JEUX

par Monique GERENTE

A propos du jeu de Grand $\mathbb{N}$ numéro 3 page 89, pour le C.E. :

Quels que soient les trois chiffres a, b, c (a > c), on considère le nombre de trois chiffres : a b c. On permute les chiffres extrêmes ; on obtient le nombre c b a que l'on retranche au précédent. On obtient un nouveau nombre x y z dans lequel on permute les chiffres extrêmes : z y x. On ajoute les deux derniers nombres. Qu'obtient-on ? Recommencer avec d'autres nombres de trois chiffres. Conclusion ?

Variante : refaire la même chose dans des systèmes de numérations à base non décimale, puis avec des nombres de quatre chiffres.

Nous avons reçu, à ce propos la réponse suivante :

* De Madame CHARNAY, Institutrice à Estrablin (Isère).

Démonstration.

I — *Soit un nombre de trois chiffres :* a b c, *avec* a > c.

1) En base dix.

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ - & \underset{1}{c} & \underset{1}{b} & a \\ \hline & x & 9 & z \end{array}$$

Etant donné que a *est plus grand que* c, *il y a une retenue dans la deuxième colonne, d'où*

(10 + b) - (b + 1) = 9, *quel que soit* b

et $z = 10 + c - a \; ; \; x = a - c - 1$

d'où : $x + z = a + c - 1 + 10 + c - a$

c'est-à-dire : $x + z = 9.$

L'addition finale est alors :

$$\begin{array}{rccc} & \overset{1}{x} & 9 & z \\ + & z & 9 & x \\ \hline 10 & 8 & 9 \end{array}$$

2) Dans un système de base quelconque n.

Le calcul dans la deuxième colonne devient :

$(10 + b) - (b - 1) = 10 - 1 = n - 1$

(Rappelons qu'en base n, n *s'écrit* 10).

Soustraction :

$$\begin{array}{r|c|c} a & b & c \\ -\ \underset{1}{c} & \underset{1}{b} & a \\ \hline x & (n-1) & z \end{array}$$

$z = 10 + c - a$ *et* $x = a - c - 1$,

d'où : $x + z = 10 + c - a + a - c - 1$

$x + z = n - 1$.

Addition :

$$\begin{array}{r|c|c} x & n-1 & z \\ +\ z & n-1 & x \\ \hline n-1 & 2n-2 & n-1 \end{array}$$

mais $2n - 2$ *est supérieur à* n *(c'est un nombre de deux chiffres) :* $2n - 2 = n + n - 2$ *soit* $10 + (n - 2)$, *ce qui donne dans l'addition :* $n - 2$ *dans la deuxième colonne et* 1 *de retenue dans la colonne de gauche* $(n - 1) + 1 = n = 10$.

Le résultat de l'addition est le nombre de quatre chiffres qui s'écrit :

$$\overline{10(n-2)(n-1)}^{\text{ base } n}$$

Exemple : en base six, la somme obtenue sera : 1045.

Vérification :

$$\begin{array}{r} 4\,3\,2 \\ -\ \underset{1\,1}{2\,3}\,4 \\ \hline 1\,5\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{1}\,5\,4 \\ +\,4\,5\,1 \\ \hline 1\,0\,4\,5 \end{array}$$

II — *Cas d'un nombre de quatre chiffres :* a b c d, *avec* $a > d$, *en base* n.

1) Remarque.

Pour un nombre de trois chiffres, dire que l'on permute les chiffres extrêmes ou dire que l'on «retourne» le nombre revient au même. On passe ainsi de a b c *à* c b a. *Pour un nombre de quatre chiffres, «retourner» le nombre donne* d c b a, *permuter les chiffres extrêmes donne* d b c a. *Il y a donc deux cas à étudier.*

2) Premier cas.

On permute seulement les chiffres extrêmes.

Soustraction :

$$\begin{array}{r|c|c|c}
a & b & c & d \\
-\ \underset{1}{d} & \underset{1}{b} & \underset{1}{c} & a \\
\hline
a-d-1 & n-1 & n-1 & n+d-a
\end{array}$$

soit

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x & y & z & t
\end{array}$$

Comme précédemment, on a : $x + t = n - 1$.

Addition :

$$\begin{array}{r}
x\,y\,z\,t \\
+\,t\,y\,z\,x \\
\hline
\end{array}
\quad \textit{soit} \quad
\begin{array}{r|c|c|c}
x & n-1 & n-1 & t \\
+\,t & n-1 & n-1 & x \\
\hline
n-1 & 2n-2 & 2n-2 & n-1
\end{array}$$

Comme $2n - 2 = n + n - 2 = 10 + n - 2$, *le résultat de l'addition est :*

$$\begin{array}{c|c|c|c}
n-1 & 10+n-2 & 10+n-2 & n-1
\end{array}$$

soit

$$\begin{array}{c|c|c|c}
(n-1)+1 & (n-2)+1 & n-2 & n-1
\end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{c|c|c|c}
n & n-1 & n-2 & n-1
\end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
1 & 0 & n-1 & n-2 & n-1
\end{array}$$

ce qui donne

en base dix : 10989
en base trois : 10212
en base huit : 10767
etc.......

Ce résultat est également valable dans le cas où $b = c$.

Vérification : 7415 *en base dix*

$$\begin{array}{r}
7\,4\,1\,5 \\
-\ \underset{1\ 1\ 1}{5\,4\,1\,7} \\
\hline
1\,9\,9\,8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\overset{1\ 1}{1\,9\,9\,8} \\
+\,8\,9\,9\,1 \\
\hline
1\,0\,9\,8\,9
\end{array}$$

3) Deuxième cas.

On «retourne» le nombre. Se pose alors la question de la valeur relative de b *et* c.

a) si b = c, *on retrouve le cas précédent.*

b) si b > c.

Soustraction :

	a	b	c	d
	- d	c	b	a
		1	1	
	a - d	b - c - 1	n + c - b	n + d - a
			-1	
soit	x	y	z	t

alors : x + t = n et y + z = n - 2.

Addition :

x	y	z	t
t	z	y	x
n	n - 2	n - 2	n

Mais n *en base* n *s'écrit* 10, *soit* 0 *dans la première colonne et* 1 *de retenue dans la deuxième colonne à partir de la droite. Dans cette colonne, on a alors* (n - 2) + 1, *soit* n - 1. *D'où :*

			1	
	x	y	z	t
+	t	z	y	x
1	0	n - 2	n - 1	0

soit en base dix : 10890

en base trois : 10120

en base huit : 10670

etc......

Vérification : 7415 *en base dix*

$$\begin{array}{r} 7\,4\,1\,5 \\ -\,5\,1\,4\,7 \\ {\scriptstyle 1\;1\;\;} \\ \hline 2\,2\,6\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;} \\ 2\,2\,6\,8 \\ +\,8\,6\,2\,2 \\ \hline 1\,0\,8\,9\,0 \end{array}$$

c) si b < c.

Soustraction :

$$\begin{array}{r|c|c|c}
a & b & c & d \\
-\ \underset{1}{d} & c & \underset{1}{b} & a \\
\hline
a - d - 1 & n + b - c & c - b - 1 & n + d - a
\end{array}$$

soit

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x & y & z & t
\end{array}$$

on constate que : $x + t = n - 1$

$y + z = n - 1.$

Addition :

$$\begin{array}{r|c|c|c}
x & y & z & t \\
+\ t & z & y & x \\
\hline
n - 1 & n - 1 & n - 1 & n - 1
\end{array}$$

soit en base dix : 9999

en base trois : 2222

en base huit : 7777.

Vérification :

$$\begin{array}{r}
7\,2\,6\,5 \\
-\ \underset{1}{5}\,6\,\underset{1}{2}\,7 \\
\hline
1\,6\,3\,8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\,6\,3\,8 \\
+\,8\,3\,6\,1 \\
\hline
9\,9\,9\,9
\end{array}$$

III — *Extension du deuxième cas (où l'on «retourne» le nombre).*

Je n'ai pas fait de démonstration générale en ce qui concerne un nombre de x *chiffres ; j'ai réfléchi à ce problème en base dix et j'ai ainsi trouvé des séries suivant trois cas. Je choisis un axe de symétrie médian.*

Premier cas.

Le chiffre de gauche est plus grand que son symétrique à droite.

Exemple : pour a b c d e f : c > d ; b > e ; a > f.

Deuxième cas.

Le chiffre de gauche est plus petit que son symétrique.

Exemple : pour a b c d e f g : c < e ; b < f *mais* a > g.

Troisième cas.

Ces chiffres sont égaux.

Exemple : a b c d e f g : c = e ; b = f ; a > g.

Dans ce cas là on trouverait des nombres formés de 9, treize 9 pour un nombre à 13 chiffres.

nombre de chiffres	premier cas	deuxième cas
3	1089	
4	10890	9999
5	109890	99099
6	1098900	991089
7	10998900	9901089
8	109989000	99010989
9	1099989000	990010989
10	10999890000	9900109989
11	109999890000	99000109989
12	1099998900000	990001099989
13	10999998900000	9900001099989
x *chiffres*	*formule* *résultat de la forme* 10 ... 89 ... *le résultat a* x + 1 *chiffres* * *si* x *pair s'intercalent* $\frac{x-4}{2}$ *chiffres* 9 *et «s'ajoutent»* $\frac{x-2}{2}$ *chiffres* 0 *à la fin* * *si* x *impair s'intercalent* $\frac{x-3}{2}$ *chiffres* 9 *et le nombre se termine par* $\frac{x-3}{2}$ *chiffres* 0.	*formule valable pour* $x \geqslant 6$ *résultat de la forme* 99 $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{des } 0}}{\dots}$ 10 $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{des } 9}}{\dots}$ 89 *le résultat a* x *chiffres.* * *si* x *pair* $(\frac{x-6}{2})$ *donne le nombre de* 0 *et de* 9 *intercalés.* * *si* x *impair* $\frac{x-5}{2}$ *donne le nombre de* 0 $\frac{x-7}{2}$ *celui des* 9.
application 23 *chiffres*	10999999999989000000000	99000000000109999999989

Remercions Madame CHARNAY pour cette intéressante réponse qui nous offre de nouvelles possibilités de recherche. Voici d'ailleurs une autre proposition :

Si, dans l'énoncé, on remplace a $>$ c par a $\geqslant$ c, trouve-t-on toujours 1089 (en base dix) ? Sinon, pour quels nombres ne trouve-t-on pas 1089 ? Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres permettant de trouver 1089 ?

Notons que ce thème peut permettre des développements intéressants en CM ou en 6ème.

Nous avons d'ailleurs exploité ce jeu dans une classe de CE2, surtout dans le but de faire faire aux enfants, d'une façon agréable, un grand nombre de soustractions. Ils ont trouvé, avec un peu d'aide, les nombres pour lesquels on n'aboutit pas à 1089. Ils ont remarqué dans les autres cas que le résultat de la soustraction s'écrit toujours : . 9 . Ils sentent très confusément pourquoi mais, sauf exception, sont incapables à ce niveau, de l'expliquer.

Voici pour terminer, un nouvel énoncé :

Course à 23.

Jeu à deux joueurs qui doivent, chacun à leur tour ajouter 1, 2, ou 3 au nombre précédent. Au départ, on est à 0. Gagne celui qui dit 23.

Exemple.

Le premier joueur dit : 2. Le second joueur dit 5 (il a ajouté 3 à 5), etc...

On peut jouer oralement à ce jeu ou sur une bande de 24 cases numérotées de 0 à 24. Au départ un pion est placé sur la case 0. Chaque joueur le déplace alternativement de 1, 2 ou 3 cases. Gagne celui qui l'amène sur la case 24.