
ÇA FOURMILLIONNE

EXPLOITATION D'UNE SÉQUENCE PUBLIÉE DANS "ERMEL"

CEI

Christiane DESTOUESSE*

Institutrice, Ecole Michelet, Talence, Gironde

Depuis déjà longtemps à l'école Michelet, nous nous posons le problème d'une situation qui permettrait de faire manipuler par les élèves un nombre d'objets relativement grand (supérieur à 1000) dans des conditions matérielles raisonnables et dans laquelle les élèves auraient l'occasion de mettre en œuvre la numération décimale. D'autre part, nous avons remarqué que pour un très grand nombre d'enfants au CE₁, les va-et-vient entre les écritures et les collections réelles étaient absolument indispensables pour que la compréhension du nombre puisse se construire.

Nous avons découvert dans Ermel¹ une proposition d'activité dans ce sens. Cette activité, "les fourmillons", appartient au module "Désignations écrites et orales des nombres" dans le chapitre "Connaître les nombres". Nous l'avons exploitée en modifiant plusieurs de ses caractéristiques ou variables (on pourra se reporter à l'annexe).

1. MODIFICATIONS RELATIVES AUX VARIABLES² DE LA SITUATION

Nous avons choisi d'utiliser des **contenants non-transparents** (enveloppes) et de **ne rien écrire sur les enveloppes**. En effet, des observations diverses à Michelet avaient mis en évidence les confusions que font particulièrement des élèves en échec entre le nombre d'objets ou éléments de la collection et le nombre d'objets d'un rang déterminé (nombre de dizaines par exemple). Le fait de ne rien écrire sur les enveloppes oblige les élèves à repérer et contrôler incessamment ce qu'ils sont en train de dénombrer. Les dizaines et les centaines peuvent alors être perçues comme des objets à part entière et la position des chiffres prendra tout son sens.

* Avec l'amicale participation de ses collègues, Dominique Vizcaino, Marie-Lise Bonnet et Denise Greslard.

¹ ERMEL, Apprentissages numériques, Hatier 1993.

² "variable" : au sens défini par G.Brousseau.

Nous avons choisi un nombre très grand (**supérieur à 3000**) de telle sorte que le nombre de centaines reste important. Il est indispensable de favoriser la répétition de la stratégie du groupement par 10.

La calculette n'a pas été mise à la disposition des élèves. Il nous a semblé plus intéressant que les élèves utilisent d'autres moyens de contrôle familiaux.

2. MODIFICATIONS RELATIVES AU DÉROULEMENT DE LA PREMIÈRE SÉANCE

Il n'y a **pas d'exercices préparatoires**. C'est le problème posé et sa dévolution aux élèves qui leur permet de proposer des stratégies.

Lorsque les dizaines sont réalisées (cf. Ermel, étape 2 de la première phase) et que se pose le problème de la suite, **deux stratégies sont proposées** par les élèves :

- on continue à faire des paquets de 10 (10 enveloppes blanches dans une enveloppe plus grande) ;

- on regarde ce que chaque élève détient à ce moment-là ("moi, j'ai quatre enveloppes blanches et trois allumettes" ; "moi, j'ai cinq enveloppes blanches et huit allumettes" ; etc...) et on fait la somme des nombres d'allumettes de toutes ces petites collections (43 + 58 + ...etc.).

L'enseignant propose alors à deux élèves d'effectuer le calcul de cette somme derrière le tableau, pendant que le reste de la classe continue les groupements.

Et ainsi de suite, pour les centaines.

La deuxième stratégie peut apparaître au moment du regroupement en dizaines ou du regroupement en centaines ou pas du tout. Dans le dernier cas, l'enseignant l'évoque, écrit l'addition au tableau et la calcule avec l'aide des élèves.

La stratégie du seul groupement par dix avec addition ou du seul groupement par cent avec addition n'est pas mise en compétition avec la répétition des groupements mais elle est regardée comme une autre stratégie.

A la fin de la séance, les élèves avec l'aide de l'enseignant lisent à haute voix le nombre total de la collection. L'enseignant le fait répéter par plusieurs élèves. Des élèves d'une classe de niveau CM viennent confirmer le nom du nombre de la collection en se servant de l'organisation décimale réalisée par les CE₁. Cela permet une **mise à l'épreuve immédiate de la méthode des groupements par 10** et montre "l'universalité" sociale de ce type de dénombrement : "c'est ainsi que tout le monde fait".

Au cours de la première séance, on écrit au tableau :

1 enveloppe blanche 10 allumettes

1 enveloppe beige 100 allumettes parce que $10 \times 10 = 100$

ou

$10+10+10+10+10+10+10+10+10+10 = 100$

1 grande enveloppe 1000 allumettes parce que $10 \times 100 = 1\ 000$

ou

$100+100+100+100+100+100+100+100+100+100=1000$

Mais pour les séances ultérieures, la seule trace gardée sera *la légende* :

1 enveloppe blanche	10 allumettes
1 enveloppe beige	10 enveloppes blanches
1 grande enveloppe	10 enveloppes beiges

3. CONSTRUCTION D'UNE DEUXIÈME SÉANCE

Après la première séance, nous avons construit la suite décrite ci-après.

OBJECTIFS

- Ecrire le cardinal d'une collection déjà organisée en mille, centaines, dizaines et unités.
- Trouver le nombre de centaines ou de dizaines ou d'unités, dans une collection déjà organisée.

MATÉRIEL

- 2 524 allumettes rangées dans des enveloppes
 - milliers : grandes enveloppes beiges
 - centaines : petites enveloppes beiges
 - dizaines : petites enveloppes blanches, disposées au milieu de la classe, visibles par tous (les quantités ne sont pas sur les enveloppes, mais la légende est au tableau).
- 25 enveloppes beiges supplémentaires
- des feuilles blanches et un feutre noir pour chaque élève
- des boîtes en carton pour ranger le tout.

DÉROULEMENT

Phase I

Consigne

“La dernière fois, pour connaître le nombre d'allumettes de notre grande collection, nous les avons rangées dans des enveloppes (rappel sur les groupements faits par paquets de 10 -les dizaines-, par paquets de 100 -les centaines-, etc.), puis nous avons écrit le nombre.

Aujourd'hui, je vous propose une nouvelle collection d'allumettes : celle de la classe A. Mais cette fois, elles sont déjà rangées dans les enveloppes et je vous demande donc de me dire oralement rapidement quel est le nombre d'allumettes”.

L'enseignant dépose au centre de la classe, de manière visible par **tous**, la collection de la classe A (les enveloppes sont disposée par couleur), sans rien dire.

Il s'agit ici d'une phase d'action individuelle orale pour réactiver la méthode et l'utiliser pour “dire combien il y en a, rapidement”.

L'enseignant laisse le temps nécessaire pour que la plupart des enfants puisse proposer un nombre mais cela doit aller très vite. Puis il écrit les propositions au tableau. La vérification se fait immédiatement en comptant ensemble le nombre de chaque type d'enveloppe et en suscitant des commentaires sur les erreurs faites (erreur de comptage, confusion du contenu des enveloppes, inversion des chiffres, etc.).

Le nombre exact est écrit au tableau sous la forme 2524. Il se peut que certains élèves fassent déjà des remarques sur l'écriture du nombre par exemple sur la signification de la place des chiffres, ou sur la relation entre le nombre de chiffres et le nombre de types d'enveloppes. Il ne s'agit pas encore d'institutionnaliser ces remarques mais de les relever comme indices à confirmer au fur et à mesure des activités.

Phase II

Consigne 1

“Maintenant, je vais vous demander de prévoir combien il y a d'enveloppes blanches, on pourrait aussi dire combien il y a de dizaines en tout dans cette même collection. Prévoir, c'est être capable de dire de sa place, combien on a utilisé d'enveloppes blanches pour cette collection, combien elle contient de dizaines. Vous direz votre prévision et ensuite nous vérifierons si votre prévision était exacte en comptant les enveloppes blanches. Si vous voulez de quoi écrire, vous avez du papier à votre disposition et vous pouvez faire ce que vous voulez sur la feuille. Quand vous pensez avoir trouvé le nombre d'enveloppes blanches, c'est-à-dire le nombre de dizaines, vous l'écrivez sur ce papier vert que je vous distribue”.

Il est inscrit sur le papier vert : “Il y a enveloppes blanches”.

Les élèves travaillent individuellement. L'enseignant circule et incite les élèves qui “calent” à faire une prévision, même approximative. Au bout de dix minutes, il écrit au tableau toutes les réponses proposées.

De même que lors de la première phase, certaines remarques peuvent fuser lors du recueil des réponses : “c'est impossible” ou “tu n'as pas compté les bonnes enveloppes”. L'enseignant les relève comme des possibilités d'erreurs mais il attendra que la vérification soit terminée pour lancer le débat.

Un groupe d'élèves est chargé de contrôler les réponses.

La vérification se fait en ouvrant les grandes enveloppes (les milliers) puis les enveloppes beiges (les centaines) et en comptant collectivement le nombre d'enveloppes blanches.

L'ensemble de la classe se prononce sur les prévisions : exactes ou inexactes.

Consigne 2

“Regardons maintenant comment ont fait ceux qui avaient bien prévu pour pouvoir tous gagner une prochaine fois”.

L'enseignant demande aux gagnants d'expliquer comment ils ont fait et il pointe avec tous les différentes stratégies utilisées :

- “J'ai mis $10 + 10 + 10$ etc. pour chaque enveloppe beige et après j'ai calculé”.
- “Je me suis rappelé que dans chaque enveloppe beige, il y en avait 10 et j'ai compté dans ma tête”.
- “J'ai vu le nombre de la collection et en le regardant, j'ai vu les dizaines”, etc.

Il demande aussi aux perdants, avec l'aide de la classe et en formulant les explications, quelles erreurs ils ont pu faire. Cette partie est assez rapide car les élèves en sont encore à des tâtonnements et ne peuvent pas toujours décrypter ou expliciter leurs erreurs.

On écrit au tableau :

2 524 allumettes... 252 dizaines ou 252 enveloppes blanches.

La collection est reconstituée avec les différents types d'enveloppes.

Consigne

“Autre question, toujours à propos de notre collection : combien y a-t-il d'enveloppes beiges ou combien y a-t-il de centaines ?”.

Même déroulement que pour la partie précédente et on complète au tableau :

2 524 allumettes...

il y a 252 dizaines ou 252 enveloppes blanches ;

il y a 25 centaines ou 25 enveloppes beiges.

Phase III

L'enseignant fait le point avec les élèves sur ce qu'ils savent faire maintenant et qu'ils ne savaient pas faire avant la séance. Il donne aussi aux élèves les possibilités d'entrevoir ce qu'il reste encore à résoudre ou à explorer.

Conclusion

On a vu qu'on peut prévoir le nombre de dizaines, de centaines quand on connaît le nombre *écrit* de la collection. Mais tout le monde n'y arrive pas encore très bien. Aussi je vous donnerai en atelier d'autres collections pour vous entraîner.

Et à votre avis, si au contraire on connaissait le nombre de centaines, de dizaines d'une collection, est-ce-qu'on pourrait prévoir le nombre total d'allumettes d'une collection ? Nous essaierons aussi.

PROLONGATIONS DES ACTIVITÉS À PARTIR DU FOURMILLION

Les ateliers

On installe dans un coin de la classe un certain nombre d'allumettes rangées dans des enveloppes. Chaque élève doit trouver, sans démolir la collection, le nombre d'unités ou d'allumettes, le nombre de dizaines ou d'enveloppes blanches, le nombre de centaines ou d'enveloppes beiges.

Cette activité se déroule sur quelques jours et quand tout le monde est passé à l'atelier, l'enseignant organise une correction collective.

On fait plusieurs jeux avec des collections entre 300 et 900, pour permettre aux élèves de progresser en se servant de la correction du jeu précédent. Nous avons constaté une progression des réussites assez rapide.

L'addition

On donne collectivement deux collections déjà organisées (rangées dans les enveloppes) et on demande aux élèves de prévoir le nombre total d'allumettes. La vérification se fait en réunissant toutes les enveloppes et en refaisant, si nécessaire, des enveloppes blanches et beiges (s'il y a des retenues).

Jeu du trésor (cf. Ermel CE₁ p. 329)

ANNEXE

Extrait de "ERMEL", " Les fourmillions", Apprentissages numériques", Hatier, 1993
Les cinq premières étapes de la première phase, pp.316-318

2. Les fourmillions

Description rapide

La classe va s'organiser pour dénombrer environ 2000 petits objets en effectuant des groupements par 10 puis par 100 (10 X 10) puis par 1 000 (10 X 100), (les groupements seront matérialisés par des sacs transparents fermés au soude-sacs ou des assemblages de cubes emboîtables, des enveloppes...).

Objectifs spécifiques

Rencontrer une fois dans l'année une grande collection et son organisation en groupements de 1 000, 100, 10 et unités.

Utiliser les groupements par 10 pour organiser le dénombrement d'une grande collection.

Découvrir la récursivité des groupements.

Découvrir les relations entre 10 et 100, entre 100 et 1 000.

Vivre une situation de référence qui donne du sens à la lecture des nombres à trois et quatre chiffres.

Matériel

Pour dénombrer : bouchons, capsules, pois chiche, haricots secs, cubes, rondelles, allumettes... ou tout autre matériel que l'on peut se procurer en grande quantité : un peu plus de 3 000 ; on en utilisera entre 2 000 et 3 000 dans la première phase et on complètera pour dépasser 3 000 dans la deuxième phase.

Pour emballer 3 000 objets : 300 petites enveloppes, 30 enveloppes moyennes et 3 grandes enveloppes, ou bien des boîtes de différentes tailles, des sacs de différentes couleurs.

Déroulement

EXERCICES PRÉPARATOIRES

- Le furet de 10 en 10 à partir de 10, le furet de 100 en 100 à partir de 100.
- Fabrication d'affiches :
 $10 + 10 = 20$
 $10 + 10 + 10 = 30$
 $10 + 10 + 10 + 10 = 40$
- etc.

PREMIÈRE PHASE

Étape 1 : Le problème

On réunit les enfants autour du tas d'objets collectés ; il n'est pas nécessaire que le maître sache exactement le nombre d'objets mais il serait bon que celui-ci soit compris entre 2 000 et 3 000. Puis on demande : « Combien y a-t-il d'objets ? Comment va-t-on faire pour savoir combien il y en a ? ». On examine tous ensemble les réponses et les procédures évoquées :

- « Il faut les compter » ;
- « Il faut en donner à chaque enfant, et on ajoutera tous les nombres » ;
- « Il faut prendre la calculatrice » ;
- « Il faut faire des paquets de 10, de 100 » ;
- « On pourra faire 10, 20, 30... ».

Prendre du temps pour amorcer un dénombrement un à un et s'apercevoir que c'est coûteux en temps. L'idée de grouper par 10 peut venir d'enfants ; certains peuvent avoir déjà vécu cette situation au CP (voir Ermel CP page 319).

Si personne ne fait cette proposition, c'est le maître qui la fera : « On va faire des tas de 10 que l'on va mettre dans les petites enveloppes et on écrira 10 sur chaque enveloppe. »

Étape 2 : Les groupements par dix

Le maître dépose sur chaque table une partie des objets. Chaque enfant dénombre 10 objets, les met sous enveloppe et écrit 10 sur l'enveloppe, puis il recommence jusqu'à épuisement du tas d'objets.

À la fin de ce travail, chaque groupe se retrouve avec des objets isolés, on décide de les regrouper, on charge un petit groupe d'enfants de faire les groupements par 10 et la mise sous enveloppe.

Étape 3 : Les groupements par cent

Quand tous les sacs de 10 sont prêts, on repose le même problème aux enfants : « Comment savoir combien il y a d'objets ? ».

Certains enfants vont proposer de compter les enveloppes et les objets isolés ou de compter de 10 en 10 pour chaque enveloppe ; le nombre important d'enveloppes (plus de 200) devrait les en dissuader.

D'autres, par référence au travail précédent ou au travail de CP, vont proposer de grouper les enveloppes par 10, pour obtenir des paquets de 100. Si cette idée n'émerge pas, le maître la proposera aux enfants, puis il demandera ce que l'on va écrire sur les nouvelles enveloppes. Il laissera du temps aux enfants pour chercher, calculer, faire des propositions :

- $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 100$;

- 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 ;

- 10 fois 10, cent.

Ces différentes procédures qui aboutissent au même résultat, doivent convaincre les enfants qu'une enveloppe moyenne regroupant 10 petites enveloppes, contient donc 100 objets. On écrit 100 sur les enveloppes moyennes. Le maître met en place une organisation de la classe pour réaliser les groupements de 100 ; et comme à l'étape précédente on regroupe les enveloppes de 10 qui restent dans chaque groupe.

Étape 4 : Les groupements par mille

On regroupe à nouveau tous les enfants autour de la collection organisée en une vingtaine d'enveloppes de 100, quelques enveloppes de 10 et quelques objets isolés. On s'entend rapidement sur ce qu'il convient de faire : faire des groupements de 10 paquets de 100. Puis on cherche comme à l'étape précédente ce que l'on va écrire sur les grandes enveloppes. En comptant de 100 en 100 : 100, 200, 300..., en additionnant $100 + 100 + \dots$, en multipliant.

La calculette est disponible à tout moment ; elle peut permettre, notamment ici, de passer d'une écriture additive $100 + 100 + 100 \dots$, ou multiplicative 10×100 au nombre total 1 000 encore mystérieux.

Étape 5 : Production d'une écriture du nombre d'objets de la collection

Les enfants ont, par exemple, obtenu :

- 2 grandes enveloppes de mille objets ;
- 6 enveloppes moyennes de cent objets ;
- 4 petites enveloppes de dix objets ;
- 8 objets.

Une nouvelle fois, le maître repose la question : « Combien y a-t-il d'objets ? »

Les enfants ne voient pas immédiatement dans les 2 grandes enveloppes, les 6 enveloppes moyennes... les 2 648 objets. Il faut leur laisser le temps de produire diverses écritures, avant d'exiger qu'ils écrivent l'écriture canonique qu'on présente comme étant la plus courte, celle qui est « calculée ».

Les procédures de calcul peuvent être très diverses :

- additions posées en colonnes ou en lignes ;
- utilisation de la calculette ;
- surcomptage de 1 000 en 1 000 puis de 100 en 100... :
« 1 000, 2 000, 2 100 ... 2 600, 2 610, 2 620, 2 630, 2 640, 2 641, 2 642 ... 2 648. » ;
- surcomptage pour chaque groupement puis addition posée ou à la calculette :
 $2\ 000 + 600 + 40 + 8$. On laissera à certains enfants le temps de poser des additions telles que $1\ 900 + 100 = 2\ 000$ ou de les faire à la calculette.