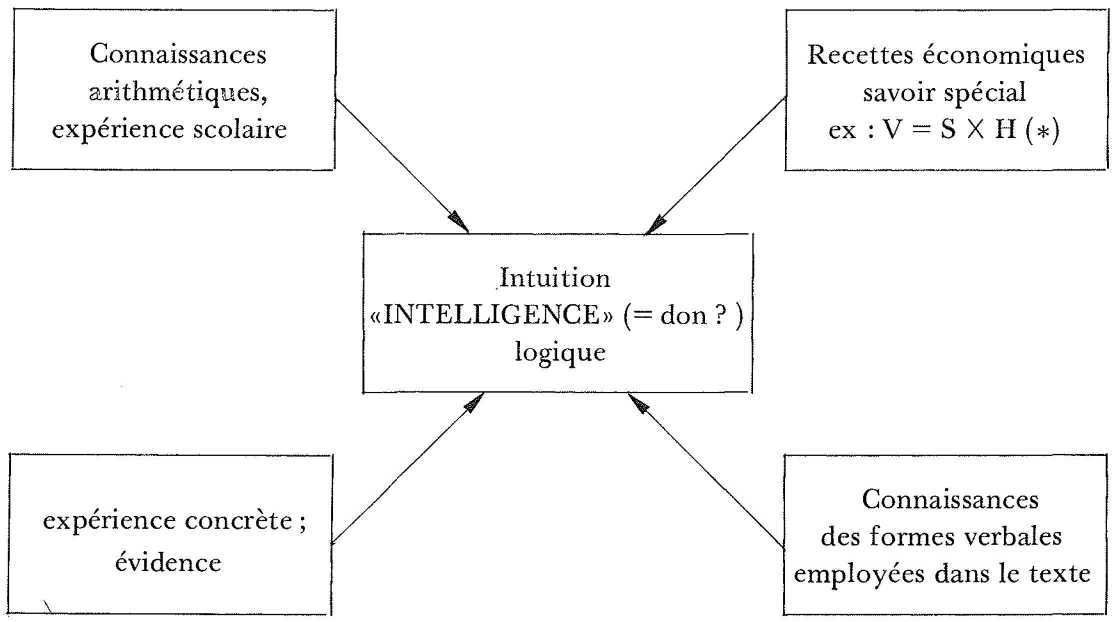
LES PROBLEMES, ELEMENT DE L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE AU CM

par M. RYCKBOSCH, IDEN, 91 Savigny sur Orge

1) Les fonctions éducatives des problèmes.
2) Typologie des problèmes.
3) Présentation des problèmes.
4) Orientations nouvelles.

I – FONCTIONS ASSUMEES PAR LA RESOLUTION DES PROBLEMES A L'ECOLE.

a) **Théoriquement**, rôle éducatif de premier plan ; le problème est au confluent d'apports variés et essentiels ; il met en œuvre des fonctions intellectuelles supérieures, catalysées par ce qui est considéré, au-delà de tous les apprentissages et toutes les ruses pédagogiques, comme un don plus ou moins développé chez les enfants.



(*) Volume = Surface X hauteur (formule mnémotechnique).

b) Dans la **vie pratique** de l'institution scolaire :

– le problème est un exercice de **synthèse**, de **révision** ;

– par là, il devient un moyen aisé de **contrôle** global des connaissances et des aptitudes.

Dans la perspective traditionnelle, par l'inévitable «perversion» pédagogique qui incite à confondre épreuve et but, le problème fait l'objet d'une préparation spéciale, sous forme de problèmes-types, étude successive de toutes les situations problématiques débouchant sur une série de procédés, de «clés».

c) Placé au couronnement de l'édifice du calcul traditionnel, le problème ne peut échapper aux conséquences de la réforme profonde que nous voulons mettre en place.

Doit-il disparaître ?

Et s'il subsiste, ne devons nous pas analyser soigneusement ses structures pour éviter qu'il ne renaisse intact, réintroduisant subrepticement des pratiques contraires à l'esprit même de la réforme ?

II – ESSAI DE CLASSIFICATION DES TYPES DE PROBLEMES.

1) Synthèse linéaire.

Directe : type «facture»

a) simple : A, B, C, D, $\longrightarrow \boxed{?}$

on achète tel article coûtant A, tel autre coûtant B, tel autre coûtant C, tel autre coûtant D. Prix total.

b) «ramifiée»

$$\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 & \longrightarrow & A \\ b_2 + b_2 & \longrightarrow & B \qquad A,\ B,\ C \longrightarrow \boxed{?} \\ c_1 + c_2 & \longrightarrow & C \end{array}$$

On achète à :
la quincaillerie a_1 et a_2,
au menuisier b_1 et b_2,
au couvreur c_1 et c_2.
Combien coûte
la réfection du garage ?

Récurrente :

On connaît le total,
et trois prix.
Quel est le quatrième ?

$$A, \boxed{?}, C, D \longrightarrow E$$

E est le résultat d'une opération portant sur 4 nombres, on ignore l'un deux; le moment essentiel se place dans la prise de conscience de l'équivalence :

$$A + x + C + D = E$$
$$x = E - (A + C + D).$$

Complication : facture «tachée», incomplète.

A	B		D	E
F		H	I	
K	L	M		O
P	Q	R	S	T

Type achevé : le «tableau magique» où dans tous les cas (rangs, colonnes, diagonales) les nombres doivent former une somme égale à un nombre donné.

Conséquences pédagogiques :

La technique du remplacement étant à la base, multiplier les exercices y conduisant. C'est en fait une initiation à **l'algèbre**, ébauchée dès le moment où au C.P., on propose des opérations incomplètes : $7 + . = 11$.

C'est une «conduite de détour» (cf. psychologie animale), ne pas s'arrêter à l'obstacle, revenir, chercher une autre issue ; admettre **provisoirement** un hiatus dans l'enchaînement logique.

2) Substitution.

«Un jardin rectangulaire a un périmètre de 152 m. La longueur est le triple de la largeur. Dimension ? ».

Il faut admettre **l'équivalence** entre deux données que la pratique antérieure fait vigoureusement **distinguer** : $L = 3\ell$; $L + \ell = 4\ell$; $\frac{1}{2}p = 4\ell$, etc...

Autres types voisins : nombre de pattes ou d'yeux du troupeau (**).

On retrouve le rôle essentiel de **l'algèbre** qui permet, pendant un temps très court à l'école élémentaire, d'employer les techniques opératoires sur d'autres êtres que des nombres. Intérêt des exercices «qualitatifs» faits depuis le C.P. (couleur, longueur, etc...).

3) Proportionnalité.

Certainement la «conquête» la plus importante, dans ce domaine, réalisée par le nouveau programme. Se reporter aux commentaires officiels très explicites ; consacrer à cet aspect essentiel le maximum de temps et de soin. Normaliser la présentation des tableaux en utilisant exclusivement celle des I.0 (p. 19 et suivantes).

4) Problèmes supposant l'introduction de techniques spéciales.

– Intervalles (1 objet à chaque extrémité...).

– Calcul d'une date (1er janvier + x jours, déduire les dimanches, etc...).

– Volumes, surfaces...

Il s'agit en somme de fournir les moyens **d'une économie de pensée** ou d'éviter les pièges découlant d'une observation superficielle des données. L'emploi des «formules» donnant lieu à tant d'abus, il y a lieu de n'y recourir qu'après une étude suffisamment prolongée de cas concrets qui feront de la formule la cristallisation **réelle** d'observations individuelles. A noter que les «intervalles» sont du domaine topologique.

5) Graphiques.

a) Sous forme de diagrammes de Venn, permettant de «manipuler» les données au plan des ensembles avant de réaliser les opérations dans les «étiquettes» - cardinaux ;

(**) Vieux problème arithmético - humoristique où, connaissant le nombre d'yeux, on déduit le nombre d'animaux ; selon qu'il s'agit d'oies ou de veaux ... etc... Des variantes «modernes» existent toujours (roues de véhicules...).

c'est un excellent moyen d'interposer entre les données verbales et les opérations un relais précieux. Il repose sur l'évidence visuelle (on voit «ce qui manque», dans quel ensemble telle partie est incluse, etc...).

Bien faire attention que le nouveau programme n'introduit aucun signe de l'algèbre de Boole (∩, ∪, etc...). Ne les utiliser que si vous êtes assurés que le moment est venu avec vos élèves d'éviter une longue phrase, mais que l'opération, elle, est parfaitement comprise.

Exploiter à fond les possibilités du diagramme sans données à partir duquel les élèves ont à **inventer un problème** cohérent. Exercice très fructueux, permettant de débloquer certains élèves.

b) Graphique sur quadrillage. Possibilités intéressantes ; voir courrier de la Recherche Pédagogique numéro 33 (SEVPEN) article de Mme Touyarot, p. 17 et suivantes.

6) Formes insolites.

a) Le problème-fleuve, ou à épisodes. En fait, véritable thème à exploiter pour plusieurs séances. Voir Touyarot CM2, T1, p. 14 numéro 9 (possibilités de formules différentes de voyage organisé).

b) Le problème-programmé : cf. Touyarot, CM2, T1, p. 42 numéro 5, p. 43 numéro 8 (un monte-charge peut-il fonctionner).

c) Le problème-équation : introduction explicite de l'algèbre, avec notation classique de l'inconnue. Compte-tenu des remarques précédentes, il semble bien qu'il faut avancer nettement dans cette voie. Cf. Toyarot, CM2, T1, p. 98 et suivantes

III – PRESENTATION DES PROBLEMES ; QUESTIONS DE FORME.

1) Les données.

a) Les pseudo-problèmes.

Ceux où les difficultés sont d'ordre linguistique et surtout de **référentiel.** Ils décrivent une situation mal connue des élèves, et obligent à interpréter des termes au sens technique très précis.

Exemple type : Les problèmes d'achat, de vente, de perte, de bénéfice. On s'aperçoit qu'une ou deux séances de **disciplines d'éveil** (enquêtes simples chez les commerçants, explication du circuit commercial simplifié, etc...) seraient plus adaptées à l'étude de ces questions.

Pour faire ensuite la liaison, des «problèmes sans nombres» devraient s'interposer (un marchand a acheté des œufs. Certains se brisent. Il veut cependant faire du bénéfice... etc...), avant d'aborder quelques problèmes classiques sur ce thème. Car finalement, on s'aperçoit qu'il n'y a aucune difficulté d'ordre **arithmétique** dans ce domaine.

b) **Les mots inducteurs.**

De leur compréhension dépend directement le choix du type d'opération.

Exemple : Touyarot, p. 56, production de coton dans différents états. Dans «la quantité totale de coton importé» ... «la production du *continent*...» il est évident que le mot *«totale»* est essentiel, il sera sans doute bien interprété. Mais si l'élève ne met pas clairement sous le mot *«continent»* son équivalent (*réunion* d'états situés sur le continent), il va hésiter.

Dans «**combien devra-t-il** revendre un œuf pour gagner 15% *sur* le prix de revient ? » le rôle de la préposition est capital. Il a des risques d'être mal compris.

c) **Les énoncés gigognes.**

Il faut «déboiter» successivement plusieurs niveaux de langage pour atteindre la réalité mathématique cachée.

— soit que les données soient accumulées en tête d'énoncé, un tri étant nécessaire à postériori pour répondre à chaque question :
«Un commerçant achète un millier d'œufs à raison de 15 F la caisse de 100 œufs. Le transport coûte 25 F. Pendant le trajet 3% des œufs sont cassés. Il veut faire 17 F de bénéfice».
Combien d'œufs reste-t-il à vendre ? etc...

— soit qu'une question en condense deux ou plus : «les frais de trar port s'élèvent à 2,50 F par caisse de 12 douzaines. Prix de revient total ?

Soit que certains mots recouvrent une équivalence arithmétique : «durée hebdomadaire» (= X 7,... «le triple»..., «le quart»...).

En eux-mêmes, ces types d'énoncés peuvent provoquer chez l'élève un niveau supérieur de réflexion ; mais il faut familiariser l'enfant avec cette recherche préalable de la compréhension et de la distribution des données. Et bannir tout énoncé qui se couperait par trop du déroulement réel des actes décrits : «un touriste décide de prendre 20 jours de vacances au bord de la mer. Il prend en moyenne 12 photos par jour. Combien de jours de vacances lui restera-t-il lorsqu'il aura utilisé 5 pellicules de 36 vues ? (L'univers Mathématique).

2) **La solution.**

a) Tout ce qui précède montre assez les difficultés auxquelles on se heurte lorsqu'on veut **énoncer** un problème. On admettra donc que l'effort symétrique demandé à l'élève lorsqu'on veut lui faire justifier par des «solutions» la démarche mathématique qu'il a souvent trouvée par tâtonnement, est souvent disproportionnée à ses efforts. D'autant que la restitution forme interrogative ⟶ forme affirmative est encore mal dominée ; d'où les célèbres «combien y-a-t-il de...» entraînant les «il y a de».

b) D'autre part, le souci de «l'unité» affectant un nombre a toujours posé des difficultés inextricables. Le diviseur est-il un nombre abstrait ? Un rapport ? D'où les contorsions des I.0 de 1945 :

«2,975 : 0,790»
(kg) (kg par ℓ).

c) Il faut trancher ce nœud gordien.

Le travail de l'élève comportera en principe :

1) Le schéma explicatif : diagramme ou tableau de proportionnalité ou croquis du périmètre, etc...

2) Des lignes d'opérations **affectant des nombres sans unités.**

3) Pour chaque question posée, une réponse complète intégrant le résultat dans une forme de français acceptable : «le crémier vendra 48 boîtes d'œufs».

IV – ORIENTATIONS NOUVELLES.

1) Compte tenu de la diversité des nouvelles tâches, du rôle important tenu par les manipulations, les études graphiques, etc..., le temps imparti aux «problèmes» traditionnels va se trouver limité. Si l'étude du nouveau programme est conçue de façon à accroître les possibilités **d'analyse**, de recherche de **structures** identiques sous des situations très diverses (jouer aux 4 coins, faire pivoter une figure géométrique, distribuer des bonbons...), de **formalisation** (algèbre, programmes), on n'a pas à regretter ce déclin relatif.

2) On aura noté les formes nouvelles (problèmes sans nombres, nombres sans problème explicite, problèmes «ouverts», etc...) qui doivent permettre d'exercer de façon moins stéréotypée des facultés dont l'importance subsiste.

3) Il devient évident qu'une part non négligeable des tâches éducatives assumées par le problème se trouve transférée dans les disciplines d'éveil (étude de situations) et dans l'enseignement du français (réponses, solutions).

4) Il reste que le problème permet :

– L'analyse et le classement d'informations données.

– L'établissement de relations entre ces données.

– La mise en évidence d'un chaînon manquant.

– Le codage en termes mathématiques des relations trouvées, afin de restituer le renseignement qui fait défaut.

– Le décodage des résultats obtenus.

C'est donc toujours un instrument de synthèse précieux et il doit garder, au CM2 notamment, une place très importante dans les activités hebdomadaires.