«PLANCHES A CLOUS ET AIRES DE POLYGONES»*

(deux séances dans un CM_1 et CM_2 de l'Ecole Annexe de l'E.N. de Foix)

par Jane BEGUE (professeur à l'Ecole Normale d'Institutrices de Foix)

PLACE DE CES SEANCES :

en calcul, *les enfants ont rencontré la notion d'aire, la notion de mesure, la notion d'unité d'aire, l'utilisation de ces notions (mesure par pavage, par encadrement, par calcul...)*

en activités libres, *ils ont eu entre les mains des planchettes sur lesquelles des clous dessinent un quadrillage (complet ou incomplet) ; avec des élastiques, ils ont réalisé différentes figures géométriques, fermées ou non, en faisant des rythmes de couleur ou non (élastiques de couleur)...*

Nous essayons alors d'utiliser le quadrillage «matériel» avec les élastiques (ou du moins les réseaux que l'on peut former) pour mesurer des aires et **voir comment les enfants réagissent (mesure ? calcul ?).**

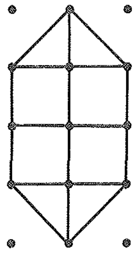
PREMIERE SEANCE – par groupe, les enfants ont une planchette.

Question posée au tableau : «**Dessinez un polygone ; essayez de mesurer son aire**».

Après recherche et discussion dans les groupes, chaque groupe vient exposer ce qu'il a trouvé.

(*) Madame BEGUE avait également adressé cet article à la revue A.R.P.

Groupe 1 – (CM_1)



– On a fait cette figure.

Les triangles sont la moitié des rectangles (on montre en traçant un trait au crayon le long de la diagonale d'un rectangle).

alors on a pris **comme unité le triangle et l'aire est** 12.

– On a aussi trouvé que le **périmètre est 8.**

Question : «8 quoi ?»

– Daniel montre les 8 élastiques du bord (déterminés par les 8 clous).

– Ah non ! ils n'ont pas la même longueur (réaction CM_2) ça ferait peut-être 6.

– Non, ça ne doit pas être pareil ; il y a des côtés droits et d'autres en biais.

Hélène prend le double décimètre : 7 cm et 6,5 cm.

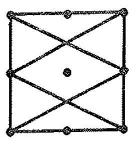
– Non, vous **ne pouvez pas calculer le périmètre comme cela** !

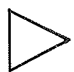
(**notion d'unité mal acquise** *on ne considère que le pavage pour l'aire, les segments pour le périmètre).*

Remarque : *dans ce même groupe, lors de la recherche, la même erreur avait été commise au point de vue de l'aire ; on avait compté des triangles sans s'occuper de leur forme différente !*

Groupe 2 – (CM_1)

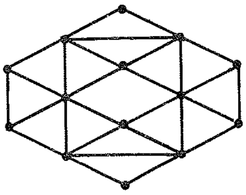
Remarque : *la présence de clous «à l'intérieur» incite à mettre des élastiques en biais plutôt qu'à quadriller.*



– On a vu que  est la moitié de  (on montre en même temps).
et que  est aussi la moitié du même alors ils ont la même aire.

Alors on a pris comme unité  et l'aire est 16.

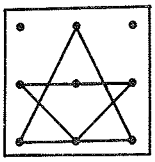
On constate que ces triangles ont la même aire, mais leurs formes différentes ne permettent pas le pavage ; alors on cherche une unité qui soit effectivement contenue un nombre entier de fois.



– On pourrait aussi mettre d'autres clous (si la planche était plus grande) et alors l'aire est ici 32.
– On peut continuer comme cela à l'infini.

(On n'a pas toujours eu l'idée de rapprocher les triangles ; ou de changer d'unité pour en prendre une plus grande).

Groupe 3 – (CM_1 et CM_2)



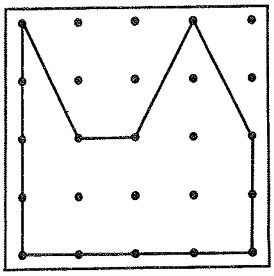
– Avec les élastiques, on a fait deux triangles, ce qui a fait une étoile.
– Pour trouver l'aire, on a redessiné cette étoile sur un papier quadrillé et **on a encadré.**

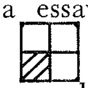
MAIS on a utilisé le quadrillage du papier sans tenir compte de celui qui était proposé par la planchette. D'autre part, la figure a été reportée sans respecter les dimensions.

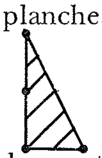
Un enfant de CM_2 : «On ne peut pas y arriver à trouver une unité qui recouvre tout ? **il doit bien y avoir un petit triangle qui aille !**

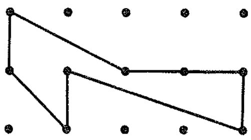
(Cette remarque motivera la seconde séance).

Groupe 4 – (CM_2)



– On a dessiné la figure 1.
– Quelle unité as-tu pris ?
– On a pris des carreaux  et **on a encadré.** On a trouvé $8 < A < 14$. Ensuite on a essayé d'avoir **un encadrement plus fin** en prenant  ; on a dessiné parce qu'on n'avait pas tous les clous sur la planche.

Remarque d'un enfant : **Ca pouvait tomber juste ! si tu avais pris**  **l'aire était 11.**

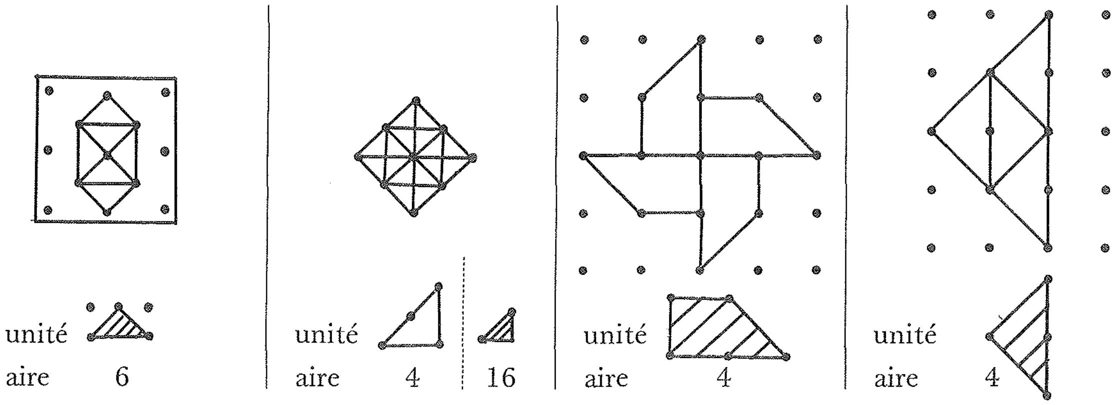


– Avec la figure 2, on a aussi fait un encadrement.
– On aurait peut-être pu aussi trouver juste !
– Peut-on trouver une forme d'unité pour que ça tombe juste ?

(Le problème est ouvert pour la seconde séance).

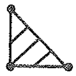
Groupe 5 – (CM_2)

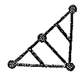
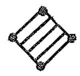
– «On a fait plusieurs figures.



– Oui mais vous, **vous vous êtes toujours arrangés pour que ça tombe juste !**

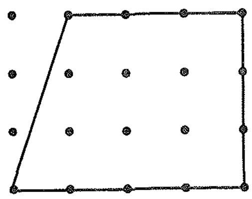
– On a aussi remarqué qu'on pouvait souvent passer d'une unité à l'autre.

Par exemple : dans la figure 3 on peut prendre  l'aire est 12.

dans la figure 1  ou  l'aire est alors 3.

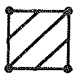
A noter : la démarche de ce groupe *qui a pris, dans le fond, le problème à l'envers. Ils se sont donné une unité et l'ont reportée un certain nombre de fois.*

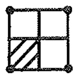
Groupe 6 – (CM_2)

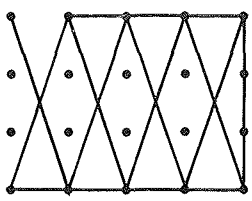


Première idée :

On a utilisé le quadrillage formé par les clous et **on a encadré**

en prenant  comme unité : $9 < A < 12$

en prenant  on trouve $39 < A < 45$.

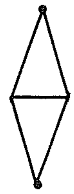


Deuxième idée :

On a cherché autre chose ; **on a essayé d'utiliser le côté en biais,** et on a cherché des triangles.

On a essayé des demi-carrés ; ça n'allait pas ; il faudrait couper en trois (le côté en biais couvre trois carreaux).

On a des losanges.

— Mais on n'en voit que trois ?
— Les autres morceaux s'assemblent  pour refaire un losange.
— Il en reste !
— Il nous est resté  et  mais ce sont deux moitiés du même losange, alors ça refait un losange entier.

On a alors trois losanges et huit moitiés ; en losange l'aire est 7.

Cette séance libre nous montre la diversité des réactions des enfants.

Les uns utilisent leurs connaissances toutes fraiches : encadrement.

Les autres construisent davantage :

- *Ils cherchent à mesurer sans calcul (forme de l'unité).*
- *Ils reportent l'unité choisie.*
- *Ils mesurent et calculent (par compensation des unités incomplètes).*

Mais tout le monde n'a utilisé **que des nombres entiers,** *personne n'a introduit de nombres décimaux (on préfère changer d'unité).*

DEUXIEME SEANCE

Sur feuille quadrillée, les groupes précédents reçoivent le dessin d'un polygone (trois sortes de polygones, une forme assez simple pour le CM_1, pour le CM_2 on propose l'étoile du groupe 3 et le polygone numéro 2 du groupe 4).

Question posée : **Essaye de trouver une ou plusieurs unités telles que l'aire ait pour mesure un nombre entier. Compare les nombres trouvés.**

(Etude motivée par les remarques de la séance précédente).
On reforme les mêmes groupes d'élèves ; on aura encore le même genre de réaction.

Groupe 1 — (CM_1)

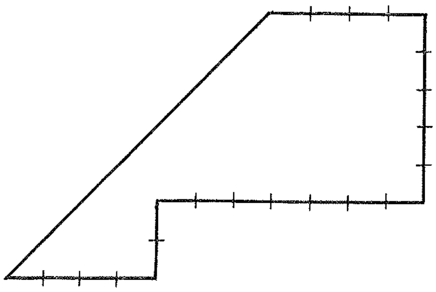


Figure proposée.
Recherche en groupe : on prend comme unité  le demi-carreau, mais il y a beaucoup de désordre dans le dénombrement.
Je lis $74\frac{1}{2}$.
— Où est le demi ?
— C'est celui du coin.
— Ah, on s'est trompé, on a compté des triangles et des carreaux (on gomme le $\frac{1}{2}$ et on reste à 74 sans vérifier).

Compte-rendu oral :

«Voici notre dessin, on l'a agrandi quatre fois» (le groupe a reproduit le dessin en doublant les dimensions).

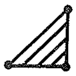
— Quatre fois ? tu m'étonnes ! deux fois seulement ?

— Daniel ne sait pas répondre.

— Cela dépend ce que tu agrandis ! (CM_2).

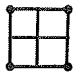
— Pourquoi l'avez-vous agrandi ?

— Parce qu'on en avait envie.

On revient à l'aire.
Pour le premier on a pris comme unité  on a trouvé 74, dans le second on a pris la même unité on a trouvé 306 parce que 306 = 74 X 4 (?).

— 74 X 4 ça ne fait pas 306 !

— Ils ont agrandi deux fois et ils multiplient l'aire par 4 ?

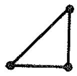
Un élève du groupe sait justifier : «dans  chaque coté est multiplié par 2 mais il y a 4 carrés, l'aire est multiplié par 4» (pendant le travail de groupe l'erreur avait été faite, sans aucune vérification on avait donné 74 X 2 pour l'aire du second domaine).

— «Ils n'ont pas fait ce que l'on demandait de faire ! il fallait prendre une autre unité ; eux ils ont changé de figure et gardé la même unité».

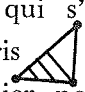
On retrouve les erreurs de la première séance : notion d'unité mal «assise» (on dénombre sans s'assurer des grandeurs associées) ; peu de méthode ; peu de vérifications.

Groupe 2 — (CM_1)

Même figure.
On suit la question posée - pour changer d'unité : on reproduit le polygone (mêmes dimensions) et on pave avec l'autre unité choisie.

— «On a pris comme unité du carreau  on a trouvé 77 petits triangles.

La classe réagit : «Si c'est la même figure, vous auriez dû trouver pareil ! il y a un groupe qui s'est trompé».

— «Après on a pris  on a trouvé 154, c'est à dire le double du premier nombre».

— Oui, **l'unité est divisée par 2 alors le nombre d'unités a doublé.**

— CM_2 : c'est inversement proportionnel.
— «Après on a encore pris la moitié △ , et on a multiplié le nombre par 2.

On a résumé dans un tableau. (On précise, pour la ligne du haut que c'est l'aire du triangle dessiné qui est divisée par 2).

: 2   : 2

unité	△	△	△
aire	77	154	308

× 2   × 2

× 4

— On aurait pu continuer jusqu'à l'infini en coupant toujours en 2 ou en 4, (les nombres mesurant l'aire auraient été multipliés par 2 ou par 4).

Ici, on trouve beaucoup plus de méthode, le problème reste simple mais est compris (on trace effectivement le réseau d'unités mais on en calcule le nombre par rapport au précédent on ne dénombre pas).

Groupe 3 — (CM_1 et CM_2)

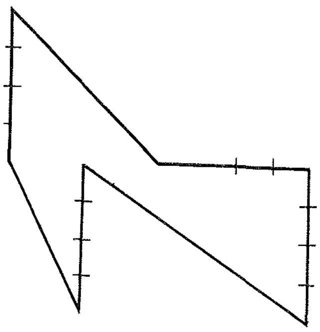


Figure proposée par le groupe 4 de la séance précédente. Recherche en groupe : on essaye beaucoup de directions pour essayer de recouvrir ce domaine, les droites à 45° laissent de petits triangles.
— «Peut-on laisser ces triangles ? il reste des petits bouts».
— Si tu les laisses, crois-tu obtenir la mesure exacte ?
— Non, il faudrait «recoller ces petits bouts» mais ils ne sont pas faits pareil !

Compte-rendu oral : François montre la feuille sur laquelle toutes les lignes de construction de la recherche sont effacées et sur laquelle une seule phrase est écrite.

— Il n'y a pas grand-chose sur votre feuille !
— On n'a pas trouvé de solution pour tout recouvrir ; il restait toujours des petits bouts ; ou alors les triangles n'étaient pas les mêmes alors on a dit que l'aire était 1 en prenant notre figure comme unité.

Ce groupe avait effectivement cherché plusieurs unités possibles et commençait à se décourager quand l'un d'eux a eu l'idée lumineuse : et si on prenait la figure entière ? on avait alors répondu à la question du maître (la mesure est un entier) et on cessait alors toute recherche, satisfait de cette ingénieuse solution... à laquelle il suffisait de penser au lieu de se fatiguer ! et si l'on n'avait pas demandé plusieurs solutions, beaucoup en seraient restés là.

Groupe 4 – (CM_2)

Même figure.

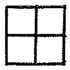
La démarche suivie pendant la recherche est bien décrite oralement :

– «On a cherché à recouvrir par des petits carreaux, par des demi-carreaux, d'autres triangles... on ne trouvait pas, alors on a pris le double-décimètre et on a calculé l'aire (il y avait 3 triangles), on a trouvé 6 cm^2, c'est un entier.

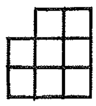
Ensuite on a trouvé que 1 cm^2 c'était 4 petits carreaux, alors on a essayé de recouvrir avec des carreaux ; ça devait faire 24 petits carreaux ou 6 grands.

et on a trouvé :  que, en déplaçant des parties on pouvait refaire des carreaux entiers. On a retrouvé nos 6 grands carreaux.

d'où

unité					...
aire	6	24	48	96	...

On fait les remarques précédentes sur les nombres obtenus.

On a aussi multiplié l'unité par deux, en disposant comme cela : 

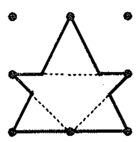
– Ca tombe juste avec des unités comme ça ?

– Oui, en raccordant tous les morceaux.

Dans ce groupe, on a donc utilisé les connaissances (formule *donnant l'aire d'un triangle*) pour redécouvrir *que le triangle rectangle provenait d'un rectangle !* *Une fois* assuré de l'existence d'un entier *répondant à la question, alors on a trouvé autant d'unités que l'on voulait pour trouver d'autres entiers.*

(La dernière fois déjà, on connaissait les encadrements, alors on avait encadré).

Groupe 5 – (CM_2)



(Figure proposée par le groupe 3 de la séance précédente et étant à l'origine de la question posée aujourd'hui).

La feuille présentée est couverte de quadrillages, de triangles. On a joint tout ce que l'on a pu dans cette étoile et on aurait aimé qu'elle présente plus d'axes de symétries. (Toutes les diagonales sont tracées et on aurait voulu démontrer l'équivalence des triangles ainsi formés).

Compte-rendu oral : «On a essayé de remplir la figure avec des unités. Si on avait eu 6 pointes, on y serait peut être arrivé !

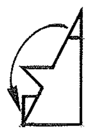
– Mais les côtés ne sont pas penchés pareil !

– Oui, alors ça ne va pas.

– On a essayé beaucoup de carreaux, de triangles ... on n'a pas trouvé, alors on a dit que si on prenait comme unité la figure entière, l'aire était 1 ; si on prenait comme unité la moitié de la figure, l'aire était 2.

Dans ce groupe, on aurait voulu transformer la figure pour que ça marche. Ils voudraient que les diagonales soient toutes axes de symétries pour avoir les mêmes triangles... Comme dans la séance précédente on part de la réponse et on cherche ce que doit être la figure pour que l'on puisse répondre ; mais on n'obtient pas celle qui est donnée.

Groupe 6 – (CM_2)



Même figure que le groupe 5.
On utilise d'emblée la symétrie.
– «D'abord on a pris comme unité la demi-étoile ; alors l'aire est 2.
– «Puis on a essayé de changer la forme de l'unité.
On a coupé un petit bout en haut ; on peut le remettre en bas, l'aire est toujours 2 (mais est calculée).
On aurait pu encore continuer : la forme de l'unité change, mais l'aire est toujours la même.
– Ensuite on a agrandi la figure deux fois, on n'a rien obtenu (on essayait de remettre des triangles ensemble pour faire des carreaux).

Alors on a essayé en agrandissant trois fois : le creux de l'étoile est tombé juste.

On a remarqué alors que les carreaux non terminés se complétaient deux par deux ; ils se complètent tous et on a trouvé comme cela un nombre entier, on a trouvé 312.

(Le temps manquant, on n'a pas cherché à revenir à la figure initiale).

Comme dans la première séance, après l'observation directe, on a essayé le raisonnement et le calcul (en reformant des unités).
Mais de même, on n'a pas parlé de demi-unité... on a effectivement indiqué les triangles qui se complétaient pour former un nombre entier de carreaux.

CONCLUSION

On retrouve donc à travers ces deux séances les réactions diverses.

Les plus jeunes	manquent de rigueur souvent, **mesurent en reportant un nombre entier de fois l'unité.**
Ceux du CM_2	**raisonnent davantage** ; acceptent de fractionner l'unité pour «refaire des unités entières (conservations par déplacement) calculent ; modifient les données ; cherchent d'autres conditions.

Devant des réactions si diverses, il semble alors bien difficile de faire comprendre ces notions à tout le monde en même temps, et il semble difficile de calculer des aires avant le CM_2.