LES VERIFICATIONS DANS LES EQUATIONS, INEQUATIONS ET EN CALCUL LITTERAL

Franck CHALANCON
Professeur de mathématiques
Sylvie COPPE
Professeure de mathématiques, IUFM de Lyon
Nicolas PASCAL
Professeur de mathématiques

Résumé : Dans cet article nous avons souhaité étudier comment les processus de vérification étaient pris en compte dans l'enseignement en classe de $4^{\text{ième}}$ et de 2^{nde} en ce qui concerne le calcul littéral et les équations/inéquations. Pour cela nous avons étudié les programmes, les manuels et les processus utilisés par les élèves. Nous avons montré comment les processus de vérification étaient liés à la compréhension des notions en jeu et devaient donc être travaillé de façon dialectique.

Cet article est fait à la suite d'un mémoire de PLC2 soutenu à Lyon (F. Chalançon et N. Pascal 1999). Notre première idée a été de travailler sur les processus de vérification. En effet, lors de recherches d'exercices en classe, nous avons souvent été confrontés à la question : “ C'est juste, c'est juste ? ” et nous avons constaté que de nombreux élèves demandaient au professeur de valider leur résultat alors que bien souvent, nous pensons qu'ils ont la possibilité de le faire eux-mêmes. De plus, nous avons constaté que les élèves fournissent parfois des réponses aberrantes à des problèmes concrets, par exemple un âge négatif sans que cela ne semble les déranger.

Pour expliquer ce phénomène, dans un premier temps, nous pouvons penser que durant leur scolarité, les élèves n'ont pas été habitués à s'assurer de l'exactitude de leur résultat à l'aide de processus de vérification. De leur point de vue, c'est le rôle du professeur de noter, de corriger, de valider. Les élèves pensent que leur rôle se limite à apporter un résultat et non à dire s'il est juste ou faux. Ceci a déjà été analysé en termes de contrat didactique (Y. Chevallard 1988, G. Brousseau 1986).

De plus, on peut penser que les élèves qui ont eu des difficultés à obtenir un résultat hésitent à prendre le risque de le remettre en cause. Enfin le temps consacré à une vérification peut être pénalisant pour les élèves, notamment lors de devoirs en temps limité.

Une première idée a donc été de travailler sur les vérifications en tant que telles : inciter les élèves par le discours ou par des actes à contrôler ce qu'ils font, leur donner des techniques de vérification.

Rapidement, nous nous sommes rendu compte que ces explications proposées ci-dessus étaient éclairantes, mais n'étaient pas suffisantes. En effet, pour pouvoir vérifier, il faut également avoir des procédés disponibles. Ainsi, si certains élèves ne maîtrisent pas suffisamment une notion, ils auront encore plus de difficultés pour vérifier. De plus, ces processus dépendent largement de la notion en jeu. Ainsi, on ne fera les mêmes vérifications en arithmétique, algèbre, statistiques, géométrie, etc. Enfin, à un niveau donné il se peut que certains élèves n'aient pas les connaissances nécessaires. Nous avons donc été renvoyés à la question de la relation entre vérification et compréhension des notions enseignées.

Cette question, au départ naïve, nous est apparue rapidement complexe et nous avons souhaité l'approfondir en nous limitant aux équations, inéquations et au calcul littéral aux niveaux Quatrième et Seconde (d'une part, car il s'agissait de nos niveaux d'enseignement et, d'autre part, car c'est en $4^{\text{ième}}$ que les élèves apprennent à résoudre des équations de façon plus systématique).

Dans un premier temps, nous ferons une analyse théorique et dans un second, nous présenterons une partie du dispositif utilisé en classe : nous analyserons les résultats d'un test proposé à nos élèves.

I. A propos des vérifications

Nous avons utilisé les travaux de S. Coppé (1997) sur les vérifications. Elle donne la définition suivante :

> *" Dans une situation de résolution de problème, pour une question, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat. Nous appellerons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment-là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification. "*

Nous retenons de cette définition que les vérifications sont liées davantage à la vraisemblance qu'à la vérité, qu'elles peuvent se développer à partir d'un doute de l'élève à partir d'un résultat identifié et qu'elles ne débouchent pas forcément sur la rectification. Ainsi, on a vu souvent des élèves qui se rendent compte que leur résultat est faux mais qui ne savent pas le rectifier ou bien d'autres qui le laissent car "on ne sait jamais, on peut toujours avoir un demi -point".

S. Coppé (1993) développe également une typologie des vérifications dans laquelle elle distingue :

- les vérifications de type externe qui ne font pas vraiment appel à des connaissances mathématiques, mais reposent plutôt sur l'expérience de l'élève : par exemple, les solutions d'une équation doivent être des nombres simples, on fera plus confiance à un 2 qu'à un 37/128.

- les vérifications de type interne qui reposent sur des connaissances et des savoir-faire mathématiques (par exemple, remplacer la solution trouvée dans l'équation de départ).

Elle précise le caractère privé des vérifications (S. Coppé 1998) ce qui explique qu'elles n'apparaissent pas dans les copies :

> *"Nous avons également observé que des vérifications étaient faites au brouillon et très rarement recopiées sur la copie. Cela nous a amenée à définir deux composantes dans l'activité de l'élève : une composante privée dont la trace peut être le brouillon mais pas forcément puisque certains élèves n'en font jamais, et une composante publique dont la trace est la copie."*

Ceci est un point important : en effet, les professeurs pensent souvent que leurs élèves ne vérifient pas, ne font aucun contrôle sur leurs résultats. Ce n'est pas le cas, des vérifications sont faites, notamment au brouillon mais pas seulement, mais elles ne sont pas données à voir au professeur.

Enfin elle montre que l'influence de la situation dans laquelle se trouve l'élève et les enjeux qu'il projette sont des éléments déterminants pour la mise en œuvre de vérifications et qu'ils conditionnent leur nature. Par exemple, le temps se révèle être un facteur déterminant notamment dans des situations comme le devoir surveillé. L'élève se trouve alors face à des contraintes parfois contradictoires : avoir des résultats justes pour avoir une bonne note et faire tout le devoir, ce qui exclut de passer trop de temps à vérifier.

I. 1. Etude des programmes

Pour débuter nous avons cherché dans les différents programmes du collège et de la classe de 2^{nde} si les termes vérifier ou vérification apparaissaient. Notre étude montre qu'ils n'apparaissent pas de façon explicite, mais qu'on trouve d'autres termes qui peuvent, selon nous, renvoyer à ces notions.

I. 1. 1. En ce qui concerne le calcul littéral

Dans les programmes de $6^{ième}$, on indique *"fournir aux élèves aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats"* avec un exemple : *"contrôler des calculs à la machine par des calculs mentaux approchés."* Ici apparaît le terme contrôle qui bien sûr englobe les vérifications.

Dans le programme de $5^{ième}$, cet exemple est repris et il est précisé *"Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numérique données".* Nous interprétons cette injonction de deux façons : faire rencontrer aux élèves la notion de variable et les inciter à vérifier. Notons que ce deux aspects sont liés mais que c'est au professeur de montrer les liens et les différences.

Dans le programme de $4^{ième}$, on reprend la même phrase et il est stipulé que l'élève doit *"savoir tester un développement ou une factorisation d'une expression littérale par des substitutions de valeurs numériques à la variable en jeu."* Même si le terme vérifier n'est pas utilisé, nous pensons qu'il s'agit ici de faire une vérification des calculs littéraux.

Dans le programme de 2^{nde}, il est encore indiqué *"on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule".*

I. 1. 2. En ce qui concerne les équations

Dans le programme de $4^{ième}$, on précise les différentes étapes de la résolution d'un problème conduisant à une mise en équation : "mise en équation, résolution et interprétation du résultat". Nous notons que les vérifications n'apparaissent pas comme une étape de la résolution. Sont-elles contenues dans l'interprétation du résultat ? Ce n'est pas sûr, rien n'est explicité.

En conclusion, nous pouvons voir que les programmes donnent quelques injonctions à contrôler les calculs dans le cas du calcul littéral mais qu'il n'est pas fait mention d'un entraînement systématique de la part des professeurs. De plus, rien n'est précisé au niveau des équations ou inéquations. Nous pouvons penser que, soit les auteurs de programmes ne jugent pas utile de rappeler la nécessité de vérifier (ce serait un geste mathématique naturalisé), soit ils estiment que les vérifications relèvent du travail privé de chacun (professeur et élèves). D'ailleurs nous sommes bien conscients qu'il n'est certainement pas possible d'en dire plus. Ainsi, exiger que lors de chaque résolution, les élèves fassent explicitement et complètement une vérification nous semble une exigence trop grande qui risquerait de décourager certains devant des calculs qui peuvent être longs ou compliqués.

I. 2. Etude des manuels scolaires

Nous avons ensuite fait une analyse non exhaustive de manuels de $5^{ième}$, $4^{ième}$ et 2^{nde} pour voir comment les auteurs prenaient en compte les quelques injonctions du programme et si des méthodes de vérification étaient proposées. Nous avons analysé 6 manuels de $5^{ième}$, 5 manuels de $4^{ième}$ et 11 manuels de 2^{nde}.

I. 2. 1. Les manuels de $5^{ième}$

Dans cinq des six manuels, nous avons trouvé dans des chapitres différemment intitulés ("Equation et calcul", " Règles de calcul", Initiation à la résolution d'équations", etc), un paragraphe de cours portant sur " tester une égalité" ou "tester l'égalité de deux expressions littérales". Ceci correspond donc bien au libellé du programme.

Les activités qui sont montrées sont du même type. On donne deux expressions littérales A et B. On demande aux élèves de calculer ces expressions pour une valeur numérique, puis on indique : si les deux valeurs trouvées sont différentes alors $A \neq B$ et si les valeurs trouvées sont égales alors il faut développer A et B pour voir si elles sont égales ou non. Nous pensons que ce type d'activité ne relève pas vraiment des vérifications mais favorise plutôt les conjectures sur l'égalité de deux expressions. Ce point de vue est également intéressant, mais pourquoi est-il exclusif ?

I. 2. 2. Les manuels de $4^{ième}$

Dans les manuels scolaires de $4^{ième}$, dans le chapitre (ou la partie) Calcul littéral, on ne trouve pratiquement pas d'exercices où l'on teste si deux expressions sont égales en remplaçant par une valeur numérique. On trouve seulement des exercices du type : Calculer pour $x = 3$ la valeur de $A = 6x^2 - x + 8$. L'objet vu en $5^{ième}$ ne vit plus dans les manuels de $4^{ième}$.

Dans le chapitre (ou la partie) Equation, on trouve des exercices du type : 3 est-il solution de l'équation : $(2x - 3) - x = 0$?

Dans *Le nouveau Pythagore $4^{ème}$ (1998)* p.69, la stratégie de résolution d'équation est décomposée en trois temps : résolution, vérification, conclusion.

"Vérification : Remplacer x par la valeur trouvée (-8 dans l'exemple considéré) dans le premier membre puis le second. On doit trouver le même résultat pour affirmer que -8 est solution."

Dans *Triangle $4^{ième}$(1998)*, il est mentionné page 129 *"on peut vérifier le résultat en revenant à l'énoncé"* mais aucune méthode n'est donnée. Il en est de même dans *Cinq sur cinq* p. 69.

Dans *Dimathème $4^{ième}$ (1998),* pages 81, 84 et 85 on montre comment vérifier et, dans la partie exercices, cette question est reprise *" vérifier que 2 est solution ou n'est pas solution".*

Ainsi, on voit apparaître de façon isolée, à l'occasion d'un exercice, le terme vérifier. Il n'y a pas de systématisation sauf dans le manuel Dimathème. De plus dans la partie exercices, on ne reprend pas l'exigence de vérifier. Nous faisons l'hypothèse que les auteurs de manuels pensent que les élèves vont naturellement vérifier et qu'ils n'ont pas besoin d'en dire davantage. Nous savons bien que ce n'est pas le cas pour bon nombre d'élèves et notamment ceux qui sont en difficulté. Ceci dit, nous sommes bien conscients que demander une vérification systématique alourdirait énormément les écrits publics des élèves. Il y a donc là une difficulté d'enseignement qu'il ne faut pas nier.

I. 2. 3. Les manuels de 2^{nde}

Dans les manuels de 2^{nde}, on ne trouve plus de méthodes de vérifications pour les équations sauf dans un seul manuel. On peut donc penser que ce n'est plus un objet à travailler de façon publique puisque cela a déjà été fait avant.

Concernant le calcul littéral, trois manuels proposent un travail sur les contre-exemples : deux expressions littérales sont données, elles sont égales pour une valeur numérique, sont-elles toujours égales ? On retrouve donc ici les questions posées dans les manuels de $5^{ième}$.

Enfin notons que dans le manuel Triangle $3^{ième}$, livre du maître, un paragraphe est consacré à "Comment apprendre aux élèves à contrôler leurs résultats ?". Dans le livre de l'élève, un petit logo indique ce type d'activité de contrôle.

En conclusion, il semble donc que, pour la résolution d'équation, l'activité de vérification commence à être prise en compte dans les manuels, de façon timide et souvent injonctive, sans vraiment donner des procédés de vérification.

En ce qui concerne le calcul littéral, malgré les mentions dans le programme, peu d'activité sont proposées aux élèves au collège. Bien sûr, l'étude des manuels ne remplace pas l'étude de l'activité des professeurs dans leur classe, mais comme on peut penser qu'ils suivent ce que proposent les manuels de façon majoritaire, il s'agit une indication très forte.

Cette analyse conforte ce que nous pensions, à savoir que les vérifications ont un caractère particulier parmi les procédures de preuve (ce terme est pris au sens de N. Balacheff (1987) : ici pour prouver que deux expressions sont égales ou bien qu'un nombre est solution d'une équation). Elles n'apportent qu'une réduction du doute et non une certitude et elles restent du domaine privé pour les élèves mais aussi pour les professeurs. De plus, on peut penser que montrer de façon publique ou institutionnaliser un processus de vérification peut engendrer des erreurs ou des conduites non acceptables comme affirmer que deux expressions sont égales à partir d'un cas particulier. Ceci nous semble assez proche des questions qui se posent en géométrie en ce qui concerne l'utilisation du dessin dans la recherche d'une démonstration.

II. A propos des notions enseignées

Avant d'entrer de plus près dans les procédures de vérifications, nous voulons rappeler quelques points sur les notions en jeu.

Pour les élèves, résoudre une équation ou inéquation et manipuler des expressions littérales reviennent très souvent à utiliser des règles de calcul et à appliquer des techniques. Or, si ces techniques ne s'appuient pas sur des connaissances suffisamment solides, les élèves ont du mal à contrôler leurs actions et donc à faire des vérifications. Parallèlement, l'intérêt d'utiliser des techniques de calcul réside dans le fait de ne pas toujours se poser la question du sens. Ainsi nous suivons le point de vue de G. Vergnaud (1989) *"L'algèbre représente à l'évidence une rupture par rapport à l'arithmétique, en particulier parce que le contrôle du sens des opérations faites ne se fait plus avec les mêmes moyens."*

On voit bien ici la difficulté d'enseignement : faire acquérir à l'élève des automatismes qui le rendent sûr de lui et en même temps, l'inciter à vérifier pour obtenir des résultats justes.

Dans le travail que nous avons proposé aux élèves, nous avons travaillé sur les vérifications en redonnant du sens aux notions d'équation, d'inéquation et de calcul littéral.

II. 1. Calcul littéral

Dans le cadre du calcul littéral, deux expressions sont égales si quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace la lettre (ou les valeurs numériques dans le cas d'expressions à plusieurs variables) l'égalité est vraie. Deux points retiennent notre attention :

- le statut du signe égal

Le signe = a alors la même signification mathématique que dans une égalité du type : $2 + 3 = 5$
même si pour l'élève, le signe = de cette dernière égalité sert à donner le résultat d'une opération. A ce propos, S. Schmidt (1996) écrit : "*De nombreuses recherches montrent que les élèves développent, au cours de leur apprentissage de l'arithmétique au primaire, une certaine conception du signe =. Ils interprètent ce signe comme un " do-something signal " (Bélanger et Erlwanger, 1983) qui sert à indiquer le sens des opérations et où mettre la réponse : les calculs à effectuer sont exprimés à gauche du signe =, et à droite, le résultat de ces calculs achevés est rendu sous une forme numérique simple. Cette conception les amènera à refuser catégoriquement des équations du type : $6 = 4 + 2$, $4 + 2 = 4 + 2$, ou encore $3 = 3$.*"
C'est également ce qu'indique C. Kieran (1990) : "*Thinking that the rightside should indicate the answer - that $4 + 3 = 7$ - allows them to endow with meaning equations such as $2x + 3 = 7$ but not equations such $2x + 3 = x + 4$.*

- le quantificateur "caché"

L'égalité $(2x + 3)(x - 2) = 2x^2 - x - 6$ signifie de façon implicite que : pour tout x réel (ce qui n'est jamais précisé et donc pas forcément évident pour les élèves), la valeur du premier membre et la valeur du deuxième membre sont les mêmes. La lettre x joue ici le rôle d'une variable, c'est-à-dire qui peut prendre n'importe quelles valeurs. Or nous connaissons bien la difficulté d'installer ce statut de variable au collège. Ce point est également souligné par V. Durand Guerrier et al. (2000) : "*L'égalité entre expressions littérales oblige donc à abandonner la dichotomie vrai/faux et à introduire de façon explicite les deux types de quantification, existentielle et universelle.*"

Nous pensons que le sens de l'égalité de deux expressions littérales présente donc des difficultés pour les élèves avec le signe égal et avec les quantificateurs, ce qui explique en partie que les élèves ne vérifient pas leurs calculs.

II. 2. Equations, inéquations

Résoudre une équation ou une inéquation, c'est chercher toutes les valeurs numériques par lesquelles on peut remplacer la lettre pour que l'égalité ou l'inégalité soit vraie.

Dans le cas des équations, le signe = prend un sens particulier. En effet, il s'agit de rendre l'égalité vraie mais ne signifie pas que les deux membres sont égaux quel que soit x.

Par exemple, lorsque l'on donne l'équation : $2x + 5 = 7x$, le signe = ne sépare pas deux expressions égales pour tout x. Ici, x ne joue pas le rôle d'une variable mais celui d'une inconnue dont on cherche à déterminer les valeurs possibles. Les élèves doivent comprendre que parmi toutes les valeurs que peut prendre x, seules quelques-unes rendent cette phrase vraie.

II. 3. Le calcul littéral au service des équations

Pour l'élève, la difficulté provient du fait que la ressemblance entre l'écriture d'une équation et celle d'une égalité en calcul littéral ne traduit pas la différence de sens : présence de lettres (souvent x), signe =, etc. Après avoir insisté en calcul littéral sur le fait que $2x + 5 \neq 7x$ (erreur classique), on demande de résoudre l'équation $2x + 5 = 7x$, ce qui peut être déstabilisant.

Cependant, les résolutions d'équations font souvent intervenir du calcul littéral afin de simplifier les membres de l'équation. Par exemple : Résoudre : $2 (x + 3) + 2 = 4 (5x - 3)$

Il est évident que pour résoudre cette équation, on doit dans un premier temps développer et réduire les deux membres en utilisant des égalités littérales. Pour passer d'une ligne à l'autre on utilise les règles du calcul littéral.

Une autre difficulté est que la lettre x change de statut suivant que l'on raisonne horizontalement ou verticalement, c'est-à-dire : lorsque l'on passe de la première à la deuxième ligne en utilisant $2 (x + 3) + 2 = 2x + 6 + 2$, d'une part, et $4(5x - 3) = 20x - 12$, d'autre part, x joue le rôle d'une variable, alors que lorsqu'on écrit $2x + 6 + 2 = 20x - 12$, x joue le rôle d'une inconnue. On voit bien que les points de vue inconnue et variable sont liés ici.

Ces deux notions sont donc moins faciles à assimiler que ce qu'on pourrait penser et il sera donc utile de retravailler sur le sens du calcul littéral et du statut de la lettre à l'occasion des séances sur la vérification. Ainsi, si les élèves ne sont pas sûrs que la lettre x de la première ligne représente le même nombre que celui de la dernière ligne, ils ne peuvent pas envisager de vérifier en remplaçant puisque pour eux, ces valeurs n'ont rien à voir.

III. Processus de vérification

Nous allons maintenant examiner d'un peu plus près les processus de vérification qui peuvent être employés pour les différentes notions étudiées. Nous travaillons plus particulièrement sur les vérifications internes car les vérifications externes dépendent plus fortement encore de la situation.

III. 1. Calcul littéral

Deux expressions littérales sont égales si elles le sont quelle soit la (ou les) valeur(s) numérique(s) donnée(s) à la (aux) lettre(s), donc en particulier pour une valeur numérique choisie a priori, par exemple, non entière.

Afin de vérifier une égalité en calcul littéral, il convient donc de substituer dans chaque expression chaque lettre par une valeur numérique et de comparer les résultats obtenus. Si les deux résultats sont différents, on est sûr que l'égalité est fausse car dans le cas contraire, elle serait vraie quel que soit x donc en particulier pour la valeur que l'on a choisie.

Si les résultats sont égaux, on ne peut pas conclure que l'égalité est effectivement vraie car on utilise ici une vérification par condition nécessaire mais pas suffisante. En effet, en théorie, il faudrait tester toutes les valeurs numériques pour en être parfaitement sûr, ce qui est bien évidemment impossible. De ce fait, on ne peut avoir qu'une indication de vraisemblance. Le test de plusieurs valeurs permet d'augmenter le degré de certitude (et même parfois d'obtenir une condition suffisante, par exemple, trois essais différents suffisent pour du second degré).

Le choix de la valeur numérique à substituer peut s'avérer important. En effet, pour les élèves, il sera plus facile d'utiliser des valeurs telles que 0 ou 1 afin d'avoir des calculs simples à effectuer. Malheureusement, cela peut masquer des erreurs.

Par exemple : $x(x+1) - 2 \neq x^3 + x - 2$ et pourtant :
Pour $x = 0$: $x(x+1) - 2 = -2$ et $x^3 + x - 2 = -2$
Pour $x = 1$: $x(x+1) - 2 = 0$ et $x^3 + x - 2 = 0$

Il pourrait donc apparaître judicieux de choisir des valeurs numériques non entières, par exemple fractionnaires ou bien de tester plusieurs valeurs. Cependant de tels choix entraînent une perte de temps et peuvent également être source d'erreurs. Nous sommes donc bien conscients qu'il est difficile pour les élèves de choisir de telles valeurs. Aussi, il est peu probable que les élèves s'engagent sur cette voie. De plus un élève qui a des difficultés à calculer sera-t-il plus sûr de sa vérification que de son calcul ? Ce n'est pas sûr.

Nous avons utilisé ce travail sur les vérifications pour la compréhension des notions d'exemple et de contre-exemple (c'est ce qui est fait dans les manuels cités ci-dessus) : montrer aux élèves qu'un contre-exemple suffit à prouver qu'un énoncé est faux, mais qu'un exemple ne suffit pas à prouver qu'un énoncé est vrai.

III. 2. Equations

Un nombre est solution d'une équation si, lorsqu'on le substitue à l'inconnue, l'égalité est vraie. Après avoir résolu une équation, il suffit donc de tester chaque solution trouvée par substitution. Si le test est positif, on est sûr que ce nombre est effectivement solution de l'équation. Dans le cas contraire, on est également certain que ce nombre n'est pas solution de l'équation (il peut être intéressant de refaire la vérification avant de conclure trop vite).

Contrairement au cas de la vérification en calcul littéral, la conclusion est plus tranchée : la solution est juste ou fausse.

On remarque que cette vérification permet de voir si un nombre est bien solution mais pas si la résolution de l'équation est juste (il peut y avoir d'autres solutions). Par exemple, pour la résolution de l'équation $x^2 = 16$, l'élève qui aura trouvé 4 comme unique solution pourra la vérifier mais rien ne lui indiquera qu'il y en a une autre.

En ce qui concerne les équations qui n'ont pas de solutions, on n'a pas d'autres moyens de vérifications que de reprendre la résolution.

Notons également que la vérification ne permet pas une localisation de l'erreur et qu'il faut donc reprendre les calculs pour la repérer. De plus, si l'équation est la modélisation d'un problème, l'élève ne peut pas vérifier que sa mise en équation est juste.

Nous voyons ici qu'il y a différents niveaux de vérification : le résultat, la méthode ou la représentation du problème. La plupart du temps on vérifie les calculs car il est moins coûteux de les remettre en cause que de changer la représentation d'un problème qui constitue un tout structuré et résistant selon J. Julo (1995).

III. 3. Inéquations

Un nombre est solution d'une inéquation si lorsqu'on le substitue à l'inconnue, l'inégalité est vraie. En général, l'ensemble des solutions se présente sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles. Ainsi une première vérification peut être de choisir un nombre à l'intérieur (et à l'extérieur) de(s) intervalle(s) de solution. Cela donne une idée de la vraisemblance. On peut également reprendre le calcul qui a donné les bornes de l'intervalle (cela revient à résoudre l'équation correspondante). On vérifie alors la valeur des bornes. Dans le cas d'une inéquation produit (quotient) on peut vérifier que les zéros des facteurs correspondent bien aux bornes des intervalles. On voit bien dans cette partie que les connaissances mathématiques sont très importantes pour déterminer des procédés de vérification.

IV. Analyse du test diagnostique

Comme nous l'avons dit en introduction, nous avons choisi d'aborder la question des vérifications en lien avec les objets de savoir (ici calcul littéral et équation/inéquation). Nous avons donc bâti une expérimentation composée de trois parties successives. Dans un premier temps, nous avons proposé aux élèves un test diagnostique afin d'évaluer leur perception du sens du calcul littéral et des résolutions d'équations et d'inéquations. Ensuite, un bilan a été fait en classe sous forme de débat pour discuter du sens de ces notions et établir des processus de vérifications. Enfin, les élèves ont dû utiliser ces processus lors d'un devoir surveillé dans lequel les vérifications sont imposées. Dans cet article, nous ne parlerons que du test diagnostique.

Nous avons choisi de donner aux élèves des deux niveaux, Quatrième et Seconde, des énoncés quasiment identiques afin de pouvoir comparer les résultats recueillis et d'évaluer une éventuelle évolution.

Ce test a été réalisé dans deux établissements de la région lyonnaise : une classe de niveau Quatrième de 23 élèves et une classe de niveau de 28 élèves. La durée du test était d'une heure environ. Les élèves avaient pour consigne de travailler individuellement et silencieusement.

IV. 1. Présentation du test

Exercice I : Equations – Inéquations

Equations :

1) Didier affirme que 4 est solution de l'équation : $4(x-3)-4=3x-12$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

2) Fabienne affirme que 2 est solution de l'équation : $3x-6(x-2)=3-x$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

3) Louis affirme que 6 est solution de l'équation : $8x-x^2-15=0$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

4) Patricia affirme que 8 est solution de l'équation : $(x-8)(2x+5)=0$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

Inéquations : (niveau Seconde seulement)

1) Thierry affirme que 2 est solution de l'inéquation : $x^2-2x-4 \geq 0$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

2) Maud affirme que 0 est solution de l'inéquation : $(x^2-6x+3)(x-1)<0$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

3) Laurence affirme que -1 est solution de l'inéquation : $(x-2)(3x-1) \leq 0$
Etes-vous d'accord ? Pourquoi ?

Exercice II : Calcul littéral

1) Soit $A = x(x+1)-3(x^2+1)$ et $B = -x^2+2x(x-2)-5$
- Calculez A pour $x = 2$. Calculez B pour $x = 2$
- Sans faire de calcul, pensez-vous que pour $x = 3$ on a $A = B$.

2) Soit $C = (x+5)(x-2)+3$ et $D = x(x+3)-7$
a) Que signifie pour vous que $C = D$?
b) En développant les deux expressions, trouvez-vous $C = D$?
c) Comment pouvez-vous faire pour en être plus sûr ?

3) Soit $E = 4x + x(2x+1) - 3x^2 + 12$ et $F = 5x^2 + 3x - 8$
a) Calculez E et F pour $x = 2$.
b) Calculez E et F pour $x = 1$.
c) Que peut-on dire de E et F ?

(En Quatrième) : 4) Soit $G = 3(x+1)+2x^2+1$ et $H = (2x+2)^2 + x$

(En Seconde) 4) Soit $G = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ et $H = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{2x^4+x^2+1}$

Pensez-vous que $G = H$? Expliquez.

IV. 2. Exercice 1

Tout d'abord précisons que nous avons choisi des expressions relativement simples et des solutions entières. Nous ne voulions pas perturber les calculs en donnant des coefficients ou des valeurs non entières pour lesquelles les élèves auraient fait de nombreuses erreurs de calculs. Par contre nous sommes bien conscients de nous être privés de vérifications portant sur la nature de la solution.

IV. 2. 1. Analyse a priori

Dans cet exercice, on donne aux élèves une équation (ou une inéquation) et on leur demande si un nombre donné est solution de cette équation (ou de cette inéquation).Ainsi, nous voulons voir si l'élève essaie de résoudre (il n'en est pas toujours capable) ou pense à remplacer l'inconnue par la solution proposée.

Les deux premiers exercices sont constitués d'équations simples que les élèves de $4^{\text{ième}}$, et a fortiori de 2^{nde}, ont les moyens de résoudre. Nous nous attendons donc à ce que certains élèves résolvent l'équation puis comparent leur solution avec celle proposée.

Dans le troisième, les élèves n'ont pas les moyens de résoudre l'équation. Toutefois, il ne serait pas surprenant que certains inventent quand même des méthodes pour résoudre cette équation du second degré. Sinon, la seule méthode qu'ils ont à leur disposition est donc de remplacer x par 6 dans l'expression $8x - x^2 - 15$. De ce fait, nous espérons que parmi ceux qui ont résolu les deux premières équations, certains iront vers cette méthode.

Enfin pour le quatrième, les élèves 2^{nde} savent résoudre l'équation, ce qui n'est pas le cas de ceux de $4^{\text{ième}}$. Nous avons donné cette équation produit car, dans ce cas, la vérification est immédiate et prend donc encore plus d'intérêt.

En 2^{nde}, l'exercice I comportait également trois inéquations avec pour chacune d'entre elles un nombre proposé. Les élèves doivent dire si ce nombre est effectivement une solution ou pas. La première et deuxième inéquation ne peuvent être résolues par les élèves de 2^{nde}, contrairement à la troisième. Cependant comme c'est un produit, la vérification est très rapide. Nous voulons également vérifier à travers cet exemple que les élèves ne font pas la confusion entre le signe d'une solution et le sens de l'inégalité de l'inéquation. Enfin, nous avons introduit 0 comme solution dans la deuxième inéquation. D'une part, ce nombre particulier permet d'effectuer des calculs simples lors de vérifications mais d'autre part, il est régulièrement source d'erreurs. Par exemple, on connaît bien l'erreur classique dans l'équation $2x = 0$ qui consiste à dire que la solution est - 2.

IV. 2. 2. Analyse des résultats

Voici le tableau récapitulatif des réponses. Dans la ligne "ont remplacé" nous avons indiqué le nombre d'élèves qui l'ont fait même avec des erreurs de calcul.

Exercice I		1ère équation	2ème équation	3ème équation	4ème équation
Classe de 4ème	ont remplacé	15	17	19	18
	ont résolu	2	2	0	0
	autre	5	2	1	2
	pas de réponse	1	2	3	3
Classe de 2nde	ont remplacé	7	10	12	10
	ont résolu	21	17	0	14
	autre	0	1	7	1
	pas de réponse	0	0	9	3

Les résultats des deux premières questions sont semblables pour chaque classe. En majorité, les élèves étaient d'accord pour dire que 4 était solution de la première équation et que 2 n'était pas solution de la deuxième. Cependant, il apparaît une très grande différence entre les élèves de 4ième et ceux de 2nde. En effet, la plupart des élèves de 4ième a remplacé l'inconnue par la solution proposée. Nous pouvons expliquer ceci par le fait que le cours sur les équations avait été fait peu avant. La définition d'une solution d'une équation était donc encore claire dans leur esprit. En revanche, la résolution d'équations était nouvelle pour eux et présentait encore des difficultés techniques.

Les élèves de 2nde ont majoritairement résolu l'équation puis comparé leur résultat avec la solution proposée. On remarque que peu d'élèves (7 sur 28 pour la première équation et seulement 10 sur 28 pour la deuxième) ont pensé à remplacer x par la solution proposée. Cela s'explique par ce que nous avons dit auparavant, à savoir que les élèves ont peut-être oublié ce que signifie "être solution d'une équation". De plus, depuis le collège, ils ont été habitués à résoudre ce type d'équation, ils ont été entraînés à des techniques, il y a là, nous semble-t-il, une manifestation du contrat didactique.

En ce qui concerne la troisième équation qu'ils ne pouvaient pas résoudre, en 4ième comme en 2nde, les élèves qui jusqu'alors avaient testé les solutions ont continué ainsi. Par contre, une bonne partie de ceux qui avaient résolu les deux premières équations a, cette fois, pensé à remplacer x par 6. Les autres n'ont pas apporté de réponse. Enfin, la dernière équation a apporté les résultats suivants : en 4ième, les réponses sont très comparables à celles fournies pour la question précédente ; en 2nde, la moitié des élèves a résolu l'équation. Nous remarquons que certains élèves qui avaient résolu les deux premières équations ont, cette fois-ci, remplacé x par 8 après s'être souvenu de cette méthode dans la troisième équation.

A travers cet exercice, les élèves ont pu se remémorer ce que veut dire “être solution d’une équation” ce qui est essentiel dans l’optique de la vérification. Il a été intéressant, surtout au niveau Seconde, de noter que les élèves sont capables de changer de méthodes en fonction des questions qui leur sont posées (un élève est même revenu sur la première équation qu’il avait résolu pour ajouter une vérification).

En ce qui concerne les inéquations de niveau Seconde, voici les résultats :

Niveau Seconde	1ère inéquation	2ème inéquation	3ème inéquation
Ont remplacé	16	15	12
Ont résolu	0	0	11
Autre	5	2	2
Pas de réponse	7	11	3

Les élèves ne pouvaient pas résoudre les deux premières inéquations. Suite au travail qui a été fait sur les équations, plus d'une douzaine d’entre eux a pensé à remplacer l’inconnue par la solution proposée. Là encore, certains élèves ont cherché à résoudre alors que d’autres, surpris par la forme de ces inéquations, n’ont pas apporté de réponse.

En revanche, dans la troisième inéquation, les élèves qui étaient restés bloqués jusque-là, ont reconnu une situation habituelle et ont donc résolu puis regardé si la solution proposée appartenait bien à leur ensemble de solutions. Les élèves qui avaient su répondre correctement aux deux premières inéquations ont conservé leur technique de substitution ce qui était beaucoup plus rapide, plus simple et plus direct qu’une résolution. De plus, nous avions pensé que certains élèves confondraient le signe d’une solution et le sens de l’inégalité de l’inéquation, ce qui n’a pas été le cas.

IV. 3. Exercice II

IV. 3. 1. Analyse a priori

L’exercice II porte sur le calcul littéral. Nous voulons voir à travers cet exercice ce que représente une égalité littérale pour les élèves. Par exemple dans le deuxième exercice a), nous leur demandons ce que signifie pour eux l'égalité des expressions C et D, en indiquant C = D. Nous attendons comme réponse par exemple : *pour n’importe quelle valeur numérique prise par x, on obtient le même résultat.*

Dans tous les exercices, nous leur proposons deux expressions littérales. Les élèves doivent calculer ces expressions pour une ou deux valeurs de x données. En général, les expressions sont différentes, mais donnent le même résultat pour une valeur de x proposée. Nous leur demandons s'ils pensent qu'elles sont égales pour une autre valeur de x (exercice 1 b)) ou, de façon plus générale, si elles égales (exercice 3 c) ou 4).

Nous voulons voir s'ils pensent qu'un exemple suffit à démontrer une propriété. Nous nous attendons donc à ce que certains élèves concluent que les expressions sont égales à partir d'un exemple. Le but est d'observer quelle est leur réaction vis-à-vis des exemples et des contre-exemples. Ceci est important pour pouvoir conclure à la suite d'une vérification par essais. Par exemple à l'exercice 3c), nous attendons des réponses du type : *E est différent de F ; E est différent de F sauf pour x = 2 ; E est égal à F sauf pour x = 1.*

A l'exercice 2 c), nous leur demandons de proposer une méthode pour être plus sûr du résultat trouvé en b). Nous voulons, par cette question, amener les élèves à réfléchir sur une méthode de vérification. Nous attendons une réponse du type *: on essaie pour des valeurs de x* (la première question de cet exercice peut les guider dans cette voie).

Dans l'exercice 4, nous cherchons à faire le bilan de ce qui a été fait. En 2^{nde}, les deux expressions sont égales pour x = 0, x = 1, x = 2. L'aspect des deux expressions doit inciter l'élève à préférer une méthode de vérification par tests à des calculs littéraux longs et compliqués. Nous espérons que les élèves vont essayer les valeurs 0, 1 ou 2 et conclure que G est égal à H. L'objectif est d'utiliser les erreurs durant la correction pour insister sur le fait qu'un exemple ne suffit pas pour démontrer une égalité et qu'on ne doit pas conclure hâtivement à l'égalité des expressions.

En $4^{ième}$, G est égal à H pour x = 0 et pour x = -3. Le but est le même, cependant les élèves ont la possibilité, en développant les deux expressions, de montrer l'inégalité sans tester de valeurs numériques. Il se peut donc que certains s'engagent dans cette voie.

IV. 3. 2. Analyse des résultats

$1^{ère}$ question :

En $4^{ième}$, nous avons été confrontés à de nombreuses erreurs de calcul ce qui a gêné notre observation. Seulement 4 élèves sur 23 ont trouvé que A est égal à B pour x = 2. Parmi eux, un seul pense que l'égalité restera vraie pour x = 3. Toutefois, nous avons tout de même remarqué que, parmi ceux qui ont trouvé A différent de B, 13 élèves pensent que l'inégalité restera fausse pour x = 3, 4 élèves répondent qu'on ne peut pas savoir sans faire le calcul, un seul élève pense que A est égal à B pour x = 3 (par effet de contrat, peut-être, il pense que puisque la première réponse est non, la deuxième est nécessairement oui). Enfin, un élève qui a trouvé que A < B pour x = 2 répond *: "Non, je ne le pense pas, B aura une plus grande valeur."*

En 2^{nde}, de nombreux élèves pensent que pour x = 3, A sera différent de B, sans explication. D'une part, on peut penser que certains ont fait le calcul au brouillon pour pouvoir conclure. D'autre part, et c'est également vrai pour ceux qui ont fait des erreurs de calcul pour x = 2, les élèves essaient de donner des réponses différentes pour x = 2 et pour x = 3 (là encore, ils pensent qu'il faut donner une réponse positive et une réponse négative). Un élève a répondu : *"Je suis obligé de faire le calcul, je n'arrive pas à voir autrement."*

2ème question :

A la question “Que signifie que pour vous que C = D ?”, certains élèves ont traduit en français le signe = et ont répondu par exemple : “Cela signifie que C est égal à D.” Au niveau Seconde, de nombreux élèves ont simplement répondu : $(x + 5)(x - 2) + 3 = x(x + 3) - 7$. On voit que la quantification n'est pas présente dans les réponses des élèves.

14 élèves de 4ième et 9 élèves de 2nde répondent quelque chose du type : “Le *résultat* du calcul C est le même que le *résultat* du calcul D.” Il semble donc que les élèves se représentent une expression littérale comme un calcul à effectuer en raison de la présence de signes opératoires. Cela peut expliquer le fait qu’ils essaient toujours de réduire au maximum une expression. Après avoir interrogé les élèves, il est apparu que, pour eux, le résultat du calcul C est la forme développée et réduite de l’expression littérale. Ces élèves voient donc le calcul littéral seulement comme du calcul avec des lettres sans vraiment avoir conscience que la lettre joue ici le rôle d’indéterminée. De plus, un élève de chaque classe a précisé que les coefficients devaient être égaux.

Un seul élève de 2nde a apporté la réponse suivante : *"Cela signifie que pour un même nombre x on a C = D"*, ce qui est le plus proche de ce que nous attendions.

Ensuite, dans la question b), la très grande majorité des élèves a su développer les deux expressions et conclure que C = D.

En ce qui concerne la question c) "comment être plus sûr ?", 11 élèves sur 23 de 4ième et 17 sur 28 de 2nde ont proposé de remplacer x par un nombre ce qui est assez surprenant par rapport aux résultats des questions précédentes qui montraient des difficultés. Cela peut s’expliquer par le fait que depuis le début du test, ils ont déjà dû plusieurs fois remplacer x par une valeur numérique. Nous en concluons que les élèves ont compris que le(s) nombre(s) x solution(s) d'une équation était bien le même tout au long des calculs. Nous avons utilisé cela lors de la correction.

3ème question :

Après avoir calculé correctement pour a) et b), les 14 élèves de 2nde et 6 élèves de 4ième ont répondu à la question c)qu’il y avait égalité des expressions E et F pour $x = 2$ et inégalité pour $x = 1$. Cette réponse, bien que correcte, montre que les élèves n’ont pas encore bien assimilé le fait qu’un contre-exemple suffit pour prouver que deux expressions ne sont pas égales.

Certains élèves de 4ième , ainsi que quelques-uns de 2nde, ont trouvé $E \neq F$ pour $x = 2$ (suite à une erreur de calcul) et pour $x = 1$. Ils ont alors conclu : $E \neq F$. C’est une réponse cohérente mais qui ne nous permet pas de juger de leur réaction face aux exemples et aux contre-exemples.

Enfin, 7 élèves de 2nde ont répondu $E \neq F$. Il s’agit d’élèves qui avaient apporté des réponses pertinentes aux questions précédentes.

De plus, nous pensons qu'un élève, après avoir trouvé E = F pour x = 2, a commis volontairement une erreur de calcul pour trouver E = F pour x = 1. Cela lui a permis de conclure que E est égal à F (pour lui, deux exemples suffisent pour montrer une égalité). Nous pensons que l'élève n'a pas assimilé le fait que deux expressions peuvent être égales pour une certaine valeur numérique et différentes pour une autre valeur.

4ème question :

En 4ième, seulement deux élèves ont testé l'égalité pour x = 2 et ont conclu que G est différent de H, 11 élèves ont choisi de développer les deux expressions et ont ainsi pu conclure à l'inégalité. Nous pensons qu'ils ont été influencés par la 2ème question où cette démarche était utilisée. 6 élèves, sans faire de calcul, ont répondu juste ou faux "à vue d'œil." On peut penser que certains ont effectué une recherche au brouillon sans la faire apparaître dans leur copie. Enfin, 4 élèves n'ont pas donné de réponse.

En 2nde, 5 élèves ont remarqué des ressemblances de forme dans l'écriture des deux expressions : le numérateur de G est "présent" dans celui de H et le dénominateur de G apparaît également dans celui de H. Ils se sont alors servi de cette observation pour expliquer leur conviction que G et H ne peuvent être égaux. Dans leur esprit, la "différence" entre G et H est $\frac{x^3 - 2x^2}{2x^4}$. 7 élèves ont essayé de remplacer x par une seule valeur numérique qui a, à chaque fois été 0, 1 ou 2. De ce fait, ils ont trouvé que G = H pour leur valeur sauf 2 élèves qui ont fait des erreurs de calcul. Parmi, les 5 autres, 4 ont conclu que G = H. Le dernier élève a répondu : "Je pense que G est différent de H car, ce qui différencie G et H, c'est $\frac{x^3 - 2x^2}{2x^4}$ dans l'équation H. Or, à moins de prendre x = 2, on trouvera G ≠H."

2 élèves ont fait le produit en croix et simplifié les deux expressions (sans erreur de calculs) et ont donc logiquement montré que G est différent de H. Cela a quand même nécessité de longues lignes de calculs.

Enfin, 8 élèves n'ont pas répondu à la question et 6 autres ont cherché à simplifier les deux expressions en utilisant des règles de calculs inventées pour l'occasion.

V. Conclusion

Ce test nous a donc permis de constater que les élèves s'étaient construit des conceptions qui peuvent paraître surprenantes pour l'expert mais sur lesquelles nous avons pu nous appuyer lors de la mise en commun. Celle-ci s'est s'est déroulée sur une heure, en classe entière en 4ième et en demi-groupe en 2nde. Ce fut une séquence très enrichissante aussi bien pour l'enseignant que pour les élèves. En effet, nous avons profité de cette occasion pour discuter avec les élèves de leur perception du calcul littéral et de la résolution d'équations. Lors de la passation du test, les difficultés d'expression écrite des élèves nous ont conduits à nous interroger longuement sur certaines réponses. Il aurait été utile de pouvoir dialoguer plus longuement avec certains élèves afin d'approfondir leurs réponses, mais cela n'a pas été possible par manque de temps.

Si nous devions refaire ce test, nous y apporterions quelques modifications. Nous choisirions de donner des expressions plus simples (surtout en $4^{\text{ième}}$) afin d'éviter au maximum les erreurs de calculs. Il aurait été également intéressant, dans la partie concernant les équations, de placer la deuxième équation en dernière position afin d'observer (par comparaison avec la première équation) une évolution des stratégies sur deux équations similaires.

Au travers de nos différentes expérimentations, nous avons essayé de mettre en lumière les représentations et les techniques des élèves en ce qui concerne la résolution d'équations et le calcul littéral car nous étions étonnés qu'ils ne vérifient pas leurs résultats. Nous nous sommes alors rendu compte que pour certains élèves ces deux contenus d'enseignement posaient encore des problèmes. Si les élèves de 2^{nde} semblent avoir de meilleures compétences techniques, la compréhension du sens n'a pas beaucoup évolué par rapport à ceux de $4^{\text{ième}}$. Nous avons donc essayé de préciser le sens au travers des processus de vérification car les deux sont étroitement liés. Nous avons établi différents procédés de vérification.

Nous pensons et nous espérons qu'à travers ce travail nous avons développé des capacités de vérification et d'auto-évaluation chez les élèves ainsi que leur compréhension du sens du calcul littéral et des équations (et inéquations).

En ce qui nous concerne, le travail effectué nous a permis d'approfondir notre réflexion sur ce que pensent les élèves. Nous avons en effet pris plus de temps pour dialoguer avec eux et nous avons pu constater que la représentation qu'ils se font des savoirs enseignés diffère parfois de ce que le professeur veut transmettre et qu'ils font parfois des calculs dont ils ne comprennent pas vraiment la signification. Nous pouvons souligner l'importance de faire un diagnostic avant de remédier à certaines difficultés. De plus, la difficulté pour les élèves de vérifier provient du fait que la vérification s'est révélée moins évidente que ce que nous pensions, que ce soit au niveau de la technique, de la compréhension des méthodes ou du temps nécessaire. Cette étude nous a permis en outre de montrer les difficultés d'apprentissage portant sur les différents statuts de la lettre et sur l'utilisation du signe =.

Nous avons pu voir que, malgré quelques injonctions dans les programmes et dans les discours des professeurs, les vérifications restaient des objets qui n'avaient qu'une petite place dans l'enseignement habituel. Leur caractère particulier parmi les procédures de preuve fait que leur gestion est laissée à la charge des élèves dans leur travail privé. Nous trouvons cette situation regrettable puisque nous avons montré que vérification et compréhension des notions étaient liées et qu'un travail sur l'un entraînait des modifications sur l'autre. Nous avons donc montré que ce travail sur les vérifications ne pouvait se faire qu'en lien très étroit avec chaque notion enseignée, mais il ne s'agit pas non plus d'imposer les vérifications comme une étape obligée lors de la rédaction des solutions des exercices.

Bibliographie

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational studies in mathematics. Vol 18.

BÉLANGER, M., ERWANGER, S. (1983). Interpretation of the equal sign among elementary schoolchildren. Actes de PME n° 5.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 7/2. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

CHALANCON, F., PASCAL, N. (1999). La vérification dans les équations, inéquations et en calcul littéral. Mémoire professionnel PLC2. IUFM de Lyon.

COPPE, S. (1993). Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé. Thèse de l'Université Claude Bernard. Lyon I.

COPPE, S. (1997). Etude des processus de vérification mis en œuvre par les élèves de 1ère S. Bulletsin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public. Bulletin n° 411 Juillet 97.

COPPE, S. (1998). Composantes privées et publiques du travail de l'élève en situation de devoir surveillé en mathématiques. Educational studies in mathematics. Vol 35 n° 2.

CHEVALLARD, Y. (1988). Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation. IREM d'Aix Marseille.

DURAND GUERRIER, V., LE BERRE, M., PONTILLE, M. C., REYNAUD-FEURLY, J. (2000). Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Eléments d'analyse pour les enseignants. IREM de Lyon.

JULO, J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Rennes : Presses universitaire de Rennes.

KIERAN, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the pschology of mathematics education. P. Nesher et J. Kilpatrick Edits. Cambridge University Press.

SCHMIDT, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. Revue des sciences de l'education. Vol XXII, n° 2.

VERGNAUD, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In Construction des savoirs. Obstacles et conflits. N. Bednarz et C. Garnier Edits. CIRADE.