LA NUMERATION :
ASPECTS HISTORIQUES ET CULTURELS

par Monique GERENTE

I – APPARIEMENT et RECENSEMENT.

Les animaux supérieurs, les hommes primitifs ou sauvages, les très jeunes enfants ne sont pas complètement étrangers au nombre. Ils ont une certaine perception directe de la pluralité qui se ramène le plus souvent à la vision globale de l'espace occupé par un ensemble d'objets.

A la suite d'une longue évolution, l'homme a fini par se rendre maître de deux techniques :

– **L'appariement** (encore appelé correspondance biunivoque ou correspondance terme à terme) qui mène à la notion de nombre cardinal.

– **Le recensement** (encore appelé dénombrement ou comptage) qui mène à la notion de nombre ordinal.

Le recensement est une opération compliquée qui nécessite non seulement la technique de l'appariement mais le choix d'un étalon, en l'occurrence la suite des nombres entiers, appelée ensemble des nombres naturels.

Ceci explique que la première technique utilisée par l'homme ait été celle de l'appariement. En voici un exemple, extrait de «Activités mathématiques I» de Nicole Picard.

«Pour savoir si aucun de ses moutons n'était perdu dans la montagne ou n'avait été dévoré par un animal sauvage, le pasteur mettait une pierre pour chaque mouton sortant de l'enclos au petit matin. Le tas de pierres *représentait* l'effectif de son troupeau. Le soir, il enlevait du tas une pierre pour chaque mouton rentrant dans l'enclos. Il savait qu'il devait retourner dans la montagne chercher les égarés lorsqu'il restait des pierres au tas, une fois le troupeau rentré dans l'enclos.

Représenter un mouton par une pierre était déjà le fait d'une pensée symbolique.

Les premiers signes écrits traduisant cette pensée ont sans doute été des encoches sur un bâton. Les encoches pouvaient représenter aussi bien des chèvres, des moutons, des chameaux, des outres, des tentes ou les jours écoulés depuis la dernière livraison».

L'appariement nous permet de savoir si deux ensembles ont autant d'éléments l'un que l'autre ou non. Il en découle la notion de nombre naturel (voir IN numéro 4, page 59. Numération au C.P.). Encore faut-il savoir passer d'un nombre quelconque à son suivant, c'est-à-dire ordonner les nombres, ce que nous fournit le recensement.

II – SYSTEMES DE NUMERATION.

2.1 Comment l'idée en est-elle née ?

Les peuples primitifs ont matérialisé les nombres par des encoches sur une branche d'arbre, par des traits sur une pierre plate, par des nœuds sur une corde ou encore par la constitution de rangées de cailloux. Notre mot «calcul» vient d'ailleurs du mot latin «calculus» qui signifie caillou.

Une étape fut franchie lorsque l'on eut l'idée de grouper les encoches, en général par cinq, dix ou vingt à cause du nombre de nos doigts.

Tous ces procédés demandent, pour chaque nombre, un mot pour le nommer et un signe pour l'écrire. C'est sans doute pour éviter une telle profusion de signes et de nombres que l'idée est venue de donner un nom à un paquet d'unités, dix dans la majorité des cas, vingt pour les Mayas du Mexique, les Celtes, et les Gaulois.

On retrouve trace du système à base vingt dans le nom de certains nombres en français : onze, douze, ..., seize au lieu de dix un, dix deux, ..., dix six d'une part, quatre vingt d'autre part, ainsi que dans le rapport du shilling à la livre (20 shillings pour une livre) dans l'ancien système monétaire anglais.

2.2 Les systèmes de numération non positionnelle.

2.2.1 Système égyptien.

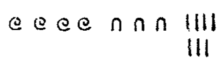
Les égyptiens employaient un signe pour les unités, un pour les dizaines, un pour les centaines, etc... On est donc en présence d'un système de numération en base dix.
Voici les différents symboles utilisés.

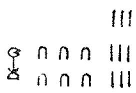
Égypte

cardinal	symbole
un	
dix	
cent	
mille	
dix mille	
cent mille	
un million	

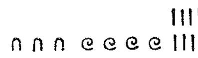
Le nombre d'unités de chaque ordre est indiqué par répétition. Pour en faciliter la lecture, on groupe les signes suivant des configurations :

1	2	3	4	5	6	7	8	9

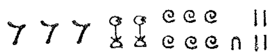
Voici l'écriture de 437 : 

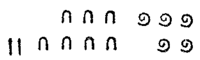
celle de 1069 : 

Le principe utilisé est celui de la juxtaposition. Remarquons que la position des signes n'importe pas puisque le signe est différent pour chaque ordre d'unité.

437 pourrait tout aussi bien être écrit : 
ou même :  . C'est pour une raison de commodité de lecture et de comparaison des nombres que les ordres successifs sont indiqués soit de gauche à droite, soit de droite à gauche (dans ce cas les symboles sont tournés dans l'autre sens).

Ecrivez, avec ce système : 1382 ; 240712, etc...

Quels sont ces nombres ? 



2.2.2 *Système romain.*

Les romains utilisaient un système analogue mais s'appuyant à la fois sur la base dix et certains multiples de cinq, ceux de la forme : 5×10^n.

un	cinq	dix	cinquante	cent	cinq cents	mille
I	V	X	L	C	D	M

Pour faciliter la lecture, l'écriture des nombres se fait de gauche à droite en commençant par les ordres les plus grands. Une autre convention est apparue ensuite afin de réduire la longueur des écritures :

VI signifie $5 + 1$
IV signifie $5 - 1$
XL signifie $50 - 10$
etc...

Ce système est plus économique que celui des égyptiens quant au nombre de signes à écrire.

2.2.3 Système grec (à partir du IIème siècle avant J.C.).

Le système grec qui employait vingt sept lettres d'alphabet (accentuées pour les différencier de celles qui servent à écrire les mots) permettait de raccourcir l'écriture des nombres. En effet ici, un seul symbole par ordre d'unité suffit.

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf
α'	β'	γ'	δ'	ϵ'	ς'	ζ'	η'	θ'

dix	vingt	trente	quarante	cinquante	soixante	soixante dix	quatre vingt	quatre vingt dix
ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	o'	π'	ϙ′

cent	deux cent	trois cent	quatre cent	cinq cent	six cent	sept cent	huit cent	neuf cent
ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ƛ′

Pour indiquer les unités de mille, on fait précéder le symbole des unités simples par le signe : , . Le nombre des dizaines de mille est suivi par : M′.

Voici, par exemple, l'écriture des nombres : 437 et 35712

437 : $\upsilon'\lambda'\zeta'$ 35712 : $\lambda'M',\alpha'\psi'\iota'\beta'$.

Ecrivez de même : 1069 ; 431148.

Quels sont ces nombres : $\chi'\mu'M'\sigma'\gamma'\eta'$; $o'M',\theta'\pi'\delta'$?

2.3.4 Système hébreux.

Les hébreux employaient également l'alphabet mais ne distinguaient pas le signe représentant un et le signe représentant mille. C'était au lecteur à rétablir l'ordre de grandeur.

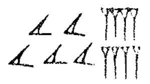
2.3 Les systèmes de numération positionnelle.

2.3.1 Système mésopotamien.

En fait, il s'agit de deux systèmes utilisés conjointement : un système pratique, pour les calculs de la vie courante sur des nombres pas trop grands, et un système plus compliqué utilisé par les savants, en particulier les astronomes.

Le premier était un système décimal qui procédait par juxtaposition (donc non positionnel) et utilisait deux sortes de signes : le clou vertical pour les unités  , le chevron pour les dizaines  .

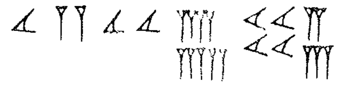
Par exemple, le nombre cinquante huit s'écrit :



Le second était un système de position à base soixante (ou sexagésimal). Suivant leur place, les symboles ont des valeurs différentes. Ainsi, dans notre système décimal, 295 signifie $(2 \times 10^2) + (9 \times 10) + 5$; dans le système sexagésimal, 295 représente le nombre qui s'écrit dans le système décimal $(2 \times 60^2) + (9 \times 60) + 5$, soit 7745.

Si l'on exclut le zéro dont il n'était pas encore question à l'époque (un espace symbolisait l'absence de chiffre d'un ordre donné), il faut neuf signes différents pour écrire les nombres dans le système décimal. De même, il faudrait cinquante neuf signes différents pour les écrire dans le système sexagésimal. Pour tourner cette difficulté, les mésapotamiens écrivaient les nombres jusqu'à cinquante neuf dans le système pratique décrit précédemment.

Ainsi, le nombre qui représente $(12 \times 60^2) + (29 \times 60) + 45$ (que nous pourrions symboliser par : 12 - 29 - 45) s'écrit :



Ce système conjugue donc les bases soixante et dix et les principes de juxtaposition et de position. Cependant il ne tient pas compte de l'ordre de grandeur des nombres. L'assemblage précédent (12 - 29 - 45) peut aussi signifier :

$(12 \times 60^3) + (29 \times 60^2) + (45 \times 60)$

ou

$(12 \times 60) + 29 + (45 \times \frac{1}{60})$.

Malgré ses inconvénients, ce système, déjà utilisé au XVIIème siècle avant J.C. constitue un pas en avant et a permis aux babylonniens de faire de grands progrès dans la science des astres.

Le système survit d'ailleurs encore dans la mesure des arcs et des angles en degrés, minutes et secondes, et dans la mesure du temps.

2.3.2 Système chinois.

Plusieurs siècles avant notre ère, les chinois inventèrent un système de numération à base dix où la position des symboles importait. Ainsi le nombre quatre cent sept mille huit cent trente quatre s'écrivait à peu près comme ceci.

4c 7m 8c 3d 4.

III – VERS L'INVENTION DU ZERO.

Dans les systèmes de numération non positionnelle, on n'a nul besoin du zéro.

Dans le système savant mésopotamien, on laissait un espace pour indiquer qu'il n'y avait pas d'unités d'un certain ordre. Puis, vers le IIème siècle avant notre ère, apparut un signe spécial : deux clous inclinés.

Vers le Vème siècle avant notre ère, les hindoux se débarassèrent des lettres qu'ils utilisaient pour les nombres supérieurs à dix et standardisèrent les chiffres de 1 à 9.

A peu près à la même époque, un hindou dont l'histoire n'a pas conservé le nom, imagina un caractère spécial, maintenant appelé «zéro», pour marquer l'absence d'unités d'un certain ordre.

Dans le système chinois, le nombre quatre cent sept mille huit cent trente quatre devint : 4c 0d 7m 8c 3d 4. Les lettres étaient alors inutiles, d'où l'écriture 407834, et tous les nombres s'expriment dès lors avec dix signes différents.

Le système décimal est né.

IV – EVOLUTION CHRONOLOGIQUE.

Il nous est difficile de concevoir l'importance du **principe de position** tellement il nous est devenu familier. Cependant, l'humanité n'en prit conscience que de nombreux millénaires après les débuts de la pensée mathématique.

Ce n'est que vers le VIIème siècle que les arabes comprirent toute la portée de ce principe dont ils avaient eu connaissance au cours de leurs conquêtes. Ils perfectionnèrent l'abaque (ou boulier) et la numération indienne utilisant les neuf chiffres et le zéro.

Pendant ce temps, l'Occident vivotait dans un véritable désert scientifique. Il en sortit peu à peu, grâce au contact avec les musulmans, en Orient pendant les Croisades, en Sicile à la cour de l'empereur Frédéric II et surtout en Espagne où, pendant plusieurs siècles, la frontière entre royaumes maures et royaumes catholiques fut très fluctuante et perméable.

C'est ainsi qu'un moine auvergnat, Gerbert d'Aurillac, s'initia aux chiffres arabes, lors de son voyage à Cordoue (980). Devenu plus tard le pape Sylvestre II, il put donner un grand retentissement à ces idées.

La forme des chiffres, dits arabes, n'a été définitivement fixée qu'après l'invention de l'imprimerie (1440).

Ce n'est que vers la fin du Moyen Age que le calcul sur les écritures des nombres a remplacé l'emploi du boulier.

EN GUISE DE CONCLUSION.

La diffusion du calcul fut incroyablement lente : il y a seulement cinq siècles, compter sur ses doigts était le seul bagage de l'homme de culture moyenne, et les secrets du boulier n'étaient accessibles qu'aux calculateurs professionnels. Seuls quelques mathématiciens exercés pouvaient, au bout de plusieurs jours, fournir le résultat d'une division !

Il a fallu de patients efforts pendant des siècles, voire des millénaires, pour que la science connaisse l'essor qui est le sien depuis le XVIIème siècle.

REFERENCES.

- «Histoire des mathématiques» Marcel Boll
  (Collection «Que sais-je» PUF).
- «Activités mathématiques I» Nicole Picard
  (O.C.D.L.).
- «Mathématiques 5ème» (Lectures historiques). Queysanne - Revuz
  (Nathan).
- «Les mathématiques» Time Life
  Bordas Encyclopédie.