 7 fois plus de cailloux que le 2ème. – Le 3ème tas a 18 cailloux de plus que le 2ème. – Le 3ème tas a 12 cailloux de moins que le 1er. Trouve x, y et z.
17	Tu sais que : – Le 2ème tas a 8 cailloux de moins que le 1er. – Le 3ème tas a 3 fois plus de cailloux que le 2ème. – Le 3ème tas a 6 cailloux de plus que le 1er. Trouve x, y et z.
18	Tu sais que : – Le 1er tas a 2 fois plus de cailloux que le 2ème. – Le 2ème tas a 20 cailloux de plus que le 3ème. – Le 2ème tas est 1 fois et demie le 3ème. Trouve x, y et z.

3.2 «Activité... *x*».

L'activité «*x*» a pour objectif d'aider les élèves à réaliser une mise en équation. Pour éviter les blocages de départ, nous avons choisi volontairement des situations élémentaires dégagées de tout contexte réel.

Rappelons ici que des élèves sont parfois très à l'aise dans des activités du type factorisation, développement, résolution d'équation sans pourtant savoir réaliser eux mêmes la mise en équation d'une situation donnée. Nous avons proposé dans une classe de 4ème l'exercice suivant :

Un nombre et son double font 21. Quel est ce nombre ?

La mise en équation n'a pas été évidente pour tous, bien que d'autres exercices similaires aient déjà été proposés. Après avoir écrit $x + 2x = 21$, certains se refusaient à grouper x et 2x. L'énoncé du problème induit la présence de deux nombres dans le total 21. Ecrire $3x = 21$ fait disparaître la situation crée par l'énoncé ; il semble que l'élève perçoive dans ce cas le regroupement comme une perte d'information.

La mise en équation, et surtout les techniques de résolution, ne deviennent indispensables que dans les derniers exercices proposés ici. (Par exemple pour trouver x tel que $17 + 2x = 43 - 5x$).

A propos de cette activité, essayons d'analyser une méthode adoptée spontanément par certains élèves qui procèdent par essais successifs. Au numéro 1 on a : $2x + 1 = 25$.

$x = 5$	$2 \times 5 + 1 = 11$
$x = 10$	$2 \times 10 + 1 = 21$
$x = 12$	$2 \times 12 + 1 = 25.$

Les élèves calculent donc des valeurs de $2x + 1$ pour $x = 5$, $x = 10$, $x = 12$. Font-ils appel pour autant à la notion de fonction ? Nous pensons qu'ils ne traitent pas l'expression $2x + 1$ comme une fonction (ensemble de départ, d'arrivée et graphe) mais plutôt comme un schéma de calcul (programme de calcul), comme une suite d'opérations à effectuer. [L'élève a tendance à se placer suivant le point de vue qu'il maîtrise le mieux, pour résoudre le problème]. Ici la notion de fonction n'est pas nécessaire. Elle n'apporte rien de plus. L'élève ne s'en préoccupe pas. Par contre l'enseignant, devant ces méthodes d'approximation pourrait penser que les élèves peuvent facilement accéder à la notion de fonction.

irem
de grenoble

X

1

x désigne un nombre réel.
je lui ajoute 17 : je trouve 24.
Je peux traduire la phrase précédente en écrivant $x + 17 = 24$.

Trouve x.

2

x désigne un nombre réel. Je multiplie x par 5 ; au résultat, je retranche 12. Je trouve 187.

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve x.

3 **x désigne un nombre réel. Je le double et j'ajoute 1 : je trouve 25.**

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve **x**.

4 **x désigne un nombre réel. Je lui ajoute 1 puis je prends le triple du résultat. Je trouve 27.**

(1) Ecris une égalité, traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve x.

5 **x désigne un entier naturel. La différence entre le carré de ce nombre et le nombre lui-même est 72.**

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve **x**.

6 Comment peux-tu désigner 2 nombres entiers consécutifs ?

Le produit de deux entiers consécutifs est 3 906.

Quels sont ces entiers ?

7 **x désigne un nombre entier. La somme de ce nombre et de son carré est 156.**

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve **x**.

8 **La différence entre les carrés de 2 entiers consécutifs est 57.**

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve **x**.

9 **x désigne un nombre entier. La différence entre le carré de ce nombre et le nombre lui-même est 17.**

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Peux-tu trouver **x** ?

10

x désigne un nombre entier. Je multiplie x par 3 et j'ajoute 17 ; je trouve un multiple de 4 compris entre 50 et 60.

(1) Ecris une ou des égalités traduisant la phrase précédente.
N'oublie pas d'éventuelles conditions.

(2) Trouve x.

11

x désigne un nombre réel. Si je double ce nombre je trouve le même résultat que si j'ajoute à ce nombre 17.

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve x.

12

x désigne un nombre réel. Si je triple ce nombre je trouve le même résultat que si j'ajoute à ce nombre 28.

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve x.

13

x désigne un nombre réel. Si j'ajoute 17 au double de x je trouve le même résultat que si de 43 je retranche 5x.

(1) Ecris une égalité traduisant la phrase précédente.

(2) Trouve x.

Cet article ne serait pas complet sans aborder la notion de fonction en 1er cycle. Ceci sera l'objet d'une deuxième partie dans un prochain numéro de petit x.

Remarquons pour terminer que ces activités constituent plus un exemple qu'un modèle. Elles ont été élaborées pour répondre aux objectifs définis ici. Il pourrait être dommage de les utiliser en dehors de ce contexte.

BIBLIOGRAPHIE.

LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique,* thèse d'état, Université de Grenoble 1.

BOOTH L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, *petit x* n° 5, I.R.E.M. de Grenoble.

GLAESER G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 2 n° 3, pp. 303-346.