ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES DES FAITS ET DES EFFETS À PROPOS D'EXEMPLES D'ÉPREUVES

Henri-Claude ARGAUD
Professeur de mathématiques
IUFM de Grenoble, Centre de Valence

Yves Chevallard décrit[1] «deux interprétations de l'acte d'évaluation» : d'une part il mesure des connaissances, d'autre part il est message et transaction entre enseignant et élève, «il constitue un moment particulier -mais essentiel- d'un processus beaucoup plus large, celui de la négociation didactique». En se référant à Y.Chevallard, Jean-Jacques Maurice, dans un travail récent[2] fait l'analyse suivante :

«Pour l'efficacité de cette négociation didactique, l'instituteur, en choisissant ses tâches d'évaluation, utilise ses spectaculaires compétences à prédire la réussite ou l'échec... L'évaluation (sous son aspect sommatif, très utilisé ou tout simplement sous la forme de tâches à correction immédiate), grâce à cette fonction, offre un pouvoir efficace ; obstacle qui résiste à sa remise en cause éventuelle.

En supposant que cette pratique de tâche à correction immédiate et publique se révèle fréquente, elle permettrait de formuler l'hypothèse suivante : si, pour maintenir la pression et ne pas mener la négociation à la baisse, il faut un peu d'échec, ce sont toujours les mêmes élèves qui portent ce fardeau de l'échec afin d'inciter les autres à travailler... Cette pratique condamne le système à produire de l'échec».

Cet article ne présente pas un travail de recherche[3]. C'est une contribution modeste à la réflexion sur l'évaluation «qui a jusqu'ici peu attiré les didacticiens» (Y.Chevallard), mais qui constitue une préoccupation constante des maîtres. Le même auteur observe que les phases d'évaluation, dans un certain processus d'enseignement (réalisation dans une ou plusieurs classes de quatrième, d'un enseignement expérimental) «sont traitées d'abord comme secondaires mais elles se révèlent bien vite essentielles....». Il peut aussi permettre de se poser la question de la fonction du problème dans la classe, auprès des élèves, en mathématiques, alors qu'il est beaucoup question de l'apprentissage par la résolution de problème.

---

1 Vers une analyse didactique des faits d'évalution.
In L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive? Ed. J.M. de Ketele.
2 Problèmes multiplicatifs: l'expérience de l'enseignant, l'action effective de l'élève, J-J. Maurice, RDM vol.16.3 1996.
3 Les éléments présentés ici ont servi de support lors d'un stage de formation continue à l'IUFM «Approfondissement en didactique» conduit avec A.Hachelouf, A.Colenson, A.Roux.

Il se décompose en deux parties principales. La première relate un fait, quelque peu circonstanciel et anecdotique, apparu dans l'étude comparative de travaux d'élèves sur un même problème, en situation d'évaluation et en situation de recherche (ce ne sont pas les mêmes élèves, et ce ne sont pas les mêmes effectifs qui sont considérés). La deuxième présente une proposition pour articuler une évaluation avec des situations d'apprentissage, en classe de CE2, sur la multiplication et la proportionnalité ; cela résulte d'un travail mené dans le cadre de l'INRP et d'une recherche intitulée: «Outils de calcul au cycle des approfondissements».

I - LE PROBLÈME POUR L'ÉLÈVE : PROBLÈME POUR ÊTRE ÉVALUÉ OU PROBLÈME À CHERCHER ?

L'évaluation ministérielle a proposé en 1994, en classe de 6ème, le problème suivant:

Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m^2.
Avec un pot de 10 kg de peinture, on peint une surface de 25 m^2.
Combien de m^2 peut-on peindre avec 16 kg de peinture ?
Combien de kg de peinture faut-il pour peindre 50 m^2 ?
Combien de m^2 peut-on peindre avec 4 kg de peinture ?

Après quelques éléments d'analyse du problème, nous présentons et discutons les résultats d'une comparaison de travaux d'élèves.

A - CARACTÉRISTIQUES DIDACTIQUES DU PROBLÈME

La typologie des problèmes multiplicatifs de G.Vergnaud[4] permet une délimitation de l'analyse des problèmes en termes de variables et facilite l'étude des procédures des élèves. Ce problème peut être identifié comme un problème relevant de «l'isomorphisme de mesures» : il y a deux espaces de mesures (mesures de longueurs et mesures d'aires), deux mesures de chaque espace et une «relation non dégénérée» (le correspondant de l'unité n'est pas donné), soit une relation de proportionnalité non triviale.

Remarquons d'abord que pour résoudre le problème l'élève doit «faire l'hypothèse» qu'il y a proportionnalité : cela n'est pas dit dans le texte ! On doit convenir «qu'il est d'usage» que l'aire couverte soit proportionnelle à la masse de peinture utilisée.

Certaines valeurs de variables sont propres à faciliter la résolution des élèves :
- la nature des nombres (entiers inférieurs ou égaux à 50),
- les relations entre les nombres d'un même espace de mesures

$16 = 10 + 6 \qquad 50 = 2x25 \qquad 4 = 10 - 6$

ce qui permet que la résolution se fasse avec des entiers à l'aide de calculs simples.

D'autres valeurs de variables, au contraire, peuvent être source de difficultés :
- la nature des grandeurs en jeu dans la relation de proportionnalité : les masses

4 «L'enfant, la mathématique et la réalité», P. Lang, Berne 1981.

et surtout les aires, ne sont pas des notions encore bien maîtrisées à la fin du CM2 et sont encore objet d'apprentissage. Une relation de proportionnalité entre des masses et des aires est plus délicate à concevoir qu'une relation de proportionnalité entre un nombre d'objets et le prix de ces objets par exemple :
-le caractère continu des grandeurs,
- le fait que la relation soit non dégénérée,
- le caractère décimal non entier du coefficient de proportionnalité (5/2).

Ces deux dernières valeurs ne doivent pas, malgré tout, empêcher les élèves de résoudre le problème parce qu'il semble que les auteurs du sujet, d'après les procédures de résolution qu'ils envisagent dans leur grille d'analyse, supposent que les élèves peuvent procéder en utilisant les propriétés de linéarité.

B - PROCÉDURES DE RÉSOLUTION POSSIBLES

Nous listons ci-après les grands types de procédures possibles :

P1 : application d'une ou plusieurs propriétés de linéarité
P2 : identification du correspondant de l'unité puis application des relations scalaires
P3 : identification et application de la fonction numérique directe ou réciproque
P4 : résolution algébrique (produit en croix)
P5 : résolution graphique

P1 est la procédure la plus accessible parce qu'elle fait intervenir des relations scalaires entre nombres de même espace de mesures.

P2 suppose un calcul pour déterminer le correspondant de l'unité (recherche de a tel que 6 x a = 15 ou 10 x a = 25 (on note que ce calcul est assez facile!) et un autre calcul pour répondre au problème.

P3 fait intervenir un nombre sans signification, le coefficient de proportionnalité qui s'exprime en kg / m^2.

P4 est une procédure qui fait intervenir des nombres sans signification (kilos x m^2), et qui est, en général, un produit de l'enseignement.

P5 n'est pas une procédure spontanée des élèves et, du fait qu'elle s'appuie sur la perception, elle peut laisser des doutes quant à la validité du résultat trouvé.

Ces trois dernières procédures ne sont pas des procédures que l'on attend, en général, d'élèves de cet âge.

C - RÉSULTATS DE L' «ÉVALUATION 6ÈME» DE SEPTEMBRE 1994

Le problème est donné aux élèves de sixième de l'académie de Grenoble, dans le cadre de l'évaluation officielle ; les élèves savent que c'est un problème d'évaluation.

Pour 1614 élèves de l'académie (en pourcentages) :

	1	9	0
avec 16 kg	67	20	11
avec 50 m2	50	30	19
avec 4 kg	38	30	31

Le codage proposé
0 : absence de réponse 1 : réponse exacte 9 : autres réponses
est relatif aux «réponses», donc aux résultats; il ne s'intéresse pas aux procédures de résolution.

Les taux de réussite ou d'échec nous paraissent édifiants ; le «système» a produit de l'échec.

En admettant que ces résultats académiques peuvent être ceux d'élèves issus d'une classe de CM2 d'un maître «lambda», celui-ci peut se poser la question : *«que puis-je faire pour améliorer les résultats de mes élèves?»*. Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer un dispositif que pourrait alors élaborer ce maître pour remédier à cette insuffisance.

D - CONTRAT DE CLASSE ET PASSATION AU CM2.

Compte tenu des séquences d'apprentissage conduites dans le cadre de la recherche précédemment citée, sur le thème de la proportionnalité, il nous a semblé intéressant de proposer ce problème à des élèves de CM2 dans les conditions décrites ci-dessous, différentes des conditions de passation de l'évaluation officielle.

Il est posé dans deux classes de CM2 au mois de janvier 1996 (les classes de Bernard Piccoli à Malissard et de Alain Roux à Valence). Ces maîtres font partie de la recherche INRP précédemment signalée. Ils conduisent les situations d'apprentissage prévues par l'équipe de recherche qui couvrent tout le domaine numérique, et s'efforcent de mettre en place un contrat dans lequel les élèves ont la charge de la résolution du problème. Explicitons maintenant quelques règles importantes du contrat mis en place.

1 - La référence au domaine de connaissance

Les élèves ne savent pas, a priori, que le problème est un problème de proportionnalité puisque les problèmes qu'ils ont eu à résoudre jusque là sont puisés dans des domaines de connaissances différents (la connaissance des nombres entiers, des calculs et des relations arithmétiques, le domaine multiplicatif - multiplication, division, proportionnalité -, les grandeurs et les mesures, les nombres décimaux et rationnels) dont l'apprentissage est mené de façon conjointe. Ils ne peuvent donc pas, en général, identifier le domaine de connaissance en jeu dans le problème et dire, par exemple : «ce problème se résout comme le problème d'hier».

2 - La communication du problème à l'élève

Le problème est communiqué aux élèves à la manière dont on donne ce type de problèmes «d'habitude» -comme un problème écrit-, avec l'unique consigne «résolvez ce problème!» donnée de manière détachée... et sans autre commentaire. Il n'est pas dit aux élèves que c'est un problème d' «évaluation 6ème».

3 - Les conditions de la recherche

Les élèves travaillent individuellement et sans aide du maître.

4 - Les conditions de la validation

Les élèves doivent aussi être capables de valider sans l'aide du maître; des informations explicites de la part du maître comme «c'est juste !» ou des informations implicites comme «tu peux prendre un livre de bibliothèque» ou «trouve une autre manière de résoudre», soit toute information à l'élève sur la validité de son travail, sont proscrites.

Les deux classes avaient abordé, en particulier, au premier trimestre :
- la proportionnalité entre grandeurs connues (prix, nombre d'objets, longueurs...)
- les notions d'aire et de masse, mais il n'a pas été encore rencontré de relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs à travers une situation d'apprentissage.

Comparons les résultats pour les deux classes :

	1	9	0
avec 16 kg	88,5	11,5	
avec 50 m2	73	23	4
avec 4 kg	61,5	34,5	1

Résultats pour la classe 1
(en pourcentages)

	1	9	0
avec 16 kg	88	12	
avec 50 m2	80	20	
avec 4 kg	64	26	

Résultats pour la classe 2
(en pourcentages)

Bien qu'elles n'aient pas le même «profil», - l'une est une classe de village à 6 km de Valence, l'autre est une classe d' «école annexe» de Valence -, les deux classes ont des résultats semblables, qui se distinguent significativement des résultats académiques : il y a peu d'absence de réponse et assez peu aussi d'autres réponses. Le paragraphe qui suit a pour but d'essayer de suggérer quelques explications de ce décalage dans les résultats. Mais nous ne voulons pas tirer des conclusions certaines ou attribuer trop de signification à cette comparaison, faite de manière occasionnelle et sans précautions expérimentales...

Le maître «lambda» avait tout à l'heure des doutes sur les capacités de ses élèves. Il a pris connaissance, par ses deux collègues, des informations précédentes et de cette seconde série de résultats ; il ne se pose plus seulement la question de savoir comment faire pour améliorer les résultats de ses élèves... Comme il a une classe qui ressemble à la première classe, il peut se dire maintenant : «pourquoi une telle différence de résultats ?»

E - BILAN

1 - Quelles explications avancer pour la différence des résultats ?

Nous citons ci-dessous quelques explications qu'il nous paraît plausible de retenir et qui sont liées aux conditions de passation :

a) l'évaluation ministérielle se passe **après la coupure des vacances** : elle a lieu juste à la rentrée, sans remise en route.

b) **les élèves passent de l'école élémentaire au collège ;** cela constitue une rupture pour eux à plusieurs points de vue (un enseignant particulier pour les maths, repères à se construire...).

c) **la durée de la passation :** le temps limité et court , en évaluation officielle, est plus souple et plus long, si nécessaire, en résolution de problème.

d) **la modification de règles du contrat didactique.** Nous avons décrit plus haut les règles principales établies en situation de recherche, et il a été fait en sorte que la situation conduite par les deux maîtres soit vécue comme une situation de recherche. Dans une épreuve de type «évaluation 6ème», les règles ne sont pas les mêmes en raison :

**de son caractère officiel :* c'est l'institution qui la demande et qui la met en place, alors qu'une situation de recherche est à l'initiative du maître;

**de son caractère général :* tous les élèves de France du niveau sont concernés, non pas simplement les élèves de la classe ;

**du type de dispositif :* des livrets individuels, non pas les feuilles usuelles pour la recherche; les traces écrites des élèves sont souvent réduites dans les livrets remplis, alors que, lors de la situation donnée en recherche, elles sont beaucoup plus abondantes avec, en particulier, les erreurs.

**de l'enjeu de la réussite (problème à chercher ou à réussir ?) :* «Je dois bien me situer dans la hiérarchie, donc il faut que je réussisse! Je vais essayer de réussir par tous les moyens !» Les moyens peuvent être:

- faire une combinaison des nombres avec l'opération la plus vraisemblable compte tenu de ce qui se fait en classe,
- copier ou demander à un voisin qui est «fort»,
- répondre au hasard, s'il y a par exemple un choix entre des réponses.

Les trois premières explications sur les différences de résultats portent sur les conditions dans lesquelles s'effectue l'évaluation ministérielle. La quatrième (modification de règles du contrat didactique) nous paraît être importante parce qu'elle est relative au modèle d'enseignement ; elle laisse supposer que l'élève n'a pas la même «relation» à un problème selon que celui-ci est posé dans le cadre d'une évaluation ou dans le cadre d'un apprentissage par la résolution de problèmes.

2 - Quelques caractéristiques repérées de l'évaluation de type «CE2-6ème»

Les instructions officielles de l'école élémentaire (1995) font mention de l'évaluation en mathématiques en ces termes :

«Dans cette perspective[5], le développement d'une pratique régulière de l'évaluation permet une connaissance plus objective de l'élève, et un pilotage de classe mieux assuré. Cette pratique s'appuie notamment sur l'opération d'évaluation mise en place à l'entrée dans les cycles d'approfondissement et d'observation. Cette opération est conçue avec le souci de simplicité d'usage pour les maîtres, et pour les parents.»

L'évaluation officielle, dont le problème analysé est un élément, est donc explicitement signalée dans les Instructions.

Quelle est sa fonction ? Revêt-elle un caractère pronostique ou diagnostique ? un caractère sommatif ? un carctère formatif ?

A-t-elle au contraire un caractère normatif ?

Elle présente certainement plusieurs de ces caractères car, comme le dit Chevallard, *«entre évaluation sommative et évaluation formative, la frontière ne serait jamais exactement tracée»* et *«on aurait tort d'identifier trop vite à l'évaluation sommative les épreuves et examens traditionnellement institués dans les systèmes d'enseignement.»*

Cette évaluation est pour les maîtres, les parents, et l'institution, mais pas pour les élèves, semble-t-il... Elle ne débouche pas sur une note, et les résultats ne sont pas communiqués à l'élève directement (les parents peuvent avoir des informations en questionnant l'enseignant). Elle ne doit constituer qu'un élément de l'évaluation que le maître doit faire. Les épreuves qu'elle contient sont, le plus souvent, faciles à mettre en oeuvre parce que les documents sont à donner directement aux élèves, que les conditions de passation sont sans équivoque, qu'elles n'utilisent qu'un énoncé écrit de problème, et que les critères d'analyse des productions des élèves sont définis.

Cette évaluation, conduite maintenant depuis plusieurs années, amène d'autres remarques.

Elle peut avoir une incidence sur l'enseignement donné dans la mesure où *«la pression de l'institution et des parents accentue le pilotage de la classe par l'évaluation..»* (J-J Maurice) et que peut signifier alors «piloter la classe par l'évaluation» termes employés dans le texte officiel ?

Nous donnons maintenant un exemple de ce qui pourrait se produire. Cette évaluation est extérieure au maître, parce que proposée par l'institution ; cela a de nombreux avantages, bien sûr. Mais cela a aussi l'inconvénient nous semble-t-il, surtout si les épreuves se ressemblent d'année en année, d'indiquer trop explicitement au maître les savoirs et savoir-faire qui sont évalués : est-ce que cela ne risque pas de réduire son enseignement, l'année suivante, à l'apprentissage de ces savoirs et savoir-faire par la répétition d'exercices type, le maître amenant les élèves à «s'entraîner» sur des exercices proches de ceux de l'évaluation officielle ! Ainsi, le maître régule et programme l'activité de la classe.

Par ailleurs, les problèmes proposés peuvent mettre en jeu et donner l'occasion d'évaluer des savoirs et/ou savoir-faire (imprévus et non identifiés) autres que ceux qu'elle est sensée évaluer. Nous avons étudié, par exemple, le problème de proportionnalité ci-dessous proposé aux élèves de CE2 la même année (1994) et dans le même cadre de l'évaluation ministérielle :

---

5 déterminer les meilleures stratégies d'apprentissage, repérer les erreurs des élèves, définir des actions de remédiation.

Un stylo coûte 8F.
Complète le tableau :

Nombre de stylos	Prix à payer en francs
1	8
2	....
3	24
4	32
5	....
....	64
10	....

La disposition en tableau et la progression arithmétique des nombres (1 2 3 4 5...) sont probablement l'explication au fait que bon nombre d'élèves répondent 6 stylos pour 64F !

Les épreuves d'évaluation nationale au CE2 n'ont lieu qu'une fois dans l'année scolaire. Si elles permettent à l'enseignant de faire une appréciation des connaissances à un certain moment, elles ne lui permettent pas de constater les effets de son enseignement sur les connaissances des élèves. Il lui est donc nécessaire de prévoir d'autres évaluations.

3 - Conclusion

Les évaluations de type CE2-6ème ne sont pas, selon, moi suffisantes pour mesurer l'évolution des connaissances au cours de l'apprentissage. Des questions se posent alors au maître :

De quelles évaluations a-t-il besoin pour «piloter sa classe» ?

Comment peut-il contrôler «l'avancée» de l'élève dans le champ des connaissances mathématiques ?

Faut-il qu'il conçoive d'autres épreuves ? Quelles doivent en être les caractéristiques (fréquence, longueur, contenu, modalités de passation...) ? Est ce qu'on doit évaluer le procédé de l'élève ? le résultat qu'il propose ? les deux ? (nous notons que dans le problème initial, c'est essentiellement le résultat qui est évalué).

Est-ce que ce sera un moyen de stimuler les élèves ?

Devra-t-il noter et situer les uns par rapport aux autres ?

La partie qui suit présente une proposition pour suggérer des éléments de réponse à ces questions afin de clarifier le cadre dans lequel les épreuves d'évaluation sont données. Pour disposer d'outils d'analyse sont proposées des épreuves du point de vue de leur contenu ainsi que des productions des élèves..

II UNE PROPOSITION DE PROTOCOLE D'ÉVALUATION

Nous proposons maintenant un protocole d'évaluation relatif à la proportionnalité sur une période assez longue d'apprentissage (une année), et dans un cadre précis que nous allons décrire. Il est sensé évaluer en particulier l'utilisation des propriétés de linéarité pour résoudre des problèmes relevant de ce domaine.

Nous situons ces épreuves plutôt dans le cadre d'une évaluation formative. Celle-ci, selon Noizet et Caverni (1978) *«a pour souci que tous les élèves atteignent l'objectif que l'on s'est fixé, avec donc, l'intention d'homogénéiser»*. Elle suppose la construction de tests «critériels» dans lesquels la performance individuelle *«n'est plus jugée en fonction de celle des autres, mais en fonction de la distance qui la sépare de l'objectif»* (De Landsheere 1979[6]). Nous décrivons la démarche générale, quelques épreuves, et l'analyse des productions des élèves qui en a été faite.

L'équipe INRP, chargée de réaliser des situations qui servent de support aux apprentissages numériques au cycle 3, a conçu des épreuves d'évaluation à conduire en classe dans un cadre qui se veut être celui de l'apprentissage par la résolution de problème. Ces épreuves sont donc proposées aux élèves dans des classes dont les maîtres «enseignent» au moyen des situations et selon le planning prévus. Il est bien certain que deux maîtres différents peuvent, bien qu'utilisant les situations prévues selon le planning prévu, en faire une «adaptation» personnelle qui les transforme notablement, ne serait-ce que parce que le contrat maître-élèves n'est pas le même.

Après une analyse didactique d'un exemple d'épreuves, nous présentons une analyse des productions des élèves dans une classe de CE2 impliquée dans la recherche.

A - LE FIL DIRECTEUR

1. Construire des problèmes mettant en jeu les diverses connaissances relevant de la «notion» que l'on veut évaluer, en articulation avec les situations d'apprentissage qu'il est prévu de conduire. Prendre en compte pour cela en particulier :

- la position des problèmes par rapport à ceux des situations d'apprentissage de la notion à évaluer (changement de contexte éventuel, choix des variables didactiques et de leurs valeurs en fonction de celles des situations d'apprentissage...) ;
- la position des problèmes par rapport aux situations d'apprentissage des autres notions qui ont une incidence sur la notion à évaluer... Par exemple, pour évaluer les connaissances des élèves sur la technique opératoire de la multiplication, il est nécessaire de positionner l'épreuve d'évaluation par rapport aux situations qui développent

*la technique de calcul d'un produit,
*l'apprentissage de la règle des zéros,
*la mémorisation des tables...

2. Faire l'analyse préalable des variables et des procédures de résolution de ces problèmes, pour savoir ce que l'on attend des élèves et pour savoir comment

6 Ces indications sont extraites de «Pour une analyse didactique de l'évaluation» de Y.Chevallard et S.Feldmann, 1986.

l'obtenir.

Il est possible de modifier légèrement certaines valeurs de variables didactiques sur ces différentes épreuves, sans que le problème change fondamentalement de nature, pour adapter ces problèmes à l'évolution des connaissances des élèves sur le champ numérique, par exemple : taille des nombres en jeu, caractère entier ou décimal de ces nombres...

3. Organiser des passations individuelles de ces problèmes à différents moments de l'année scolaire, trois fois par an par exemple (avant, pendant et après apprentissage) et éventuellement à différents niveaux de classe ou même de cycle. Il peut être utile, si ces épreuves sont qualifiées officiellement dans la classe d'épreuves d'évaluation, de préciser aux élèves qu'ils doivent résoudre le problème comme d'habitude et que ce ne sera pas noté. Mais il serait souhaitable en fait de ne rien dire du tout, mais, à la fin de l'épreuve, le maître peut indiquer que, cette fois, il n'y a pas de phase collective prévue pour la validation des problèmes.

4. Analyser les productions des élèves.

- Évaluer l'exactitude des résultats sans toutefois y accorder trop d'importance, parce que des élèves peuvent faire une erreur de calcul qui ne dénote pas nécessairement une déficience du point de vue de la connaissance évaluée.
- Situer les élèves dans la hiérarchie des procédures: ce sont elles surtout qui renseignent sur le sens donné par l'élève au problème.
- Analyser l'évolution des procédures entre deux évaluations et mesurer l'effet des apprentissages conduits.

5. Ne pas donner de «retour» aux élèves sur ces problèmes ; dans le cadre de la classe de CE2, c'est possible, et donc il n'y a pas

*de correction,
*d'appréciation explicite ou implicite (de note en particulier).

B - Un premier exemple au CE2

On considère le problème suivant :

2 croissants coûtent 8 francs.
3 croissants coûtent 12 francs.
Combien coûtent 5 croissants ?
Combien coûtent 10 croissants ?
Combien coûtent 20 croissants ?
Combien coûtent 30 croissants ?

1 - Caractéristiques didactiques

Les grandeurs en jeu sont, un nombre d'objets d'une part, un prix, d'autre part. La relation de proportionnalité qui lie les mesures de ces grandeurs est une relation non dégénérée, même s'il est possible pour l'élève de trouver facilement le prix unitaire. Les nombres choisis permettent l'utilisation des procédures de linéarité. Les nombres de croissants sont choisis multiples de 5 ou de 10 pour faciliter les calculs.

2 - Procédures de résolution

p désigne le prix unitaire et n le nombre de croissants.

Appui sur le prix unitaire p

A : addition réitérée de n termes égaux à p
A' : addition réitérée de p termes égaux à n
AA : addition de blocs d'additions
AM: addition de multiples
M : multiplication
T : résultat de la table mémorisé
P : prélinéarité

Pas de recherche du prix unitaire

M' : multiplication (sans recherche du prix unitaire)
L : linéarité

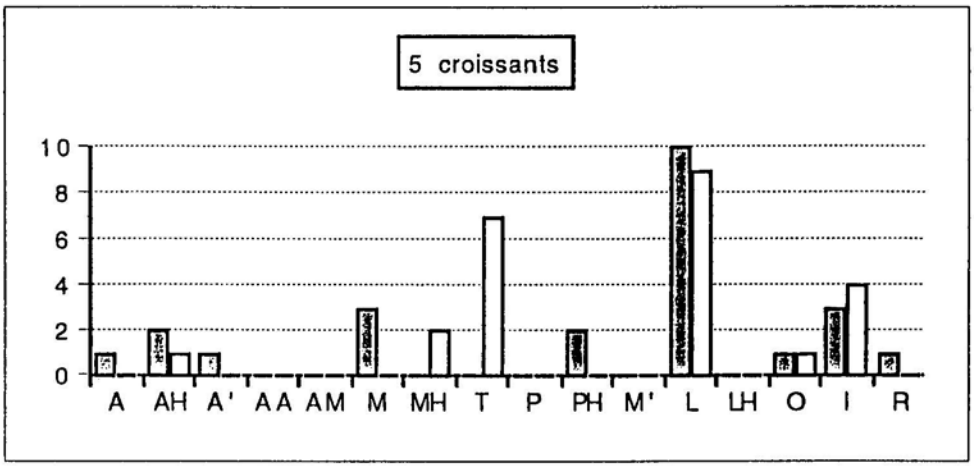
Autres cas

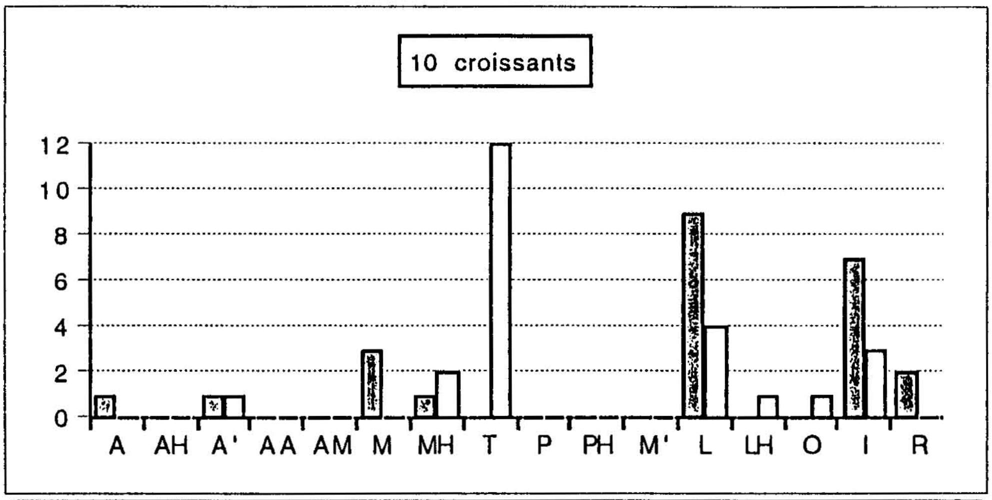
O : absence de procédure apparente (mais l'élève propose un résultat)
I : procédure inadaptée
R : absence de procédure et de résultat

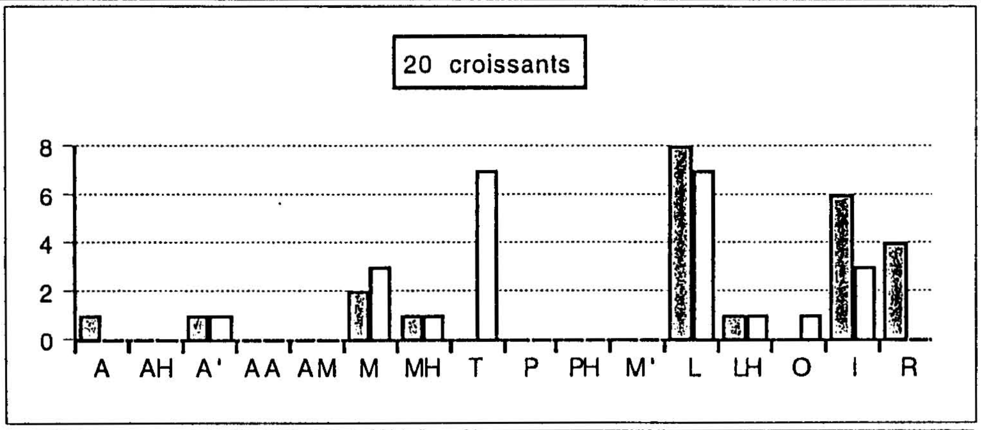
3 - Résultats

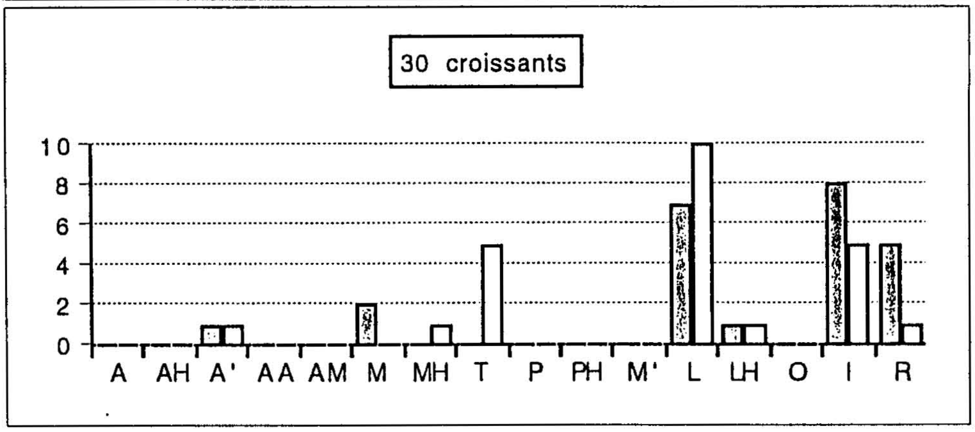
Les problèmes ont été donnés au début de novembre 1995 (histogramme noir) et en février 1996 (histogramme blanc) dans le CE2 d'Alain Colenson à Valence.

Le code H, joint à l'un des codes précédents, signale que l'élève a fait une hypothèse fausse sur le prix unitaire.









4 - Observations et conclusion du point de vue des apprentissages

Il y a une baisse modérée du nombre d'élèves qui, soit ne produisent rien, soit ont une procédure inadaptée.

Il y a une baisse modérée du nombre d'élèves ayant des procédures de novice (A ou AA ou AH).

Il y a augmentation significative du nombre d'élèves faisant le calcul dans la tête ou ayant mémorisé des résultats (procédure T), sauf peut-être pour la dernière question où la procédure de linéarité reste assez employée (c'est intéressant d'utiliser des résultats déjà acquis...)

On peut penser - mais il faudrait faire une analyse plus fine pour le vérifier - :

- que des élèves n'ayant pas de procédure adaptée, ou incapables de donner une réponse passent parmi ceux qui ont des procédures de novice;

- que des élèves ayant des procédures de novice se mettent à utiliser des procédures plus performantes.

L'apprentissage effectué sur la multiplication semble avoir fait avancer un peu les élèves.

C - Un second exemple au CE2

Problème :

Répertoire disponible: *3x7=21 10x7=70 7x7=49*
7x4=28 7x5=35 2x7=14

Un pain coûte 7 francs.
Combien dépense-t-on pour acheter :
2 pains ?
4 pains ?
10 pains ?
6 pains ?
11 pains ?
12 pains ?
20 pains ?
15 pains ?

1 - Caractéristiques didactiques

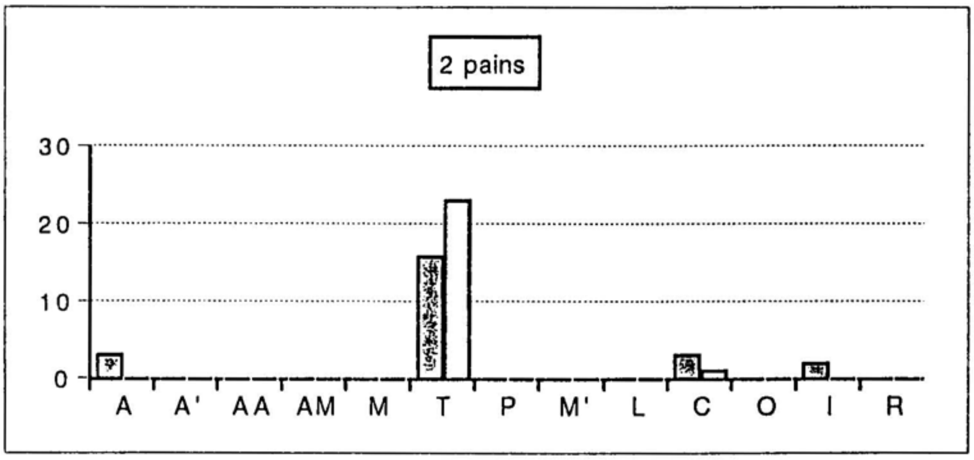
Les types de grandeurs (nombre, prix) sont les mêmes que pour le problème des croissants, les valeurs numériques aussi; mais la valeur unitaire est donnée et il y a un répertoire de produits, car la table de 7 est encore peu connue.

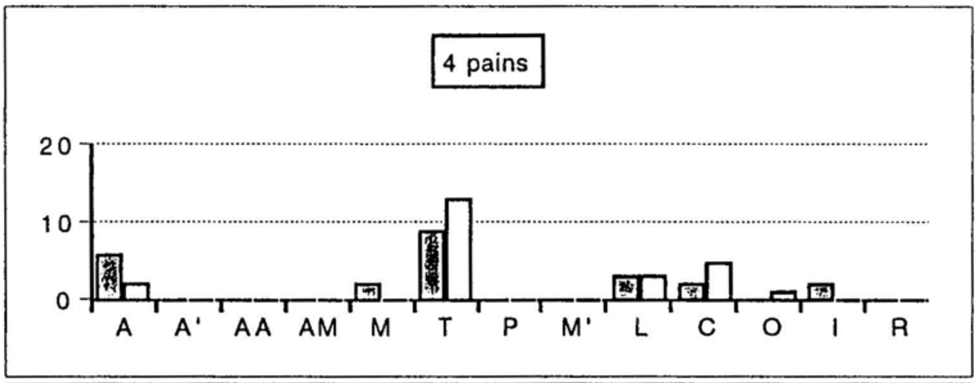
Les questions portent sur des nombres de pains autres que 5 et sur des nombres de pains multiples de 10 comme cela est le cas dans «croissants».

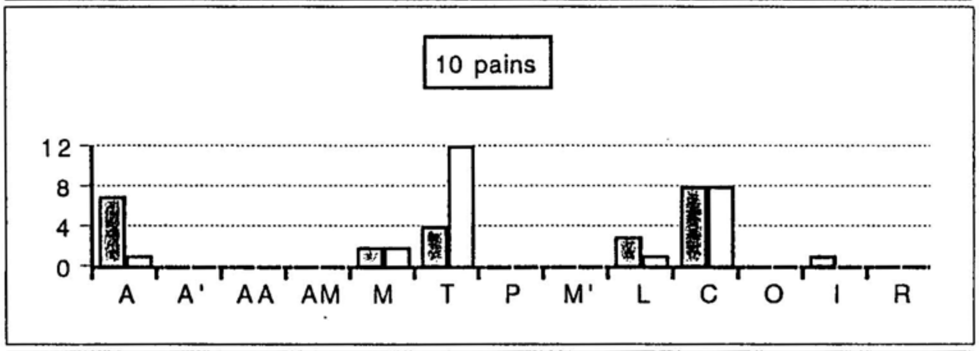
Aux procédures de résolution précédentes, il est donc nécessaire d'ajouter celle qui consiste à lire le résultat dans le répertoire (C).

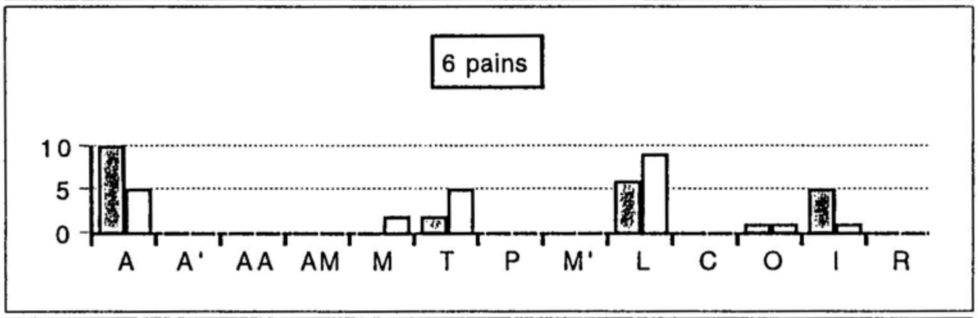
La table de 7 ne fait l'objet d'aucun apprentissage entre les deux évaluations.

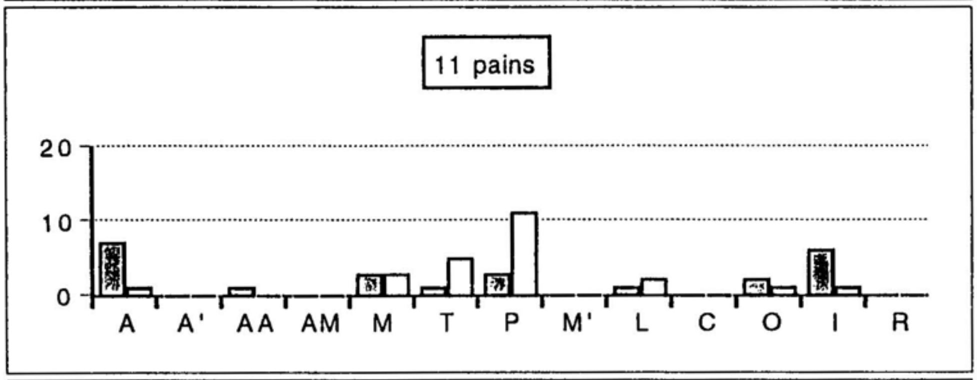
2 - Résultats et éléments d'analyse

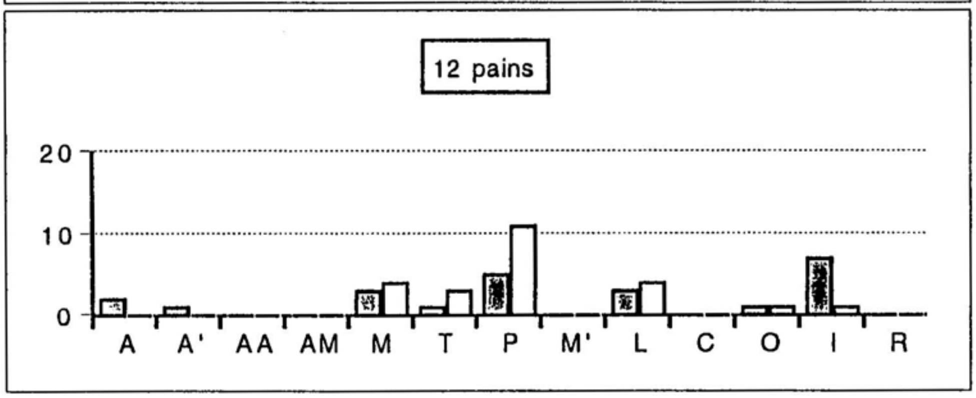


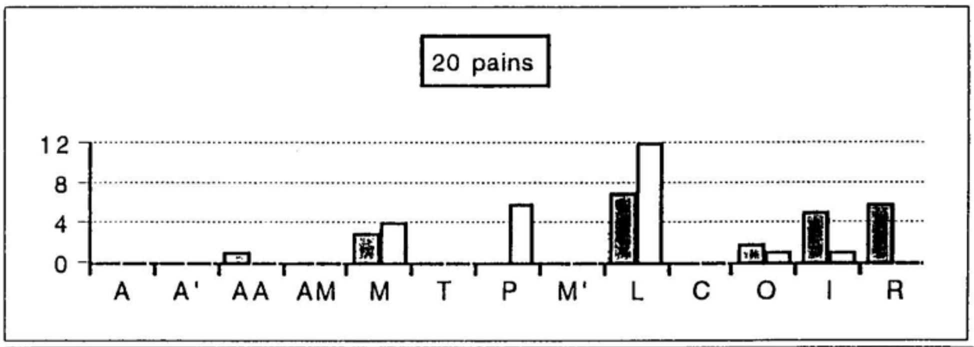

4 pains
20
10
0
A A' AA AM M T P M' L C O I R

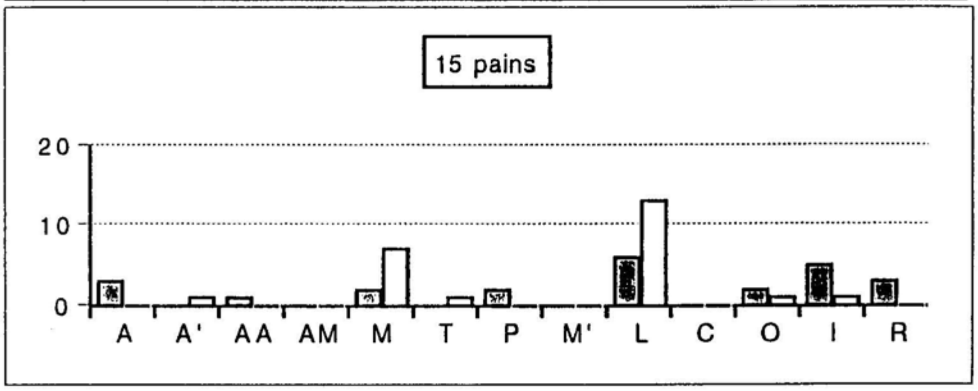

10 pains
12
8
4
0
A A' AA AM M T P M' L C O I R


6 pains
10
5
0
A A' AA AM M T P M' L C O I R


11 pains
20
10
0
A A' AA AM M T P M' L C O I R


12 pains
20
10
0
A A' AA AM M T P M' L C O I R





Il y a une moins grande dispersion que dans le problème «croissants» :
- moins d'élèves ayant des procédures de novice;
- moins d'élèves ne donnant pas de sens (ne donnant de trace ni de procédure ni de résultat (R), ou ayant une procédure inadaptée (I).

Des erreurs de calcul persistent, mais dans l'ensemble, il y a aussi progrès dans les calculs. Les items ne servent pas à évaluer la capacité à calculer.

Dans un certain nombre de cas, la procédure T est en fait L ou P, mais les élèves font le calcul de tête et signalent qu'ils l'ont fait «par coeur».

Certaines procédures prévues n'apparaissent pas. D'autres disparaissent.

D - ÉVOLUTION DES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

Nous présentons ci-dessous quelques travaux individuels[7].

° Un élève qui a encore des difficultés

Pierre-Camille calcule systématiquement le double du nombre de pains à la première évaluation :

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 1~~4~~4 F par coeur

6 pains: 12 F. par coeur

4 pains: ~~X~~16 F par coeur

11 pains: 22 F répertoire

$$\begin{array}{r} 11 \\ +11 \\ \hline 22 \end{array}$$

[7] Il était demandé aux élèves d'indiquer comment ils trouvaient le résultat : «par cœur», utilisation du «répertoire» ou encore indication du calcul effectué. Souvent le terme «par cœur» est utilisé lorsque l'élève calcule mentalement le résultat.

10 pains: 20 ~~10~~ par cœur

12 pains: 24 ~~8~~F par cœur

3 pains: 6F par cœur

20 pains: 40 F par cœur

8 pains: 16 par cœur

15 pains: 30F

$$\begin{array}{r} 15 \\ +15 \\ \hline 30 \end{array}$$

11.95 Pierre-Camille.

Mais sa seconde évaluation témoigne de quelques progrès : il développe des procédures mieux maîtrisées tant du point de vue du sens donné que du calcul effectué. Certaines propriétés sont mieux apprises (linéarité, règle des zéros).

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 14F par cœur

11 pains: 77F

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 7 \\ \hline 77 \end{array}$$

4 pains: 26F par cœur

12 pains: 84F

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 7 \\ \hline 84 \end{array}$$

6 pains: ~~4~~0F par cœur

15 pains: 85F

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 7 \\ \hline 85 \end{array}$$

10 pains: 70F répertoire

20 pains: 140F

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 7 \\ \hline 140 \end{array}$$

02.96 Pierre-Camille.

30 pains: 230F

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 7 \\ \hline 230 \end{array}$$

° **Des élèves qui ont progressé et qui ne rencontrent plus de grosses difficultés**

Matthieu donne plusieurs résultats incohérents à la première évaluation pour 2, 8, 11, 12, 20 pains, et ne développe guère de procédures de calcul écrit.

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 49 F
par coeur

4 pains: 28 F
par coeur

10 pains: 70 F
par coeur

3 pains: 21 F
par coeur

8 pains: 68 F
par coeur

6 pains: 42 F
par coeur

11 pains: 27 F
par coeur

12 pains: ~~27~~ ~~84~~ 47 F
par coeur

20 pains: ~~84~~ 47 ~~14~~2
par coeur

15 pains: 105 F
par coeur

Matthieu 11.95

A la seconde évaluation, il développe des procédures de calcul s'appuyant sur les propriétés de la multiplication connues et travaillées.

2 pains: 14 F par coeur

4 pains: 28 F

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 14 \\ \hline 28 \end{array}$$

10 pains: 70 F par coeur

6 pains: 42 F

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}8 \\ +\ 14 \\ \hline 42 \end{array}$$

11 pains: 77 F par coeur

12 pains: 84 F

$$\begin{array}{r} \overset{1}{7}7 \\ +\ 7 \\ \hline 84 \end{array}$$

20 pains: 140 F par coeur

15 pains: 105 F

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

30 pains: 210 F

$$\begin{array}{r} \overset{0}{1}40 \\ +\ 70 \\ \hline 210 \end{array}$$

Matthieu 02.96

Judith

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 14F
répertoire

4 pains: ~~56F~~ 28F
répertoire

$$\begin{array}{r} 14 \\ +14 \\ \hline 28 \end{array}$$

10 pains: ~~80?~~ 56F
par cœur

$$\begin{array}{r} 28 \\ +28 \\ \hline 56 \end{array}$$

3 pains: 21F

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

8 pains: 42F

$$\begin{array}{r} 21 \\ +21 \\ \hline 42 \end{array}$$

6 pains: ~~14~~ 84F

$$\begin{array}{r} 42 \\ +42 \\ \hline 84 \end{array}$$

11 pains: 56F

7+7=14 14+14=28 28+28=56

7+7+7+7+7+7+7+7 + + + +

14 14 + 14 14

28 + 28

56F

12 pains: 80F

$$\begin{array}{r} 56 \\ +12 \\ +12 \\ \hline 80 \end{array}$$

20 pains: ________

15 pains: ________

Judith 11-95

Judith donne des réponses exactes à tous les exercices lors de la deuxième évaluation ce qui était loin d'être le cas lors de la première évaluation. Elle semble connaître La règle des produits par 10 (10 pains). Elle abandonne des calculs par addition de blocs additifs pour des calculs par produits, soit calculés de tête (11 pains, 20 pains), soit calculés par écrit (12 et 15 pains).

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: ~~14F répertoire~~
répertoire

4 pains: 28F
répertoire

10 pains: 70F
par cœur

6 pains: 42F

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 6 \\ \hline 42 \end{array}$$

Judith 02.96

11 pains: 77F
par cœur

12 pains: 84F

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \end{array}$$

20 pains: 140F
par cœur

15 pains: 105F

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

30 pains: 210F
par cœur

° **Des élèves disposant déjà, en novembre, de connaissances sûres**

Clémentine réussit bien la résolution des problèmes dès la première évaluation, en développant des procédures de novice le plus souvent.

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 14 F par coeur

4 pains: 28 F par coeur

10 pains: 70 F

~~28 +14 +14 +14~~

28 ← 4x7=28
+28 ← 4x7=28
+14 ← 2x7=14
70

3 pains: 21 F par coeur

8 pains: 56 F

28 ← 4x7=28
+28 ← 4x7=28
56

6 pains: 42 F

28 ← 4x7=28
+14 ← 2x7=14
42

11 pains: 77 F

35 ← 5x7=35
+28 ← 4x7=28
+14 ← 2x7=14
77

12 pains: 84 F

35
+35
+14
84

20 pains: 140 F

70 ← 10x7=70
+70 ← 10x7=70
140

15 pains: 105 F

70 ← 10x7=70
+35 ← 5x7 35
105

Clémentine 11.95

A la seconde évaluation, elle emploie des procédures plus efficaces et donne des explications.

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 14F

Je le sais par coeur.

4 pains: 28F

Je le sais par coeur.

10 pains: 70F

Je le sais par coeur.

6 pains: 42F

28F ← le prix de 4 pains
+ 14F ← le prix de 2 pains
42F

Je me suis servi du prix de 4 pains et le prix de 2 pains et j'ai trouvé le prix de 6 pains.

11 pains: 77F

Je le sais par coeur.

12 pains: 84F

J'ai pris le prix de 11 pains et dans ma tête j'ai rajouté 7F.

20 pains: 140F

J'ai additionné 2 fois le prix de 10 pains dans ma tête et j'ai trouvé le prix de 20 pains

15 pains: 105F

70F le prix de 10 pains
+ 28F le prix de 4 pains
+ 7F le prix d'un pain
105F

J'ai additionné le prix de 10 pains de 4 pains et le prix de 1 pain et j'ai trouvé le prix de 15 pains.

30 pains: 210F

140F ← le prix de 20 pains
+ 70F ← le prix de 10 pains
210F

J'ai pris le prix de 20 pains et le prix de 10 pains et j'ai trouvé le prix de 30 pains.

Clémentine 02-96

Jules B.

La mémorisation de résultats de produits par 10 remplace la linéarité (10 pains). Des calculs «faciles» (blocs obtenus par produits par 10 et linéarité) remplacent les calculs de produits par blocs additifs «ordinaires» (11 pains) ou par la multiplication (20 pains ou 30 pains).

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 14 F

par coeur

4 pains: 28 F

par coeur

10 pains: 70 F

$5 \times 7 = 35$; $35 + 35 = 70$

3 pains: 21 F

par coeur

8 pains: 56 F

$7 + 7 + 7 + 7 = 28$; $28 + 28 = 56$

6 pains: 42 F

$7 \times 6 = 42$

$14 + 14 = 28$ (14 ← 2×7 ; 14 ← 2×7)

$28 + 14 = 42$ (28 ← 4×7 ; 14 ← 2×7)

11 pains: 77 F

$5 \times 7 = 35$; $35 + 35 = 70$; $70 + 7 = 77$

12 pains: 88 F

$12 \times 7 = \cancel{88}$

20 pains: 140 F

$20 \times 7 = 140$

15 pains: 105 F

$15 \times 7 = 105$

$70 + 35 = 105$ (70 ← 10×7 ; 35 ← 7×5)

Jules B. 11-95

Combien dépense-t-on pour acheter:

2 pains: 14F

par cœur

4 pains: 28F

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 14 \\ \hline 28 \end{array}$$

10 pains: 70F

par cœur

6 pains: 42F

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}8 \\ +\ 14 \\ \hline 42 \end{array}$$

02.96 Jules B.

11 pains: 77F

$$\begin{array}{r} 70 \\ +\ \ 7 \\ \hline 77 \end{array}$$

12 pains: 84F

$$\begin{array}{r} \overset{1}{7}7 \\ +\ \ 7 \\ \hline 84 \end{array}$$

20 pains: 140F

$$\begin{array}{r} 70 \\ +70 \\ \hline 140 \end{array}$$

15 pains: 105F

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

30 pains: 210F

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}40 \\ +\ 70 \\ \hline 210 \end{array}$$

III LES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE PROPOSÉES AUX ÉLÈVES ENTRE LES DEUX ÉVALUATIONS.

Les situations d'apprentissage proposées pendant la période concernée sont des situations où le correspondant de l'unité est donné : elles mettent en jeu des problèmes multiplicatifs classiques. Il est donc normal que les progrès des élèves sur le problème «croissants» où le prix unitaire n'est pas donné, ne soient pas très significatifs. Ils le sont davantage, en revanche, pour le problème des «pains».

Nous décrivons ci-dessous de manière résumée les situations d'apprentissage proposées aux élèves entre les deux évaluations, par le biais des problèmes qu'ils ont à résoudre et des objectifs d'apprentissage. Pour des précisions complémentaires, on peut se reporter à Ermel CE2.

A - LES FACTURES

Cette situation se trouve dans le module : «résoudre des problèmes multiplicatifs» (Ermel CE2 p. 216).

Objectifs

- savoir utiliser la multiplication dans le cas d'une relation de proportionnalité (quantité d'objets/prix) ;
- savoir résoudre des problèmes complexes, en particulier de division, ou mettant en jeu l'addition et la multiplication ;
- retrouver ou se poser le problème de la multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre.

Problème 1

Alain a acheté 8 livres.
Bernard a acheté 6 disques.
Caroline a acheté 10 classeurs.
Qui a dépensé le plus ? Qui a dépensé le moins ?

Le prix de chaque sorte d'objets n'est communiqué aux élèves que lorsqu'ils éprouvent la nécessité d'avoir ces données.

Problème 2

Chaque enfant dispose d'une somme à dépenser, entre 400 et 1000F. Il possède un bon d'achat de 700F par exemple.

Il choisit ce qu'il veut dans la limite de la somme dont il dispose, et en tenant compte de contraintes données.

Exemples de contraintes (écrites sur le bon de commande) :

- choisir une seule sorte d'objets et dépenser au plus 700F ;
- choisir une seule sorte d'objets, dépenser le plus possible, sans dépasser 700F;
- choisir au moins deux sortes d'objets et dépenser le plus possible sans dépasser 700F ;
- choisir au moins deux sortes d'objets et dépenser entre 500 et 700F.

B - HUIT BILLES PAR JOUR

Cette situation se trouve dans le module : «savoir calculer» (Ermel CE2 p. 236).

Objectifs

- savoir élaborer une table de multiplication ;
- savoir utiliser et expliciter des stratégies de calcul mental de produits mettant en jeu la règle des zéros, la linéarité et le calcul de proche en proche (prélinéarité) ;
- connaître la table de 8 ;
- connaître la règle des zéros.

Problème 1

Chaque jour, les enfants d'une classe mettent 8 billes dans une boîte. Combien de billes y aura-t-il dans la boîte au bout de 3 jours, 4 jours, 5 jours, 10 jours, 11 jours, 20 jours ?

Problème 2

22, 25,27, 30, 33, 100, 102 jours ?
(en laissant disponible le répertoire construit lors du problème 1)

Problème 3

10, 20, 30, 40, 50, 70, 80,100, 110, 120, 200 jours ?

C - SIX FOIS LA MISE

Cette situation se trouve dans le module : savoir calculer (Ermel CE2 p.240).

Objectifs

- savoir utiliser la linéarité et la prélinéarité pour calculer des produits ayant un facteur constant ;
- connaître les tables de 5 et de 6.

On pourra se reporter au livre de référence pour la description de la situation.

D - Billets

Cette situation se trouve dans le module : «savoir calculer» (Ermel CE2 p. 244).

Objectifs

- savoir calculer, par écrit, AxB avec $10 \leq A < 100$ $10 \leq B < 100$ par addition de produits partiels ;
- savoir décomposer additivement un produit selon un des termes (l'autre restant inchangé) pour l'évaluer plus facilement ;
- connaître la règle des zéros ;
- connaître des produits faciles à obtenir ;
- connaître la technique opératoire de multiplication par un nombre de deux chiffres.

Problème

Pour organiser une sortie au «Château des chevaliers», le directeur d'une école achète A billets de car à B francs le billet.
Calculer l'argent qu'il a dépensé.

Les valeurs de A et B définissent les différentes étapes de la situation.

IV - CONCLUSION

En résumé, pour le type d'évaluation qui vient d'être décrit, il nous paraît exister quelques repères qui peuvent guider le maître.

Les épreuves doivent faire l'objet d'une analyse didactique permettant :
- d'expliciter les connaissances mathématiques mises en jeu, et notamment de vérifier si celle à évaluer en fait bien partie ;
- d'en éliminer les éléments éventuels susceptibles de parasiter la résolution ;
- de les situer dans l'apprentissage de la (ou les) connaissance(s) évaluée(s) et par rapport aux apprentissages des autres connaissances, notamment de celles qui lui sont liées (moment(s) dans l'année scolaire, adaptation des variables, limitation des connaissances utiles à la résolution...).

Cela nous semble donc être un travail qui ne peut s'improviser.

Par ailleurs, il nous semble que, le plus souvent, lors des épreuves d'évaluation en général, les «règles du jeu» changent très sensiblement pour les élèves, pour les raisons que nous avons évoquées plus haut. Cela risque de perturber certains d'entre eux, notamment les moins assurés, et de fausser ainsi les résultats de l'évaluation. Il nous paraît donc important de modifier le moins possible les règles du contrat didactique entre les problèmes pour l'apprentissage, d'une part, et les problèmes pour évaluer, d'autre part.

N'oublions pas enfin que le temps consacré à l'évaluation est du temps pris sur le temps d'apprentissage.