L'ENVIRONNEMENT CABRI-GEOMETRE
OUTIL DE MEDIATION SEMIOTIQUE
POUR LA NOTION DE GRAPHE D'UNE FONCTION.

Rossana FALCADE
Laboratoire Leibniz-Imag de Grenoble, équipe IAM

Résumé. Construire une conception dynamique de la notion de graphe[1] d'une fonction se révèle être un objectif didactique aussi important que difficile. Cet article décrit une expérimentation qui en propose une voie possible, à travers les notions de fonction géométrique et de trajectoire et grâce à l'utilisation de certains outils de médiation sémiotique, fournis par Cabri-géomètre, et d'un extrait de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler[2].

Introduction

L'évolution historique et les travaux de recherche de nombreux auteurs ont mis en évidence, d'une part, la nature à la fois opérationnelle et structurelle[3] de la notion de fonction, de l'autre, son caractère intrinsèquement central et pourtant didactiquement complexe.

Dans Markovits et al. (1988), l'on peut trouver un exemple représentatif des difficultés des élèves confrontés à la notion de graphe de fonction.

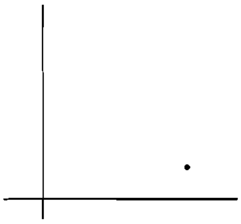
Ces auteurs ont posé aux élèves la question suivante : « Dans les deux cas suivants, combien de graphes de fonctions est-il possible de tracer par les points donnés ? »

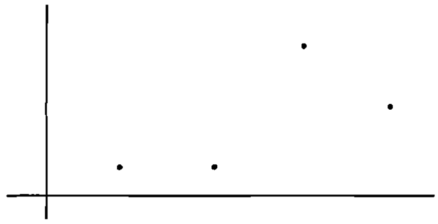
---

[1] Nous utiliserons ici le mot "graphe" au sens de « représentation graphique sur un support matériel du repère R » selon la distinction fait par G. Chauvat, « Petit x » n°51.

[2] Le texte est fourni en annexe.

[3] On pourrait très bien questionner, du point de vue épistémologique, cette opposition processus-objet, mais je prends, dans cet article, le parti de plutôt développer les aspects relatifs à l'ingénierie didactique. Je compte, d'ailleurs, d'approfondir tels aspects dans mon prochain travail de thèse.





Pour le premier système d'axes, les élèves ont répondu : "Seulement un graphe, celui d'une ligne droite" ; pour le deuxième : "Impossible, aucun graphe ne peut passer par tous les points".

En général, les analyses des difficultés des élèves relatives à la notion de fonction et à celle de graphe, montrent qu'elles portent principalement sur les capacités à :

- donner du sens au langage et aux notations spécifiques ;
- exprimer les relations de dépendance fonctionnelle du monde réel en termes de représentation algébrique ou graphique (en particulier représenter graphiquement les aspects de covariation entre phénomènes) ;
- interpréter les informations graphiques en termes de procédé ou processus ;
- distinguer entre zéros des fonctions et solutions des équations ;
- comprendre la nature générale des fonctions (pour les élèves, une fonction est toujours donnée par une formule algébrique unique et elle est toujours continue) ;
- reconnaître le rôle dissymétrique des variables dépendante et indépendante ;
- passer d'une représentation algébrique à une représentation graphique.

Toutes ces difficultés peuvent très bien se référer à une même catégorie fondamentale de difficultés : celle des rapports entre un concept et ses représentations différentes.

En mathématique, dès lors qu'il est impossible de fournir des renvois ostensifs à des objets théoriques, il devient nécessaire de se servir de registres sémiotiques différents, qui par leur nature ne peuvent pas être univoques. Dans ce sens, les représentations possibles d'une fonction (symbolique, par tableau, algébrique, graphique...) permettent de saisir des aspects différents de cet objet. Développer ces liens vitaux entre un objet et ses multiples représentations, de façon que ces dernières puissent garder leur autonomie, ou, même, se constituer comme concepts en soi, se pose alors comme un objectif didactique fondamental.

Le graphe d'une fonction est, dans cette perspective, une représentation cruciale de la notion de fonction qui est susceptible *in potentia* d'abriter cette dualité, à la fois structurelle et opérationnelle. C'est, justement pour cette raison, qu'en particulier, on a fait du graphe l'objet principal du travail de recherche dont cet article constitue une synthèse[4]. Ce travail se situe au sein d'un projet franco-italien à plus long terme dont les responsables sont C. Laborde (Université J. Fourier) et M. A. Mariotti (Université de Pise) et il a permis de construire et d'analyser une expérimentation dans une classe de Seconde de Grenoble[5].

---

[4] Pour le travail entier, se reporter au mémoire de Falcade (2001).

[5] Une séquence voisine a été réalisée dans une classe italienne d'un lycée scientifique de niveau scolaire analogue, mais cela ne sera pas détaillé dans cet article.

I Cadre théorique et hypothèses

I.1 Interprétation dynamique du graphe d'une fonction

Comme en témoignent les difficultés très répandues des élèves relatives à la notion de graphe, du moment qu'il a été construit et qu'il est devenu un objet doué de certaines propriétés mathématiques, son caractère opérationnel est devenu totalement opaque. Ce type de représentation de la fonction, en fait, focalise surtout l'aspect global d'une courbe, tandis que c'est justement la possibilité de l'interpréter aussi en termes de "processus" qui peut permettre de l'utiliser de façon puissante.

Garder l'aspect procédural est plus difficile que dans le cas de la représentation algébrique, car, à différence de cette dernière, le processus n'est pas directement signifié dans l'écriture et il est réalisé, en dehors de la représentation même. Cela explique pourquoi les élèves voient le graphe plutôt en termes de dessin ou d'objet statique, de relations spatiales ou géométriques, et ils ont, souvent, une conception mathématiquement inconsistante. Cela explique aussi la rupture didactique, très fortement aperçue, entre représentations algébrique ou numérique d'une part et graphique d'autre part : les premières portant sur le processus, l'autre sur l'objet.

La clé pour récupérer dans la notion de graphe, l'aspect processus de la fonction, comme objet qui incorpore une relation asymétrique de covariation entre variables, nous a été fournie par les **fonctions géométriques**. Celles-ci, en fait, traitées dans un environnement de géométrie dynamique, comme Cabri-géomètre, permettent de faire vivre deux conditions fondamentales :

- les éléments constitutifs d'une définition covariationnelle de fonction, comme ceux de variables indépendante et dépendante ou de relation de dépendance fonctionnelle, peuvent êtres très bien saisis et explicités dans cet environnement ;
- elles fournissent la possibilité d'accéder à la notion de graphe à travers de la notion dynamique de **trajectoire** (qui est à la fois une succession de positions d'un point qui bouge dans le temps et un objet).

Laborde et Mariotti (2001) montrent bien la raison pour laquelle le lien entre fonction géométrique et interprétation dynamique du graphe est étroit : la conception du graphe d'une fonction en termes de covariation entre deux variables v_1 et $v_2(v_1)$ peut se faire par la prise en compte de deux trajectoires $s_1(t)$ et $s_2(s_1(t))$ différentes mais temporellement corrélées. La relation entre v_1 et $v_2(v_1)$ correspond, alors, à la coordination de $s_1(t)$ et $s_2(s_1(t))$, dont on a enlevé la référence explicite au temps. L'élimination du temps est faite en respectant le rôle des deux variations, tandis que, la fonction devient représentable par deux variables spatiales l'une directement dépendante de l'autre. À ce moment-là, la relation directe entre les deux trajectoires a été traduite en une relation entre éléments spatiaux ; le pas vers la fonction géométrique est alors bref.

Dans le cas des fonctions géométriques, engendrées par une macro-construction, le domaine de définition d'une fonction et son image peuvent être saisis comme des trajectoires d'un point variable. De même, le graphe d'une fonction peut être saisi comme la trajectoire d'un point qui, à chaque instant, représente le lien entre les deux variables.

Selon notre hypothèse générale (Laborse & Mariotti, 2001), l'idée de trajectoire, développée dans l'étude des fonctions géométriques, peut être réinvestie pour parvenir à une conception dynamique du graphe pour d'autres fonctions. Une telle conception nous paraît être cruciale pour un usage efficace des graphes.

I.2 Hypothèses de départ

Notre travail de recherche s'est développé à partir de certaines hypothèses fondamentales : hypothèses de nature épistémologique, cognitive et didactique.

I.2.1 Hypothèse épistémologique

En consonance avec les recherches de Sfard (1991), nous prenons pour première hypothèse de ce travail, la prééminence, historiquement constatée, de la conception opérationnelle de fonction sur la conception structurelle. Dans l'analyse de la genèse historique du concept de fonction, cet auteur montre comment ce dernier s'est d'abord longuement développé et nourri autour des concepts de dépendance algorithmique, de variable et de graphe pour aboutir, seulement après de nombreux et douloureux essais de "réification", chez Dirichlet, à l'idée d'une correspondance arbitraire et, finalement, à la définition bourbakiste d'ensemble de couples ordonnés.

Quand on considère l'évolution dans l'histoire de la notion de variable, on peut mieux comprendre les raisons profondes des difficultés des élèves à reconstruire cette genèse dynamique du graphe, si le temps a déjà été éliminé de l'enseignement. On peut, aussi, reconnaître le rôle décisif de la trajectoire pour sa compréhension.

I.2.2 Hypothèse cognitive

La difficulté, très répandue parmi les élèves, de concevoir un objet statique comme une courbe, dynamiquement, en termes de variations, est seulement un des éléments les plus macroscopiques, qui corrobore la deuxième hypothèse de notre recherche : l'hypothèse cognitive. Nous postulons une conception des mathématiques étroitement reliée à certaines structures cognitives profondes et fortement dépendantes de certaines expériences humaines fondamentales et nous prenons, ici, le point de vue de l'*"embodied cognitive science"*, élaboré par Lakoff et Nùñez (1998, 1999).

Ces auteurs ont essayé de poser des fondements scientifiques à une théorie cognitive des idées en mathématique ; ils ont repéré, dans les "*schémas imaginatifs*" et les "*métaphores conceptuelles*", les structures d'inférence et les modalités de raisonnement principales à travers lesquelles l'esprit humain conceptualise les concepts abstraits en termes concrets.

Un autre auteur qui a contribué à bien éclairer du point de vue cognitif, le rapport entre intuition et mathématique, est G. Longo (1997) : celui-ci fait l'hypothèse que les constructions conceptuelles trouvent leur genèse dans les phénomènes naturels et qu'elles sont construites sur ces mêmes par des analogies et des métaphores qui relient une structure mathématique et une méthode de travail à une autre.

Assumer telle hypothèse cognitive implique des positions didactiques très fortes. Nous supposons, en fait, que les notions cruciales de covariation, de variable et de dépendance, indispensables pour une "appréhension dynamiquement fonctionnelle" d'une courbe, puissent être construites pleinement, si elles portent sur des métaphores conceptuelles opportunes : celles du mouvement et du temps.

I.2.3 Hypothèses didactiques

Pour conceptualiser et interpréter le graphe en termes de variations, nous avons déjà indiqué l'intérêt de le considérer d'abord comme la trajectoire d'un point P qui bouge. Cela exige la réintroduction du temps t et la prise en compte de la relation de covariation temporelle de P et de t. Malheureusement, un tel processus ne peut pas être extérieurement expérimenté, mais il reste seulement une sorte d'expérience mentale, peu souvent socialement partagée.

À la différence des environnements papier-crayon, où l'on ne peut représenter directement la variation, dans un environnement de géométrie dynamique (**DGS**), il est possible de l'expérimenter sous la forme du mouvement. En effet, ce qui premièrement caractérise et définit un DGS c'est le mouvement, et le fait que ce mouvement préserve les relations géométriques construites entre les éléments. Par conséquent, les DGS incorporent et relient de façon puissante les idées de variation et de dépendance fonctionnelle (Laborde et Mariotti 2001).

En outre, en se référant à la théorie des situations adidactiques de Brousseau (1986), Laborde et Capponi (1994) ont montré que les DGS peuvent très bien servir pour la constitution d'un milieu organisé pour l'apprentissage car, soit "*la machine est susceptible d'offrir des rétroactions fondées sur des connaissances mathématiques incorporées*", soit "*des actions conceptuellement complexes peuvent être rendues directement possibles à l'utilisateur du dispositif*".

Le DGS qui a été choisi pour cette expérimentation est Cabri-géomètre. Ceci se révèle être didactiquement crucial pour plusieurs raisons :

- il fournit un domaine d'expérience, dynamique et temporel, où le domaine sémantique de l'espace et du temps peut être exploité et réintroduit dans la notion de graphe et, éventuellement dans celle de fonction.
- il permet une "instanciation" très particulière de la notion de fonction, différente de celle fournie par un environnement typiquement analytique comme un CAS (Computer Algebra System) et relativement à une fonction numérique. Il porte sur des relations entre éléments spatiaux que nous avons désigné du nom de fonction géométrique. Cela permet aussi de fonder la notion de dépendance logique sur celle de dépendance spatiale.
- des outils comme le "Déplacement", "Trace" et "Macro", impliqués avec leurs schèmes d'utilisation, peuvent incorporer efficacement des signifiés des notions de variable, covariation et dépendance. Ils constituent un véritable potentiel didactique et cognitif.
- Il peut permettre de recomposer la rupture existante entre une représentation numérique et une représentation graphique d'une fonction.

En vertu des toutes ces raisons, nous avons alors avancé l'hypothèse didactique que, dans une perspective vygotskienne (Mariotti 2001), un **DGS** et, notamment, certains outils de Cabri peuvent contribuer à la construction des idées de fonction géométrique (et de fonction en général) et de graphe.

Différents paradigmes théoriques ont supporté cette hypothèse didactique, qui a été ensuite mise à l'épreuve par une expérimentation.

I.2.3.1 Premier paradigme théorique : artefacts et instruments

Le premier repère théorique nous a été fourni par les recherches de Rabardel (1995), Lagrange (1999) et Mariotti (2001). Rabardel, en particulier, souligne la différence cruciale qui existe entre "artefact" et "instrument". L'***artefact*** est l'objet matériel ou symbolique en soi, comme le dispositif de pilotage d'un bras manipulateur d'un petit robot qui déplace des objets dans l'espace (Rabardel 1995). L'***instrument*** est, au contraire, défini par Rabardel (1995) comme *une entité mixte qui comprend d'une part, l'artefact, et d'autre part, ses* ***schèmes sociaux d'utilisation*** *(SSU)*. Celles-ci sont les représentations relatives à l'artefact, toujours progressives, que le sujet-même a élaborées et qui lui sont nécessaires pour l'utilisation de l'artefact. Chaque fois qu'on prend en compte les processus qui accompagnent l'élaboration et l'évolution des instruments et des schèmes pour le sujet, on parle de genèse instrumentale ou de processus d'instrumentation. Ainsi, on voit bien que l'impact de l'usage des instruments sur l'activité cognitive du sujet n'est jamais neutre ; au contraire, il implique des réorganisations et des mobilisations parfois profondes. Dans l'exemple de Rabardel (1995), le fait d'utiliser dispositifs de pilotage différents va conduire, deux groupes d'élèves, à des représentations très différentes de l'espace tridimensionnel.

Vu son incidence sur la conceptualisation, la fonction de l'instrument, du point de vue didactique, devient alors plus complexe. Celle-ci en fait, consciemment insérée dans le rapport apprenant-enseignant, peut jouer le rôle supplémentaire de poursuivre des objectifs didactiques précis.

I.2.3.2 Deuxième paradigme théorique : la médiation sémiotique

Le paradigme de la médiation sémiotique, élaboré par Vygotski (1930-1978), constitue le deuxième repère théorique fondamental pour notre recherche.

Du côté de l'apprenant, l'instrument est utilisé pour accomplir une tâche donnée ; mais ce cas la connaissance mathématique incorporée peut rester inaccessible ou opaque pour l'élève.

Du côté de l'enseignant, le même instrument, employé dans une stratégie didactique est susceptible de "médier" des signifiés, et d'engendrer la construction de nouveaux concepts mathématiques.

La connaissance incorporée par l'instrument devient utilisable par le sujet, mais elle en émerge explicitement, seulement après des activités qui visent spécifiquement l'évolution des signifiés en termes mathématiquement acceptables, et grâce à l'intervention directe et indispensable de l'enseignant. Or, si le sens est construit à partir d'une expérience phénoménologique (dans une interaction entre action, activité cognitive du sujet et rétroaction du milieu), son évolution et son accession à un statut mathématique sont possibles seulement au sein d'une dynamique sociale guidée par l'enseignant.

Comme le rappelle Mariotti (2001), Vygotski distingue entre la fonction de médiation exercée par les "technical tools" (outils[6] techniques) et celle qui est jouée par les "psychological tools" (outils psychologiques), ou "signs" (signes) ou "tools of semiotic mediation" (outils de médiation sémiotique). La fonction des "outils techniques" est orientée vers l'extérieur, elle est au service de l'activité humaine pour maîtriser la nature. La fonction des "signes", au contraire, est orientée vers l'intérieur, elle est un moyen interne de contrôle et de développement de la pensée. L'utilisation des termes "psychologique" et "technique" n'est pas mutuellement exclusive, mais, au contraire, peut concerner le même outil et elle exprime la dualité de la relation qui lie l'usage extérieurement orienté à sa contre-partie interne. Le **processus d'intériorisation** désigne cette transformation d'outil technique en outil psychologique. Ce dernier, doué d'une autonomie propre, pourra être évoqué, abstraction faite de l'outil technique qui l'a engendré ; il pourra fonctionner dans la résolution des problèmes différents de ceux pour lesquels il a été conçu et conduire à la construction de signifiés nouveaux (c'est pourquoi la définition de "médiation sémiotique"). Ce processus de transformation se révèle alors être un objectif didactique fondamental et les outils de Cabri avec leurs schèmes d'utilisation sont susceptibles d'intervenir dans une médiation sémiotique directement dans certains cas, étant utilisés par l'enseignant dans d'autres cas.

Vygotski ne détaille pas ultérieurement les caractéristiques d'un tel processus et les récentes théories sur la genèse instrumentale, dont on a parlé auparavant, n'ont clarifié que partiellement son articulation et sa complexité.

En conclusion, notre recherche a eu un triple objectif :

- La conception d'une séquence d'activités visant à introduire le graphe de fonction comme trajectoire à l'aide de la notion de fonction géométrique.
- L'étude des schèmes d'instrumentation développés par les élèves dans l'usage de Cabri relativement à cette notion de graphe.
- L'organisation d'un processus de médiation sémiotique par des outils de Cabri et le texte d'Euler et l'analyse de sa réalisation en classe.

I.3 Instruments de médiation sémiotique en Cabri

Ce travail de recherche s'est concentré, en particulier, sur l'analyse des outils de Cabri : "Déplacement", "Trace" et "Macro". Pour chacun, d'une part, nous avons essayé de repérer les schèmes d'usage associables, et de l'autre, en référence à nos objectifs didactiques précis, nous avons explicité le rôle potentiel et attendu de médiation sémiotique, qu'il peut exercer[7].

---

[6] Le terme 'outil' est ici employé au sens générique de Vygotski, sans prendre en compte la différence introduite auparavant entre artefact et instrument.

[7] **Avertissement au lecteur** : vu le caractère assez systématique du paragraphe, nous conseillons éventuellement de le sauter pour y revenir au moment de la description de l'expérimentation et pour y repérer les signifiés mathématiques que nous souhaitons construire.

I.3.1 Déplacement

Le déplacement d'un objet quelconque sur l'écran peut être indiqué comme l'instrument qui d'emblée marque et détermine le caractère dynamique de Cabri.

La composante matérielle et symbolique, c'est-à-dire, l'artefact, est constitué par un ensemble de pixels opportunément activé sur l'écran. En revanche, son schème d'usage est l'action de déplacer.

Un tel instrument possède deux potentialités sémiotiques:

- en pouvant prendre une position quelconque dans un ensemble donné (même dans tout l'écran), il matérialise un des aspects les plus saillants de la notion de variable: sa “généricité” ;
- il évoque, de façon naturelle mais implicite et instinctive, le temps et la variation.

I.3.2 Trace

L'artefact consiste en l'affichage à l'écran, de la trajectoire suivie par un objet, pendant son déplacement. Du point de vue graphique, il conserve aussi une mémoire de la vitesse de déplacement, en dessinant une suite de points plus ou moins dense.

On peut lui associer trois schèmes d'usage :

Schème 1 : celui de déplacer un point qui laisse sa trace.

Schème 2 : celui de déplacer un point et d'obtenir la trace d'un autre point qui en dépend.

Schème 3 : celui de déplacer un point, qui laisse sa trace, et d'obtenir, aussi, la trace, d'une couleur différente, d'un autre point qui en dépend.

Comme on peut remarquer les SSU (Schèmes Sociaux d'Utilisation) de Trace sont toujours combinés avec celui du Déplacement (drag mode) ; il s'agit d'une caractéristique d'implémentation de Cabri, qui en fait un domaine phénoménologique et sémantique pertinent pour travailler sur les métaphores fondamentales du mouvement et du temps.

L'**instrument** ***Trace1*** (Trace+schème 1) peut extérioriser la notion de variation en termes d'une suite de changements d'état au cours du temps, et donc objectiver la dépendance fonctionnelle primitive : celle de l'espace par rapport au temps. En outre, ***Trace1*** extériorise graphiquement la liberté totale de la variable indépendante.

L'**instrument** ***Trace2*** (Trace+schème 2) porte sur la notion cruciale de variable dépendante. Au contraire de ***Trace1***, il met en évidence le manque de degrés de liberté de cette dernière variable. Malgré cela, la conception qui peut en émerger peut être très partielle. En fait, si l'existence de la variable indépendante et d'une relation qui la relie à la variable dépendante n'est pas présente à l'esprit, soit l'absence sur l'écran de la trace de la variable indépendante soit le caractère fortement inconscient du déplacement, peuvent donner lieu à deux interprétations :

- la limitation du déplacement arbitraire de la variable dépendante est perçue comme un ensemble de contraintes géométriques qui pèsent sur la variable dépendante ;
- il existe une dépendance spatio-temporelle directe entre l'action du sujet et le déplacement de la variable dépendante ; en revanche, l'existence d'une relation entre variable dépendante et indépendante n'est pas encore établie.

A contrario, si le sujet est véritablement conscient de la présence de la variable indépendante et du fonctionnement de la relation existante entre variables indépendante et dépendante (qui est dû à un travail conduit volontairement sur ces aspects), l'instrument ***Trace2*** est supposé avoir la même potentialité sémiotique que l'instrument ***Trace3***.

L'instrument *Trace3* (Trace+schème 3), en impliquant, deux fois, la notion de trajectoire, peut constituer l'instrument de médiation sémiotique le plus complet pour "réifier" et rendre conscient le double rôle du temps incorporé dans la notion de covariation.

I.3.3 Macro

L'artefact est constitué par une "boîte à outils", qui permet soit la création, soit l'utilisation d'une macro construction, c'est-à-dire d'une construction géométrique définie par l'utilisateur et légitime pour Cabri.

On peut distinguer trois schèmes d'usage impliquant l'outil macro :

Schème 1 : l'utilisateur applique une macro inconnue.

Schème 2 : l'utilisateur applique une macro connue.

Schème 3 : l'utilisateur crée une macro.

L'instrument ***Macro1*** (Macro+schème 1), comme l'instrument ***Macro2*** (Macro+schème 2) nécessitent l'explicitation des objets initiaux, tandis que les objets finaux sont créés par le logiciel, en appliquant une construction donnée. Les deux peuvent très bien signifier l'"instanciation" d'une fonction à une valeur particulière ; en revanche, seule l'utilisation combinée de ~~tels~~ ces instruments avec le déplacement peut montrer la "généricité" de la fonction.

Ce qui peut différencier ***Macro1*** et ***Macro2***, c'est la tâche différente à accomplir, qui leur est normalement associée.

Dans le cas de la macro inconnue, très souvent, ***Macro1*** est combiné avec ***Trace2***, pour retrouver la macro cachée. La trajectoire doit être, alors, conçue comme l'ensemble de tous les points (ou le support de ce point) sur lesquels (sur lequel) la macro agit et dont on veut identifier l'action. On part, donc, d'une appréhension globale de la fonction, en termes de courbe géométrique, pour parvenir à une signification ponctuelle.

Au contraire, dans le cas d'une macro connue (schème 2), dont on connaît l'action point par point, ce qui est habituellement demandé, est d'en étudier l'effet sur tous les points d'un ensemble donné. La démarche est alors opposée : du ponctuel au général. ***Macro2*** associé à ***Trace2*** contribue à construire le signifié d'une fonction en termes d'une relation de covariation entre variables, reliées par une certaine loi. Justement par le fait qu'on connaît le "processus générateur" de la variable dépendante, le statut de cette variable devient, par rapport à la simple utilisation de ***Trace2***, mieux défini. ***Macro2*** associé à ***Trace2*** permet donc d'identifier les domaines de variation de la variable dépendante et indépendante.

L'instrument ***Macro3*** (Macro+schème 3) implique qu'à partir d'une construction faite par l'utilisateur, ceci définisse des objets dépendant d'autres objets. En exigeant la désignation stricte des objets initiaux et finaux, ***Macro3*** rend explicite la distinction entre variables indépendantes et dépendantes. Il renvoie aussi à un aspect particulier de la notion de fonction : celle d'être une relation fonctionnelle entre variable indépendante et dépendante, qui est défini sur un objet particulier mais générique et qui, pour cette raison, est potentiellement applicable à tous les objets du même type.

En conséquence, ***Macro3*** peut contribuer à la construction du signifié de fonction en marquant les éléments constitutifs et en condensant[8] le processus en un objet. Il est important, à ce propos, de souligner que, comme dans le cas de la définition d'une fonction, pour valider une macro, il est exigé de lui assigner un nom.

I.4 Cohérence avec les programmes actuels

L'objectif didactique qui soutient principalement notre expérimentation de construction de la notion de graphe est celui de doter les élèves d'un outil intellectuel non seulement fondamental pour le développement des tous les domaines mathématiques, mais ainsi pour la modélisation du monde réel.

Notre perspective, ainsi que l'organisation de notre expérimentation, est en plein accord avec le document d'accompagnement du programme de mathématiques de Seconde (janvier 2000). Dans la partie "Notion de fonction, étude qualitative" il est en fait explicitement rappelé :

... de traiter des exemples de fonctions données à l'aide d'une courbe (elles sont fréquentes dans les documents des autres disciplines ou dans les média ...) ainsi que celles fournies par un tableau de données (type "tarifs postaux"). A propos de fonction définie par une courbe, il importe que les élèves sachent lire de façon critique l'information contenue dans la courbe (lectures approchées d'images et d'antécédents, ou lectures exactes dans certains cas précisés par le graphique, variations, etc.).

Le même paragraphe souligne aussi la *difficulté* inhérente la notion de fonction et la nécessité de s'appuyer sur des *situations géométriques simples* mais *riches* pour l'aborder de façon plus générale :

On privilégiera celles [situations, n. d. a] pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question ; ainsi, on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques, faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire ; la question à traiter est alors souvent un problème de maximum, de minimum ou même de recherche d'une valeur particulière.

L'organisation de l'activité mathématique dans la classe doit permettre d'*accéder au plaisir du questionnement et de la découverte* et à *l'expérience de la compréhension* et donc porte sur l'importance cruciale de *situations problématiques*.

La place des TICE (Technologies d'Information et de Communication pour l'Éducation) et leur utilisation s'avère tout à fait adaptée à de nombreux domaines de l'enseignement des mathématiques et le programme de Seconde y fait référence dans chacun de ces chapitres :

l'outil informatique donne la possibilité d'une démarche quasi expérimentale dans le champ des nombres et des figures du plan et de l'espace, favorisant une approche plus active et donc plus impliquant. Il élargit considérablement les possibilités d'observation et de manipulation ; ainsi la prise en charge d'un grand

---

[8] Nous utiliserons ici le mot « **condensation** » au sens de A. Sfard (1991). Il s'agit du deuxième niveau de formation et structuration d'un concept : celui de la compression d'une longue séquence d'opérations en unités plus maniables. C'est à ce stade que Sfard situe la naissance « officielle » du concept.

nombre de calculs ou d'une multitude de cas de figure permet d'observer et de vérifier de façon empirique différentes propriétés.

Cependant le rappel à une nécessité de la démonstration comme moyen de fonder théoriquement et de façon général une observation empirique est très fort.

Il est aussi souligné que *dans certains cas, dans les logiciels de géométrie dynamique, les liens entre le numérique et le géométrique peuvent se révéler de façon beaucoup plus explicite.*

I.5 Méthodologie

La méthodologie fondamentale utilisée est celle de l'ingénierie didactique (Artigue 1990). Le paradigme adopté pour construire et évaluer la séquence expérimentale est fondé sur l'explicitation a priori des situations observées et sur la confrontation a posteriori de cette analyse avec les données issues de la réalisation effective.

Les schèmes d'instrumentation n'ont pas été directement l'objet du questionnement et de l'étude de cette expérimentation. Nous avons construit une séquence qui les impliquait et qui les utilisait comme révélateur d'une médiation sémiotique envisagée et produite sans porter sur eux une analyse a priori explicite ou complète. Ce choix résulte de deux raisons principales :

- l'objet principal de ce travail est la notion de graphe de fonction ;
- les éléments théoriques existants sur l'instrumentation sont relativement limités.

En effet, les recherches conduites par Rabardel (1995) et, récemment, par Gomes (Rabardel et Gomes 1999), qui ont étudié le développement conceptuel consécutif à l'usage d'instruments, ont pris un cadre théorique de référence légèrement différent, celui de Vergnaud (1990, 1997). Ils ont analysé les schèmes d'instrumentation en termes de schème, de règles et d'invariants opératoires. Notre hypothèse de départ, la médiation sémiotique de Vygotski, s'en distingue et, vu la nouveauté, n'a jusqu'à présent pas été étudiée en termes de phénomènes didactiques prévisibles avant cette expérimentation. On pourrait plutôt dire que nous avons ici posé les conditions préalables d'enquête pour la construction d'une nouvelle ingénierie didactique qui marque la médiation sémiotique survenue et la conceptualisation conséquente.

L'analyse a posteriori de notre expérimentation porte sur les fiches rendues par chaque binôme, les transparents que les élèves ont préparés sur notre demande, les fichiers Cabri. En plus, nous avons enregistré tous les moments de bilan collectif et les échanges verbaux de trois binômes choisis par l'enseignant.

I.6 Questionnement

Les questions fondamentales posées dans ce travail de recherche peuvent être réparties en deux catégories principales :

- celle portant sur la séquence expérimentale, c'est-à-dire sur les objectifs didactiques liés à la construction de la notion de graphe d'une fonction.
- celle concernant les hypothèses cognitives et didactiques relatives à l'utilisation des outils de Cabri et leur incidence sur la conceptualisation.

Pour ce qui concerne la première catégorie de questions, nous avons élaboré une séquence didactique pour l'introduction de la notion de graphe d'une fonction fondée sur les concepts de fonction géométrique, l'idée de trajectoire, qui en dérive dans le contexte dynamique de Cabri.

Les questions que nous nous posons sont :

- Quels ont été les éléments cruciaux de la notion de fonction géométrique qui ont été saisis et réinvestis dans la notion du graphe ? Par exemple, est-ce que la « caractérisation dynamique » de la notion de variable indépendante, en tant que objet que l'on peut déplacer librement, a été saisie et réinvestie dans la notion du graphe ?
- Dans quelle mesure, la notion dynamique de trajectoire (en tant que succession de positions d'un point variable + objet) a-t-elle été acquise et incorporée dans celle du graphe d'une fonction ?

Vu la richesse de la séquence réalisée, les questions posées et les éléments d'étude possibles sont beaucoup plus nombreux que ceux analysés et mentionnés dans cet article. Par exemple, nous n'avons pas abordé la question si, ou comment, le graphe est devenu un outil de modélisation et d'interprétation ou si la rupture, entre représentation numérique et graphique, a été dépassée.

Pour ce qui concerne la deuxième catégorie de questions, nous nous demandons quel est le rôle effectif de médiation sémiotique exercé par les instruments de Déplacement, Trace et Macro de Cabri. Après en avoir prévu certaines potentialités et avoir fondé l'expérimentation sur ces mêmes potentialités, ne pouvant pas vérifier directement la conceptualisation survenue, nous pouvons nous questionner sur comment-les schèmes d'instrumentation des élèves ont évolué. De tels schèmes, en fait, peuvent très bien fonctionner comme révélateurs dans l'observation des phénomènes de construction du sens. Nous nous demandons si les évolutions du schème indiquent un possible processus d'intériorisation et quel peut être le signifié rattaché et construit.

II Analyse a priori

II.1 Contexte

La mise en œuvre de l'expérimentation, constituée de 7 séances, a eu lieu pendant les heures d'aide individualisée[9].

Quand nous avons démarré l'expérimentation, en janvier 2001, l'enseignant avait déjà réalisé en classe le chapitre sur les généralités des fonctions et leur représentation graphique.

Il est important de souligner le contexte dans lequel s'est mise en place cette expérimentation tant sur le plan institutionnel que sur celui des connaissances préalables des élèves car ce n'est pas sans incidence sur les solutions élaborées par les élèves dans

---

[9] Ella a été donc possible grâce à un consensus libre des élèves (et de leurs parents), qui ont décidé de participer au-dehors de l'horaire normal des leçons, et à la participation enthousiaste de l'enseignant.

les tâches que nous leur proposerons et sur les interprétations qu'ils développeront dans la séquence.

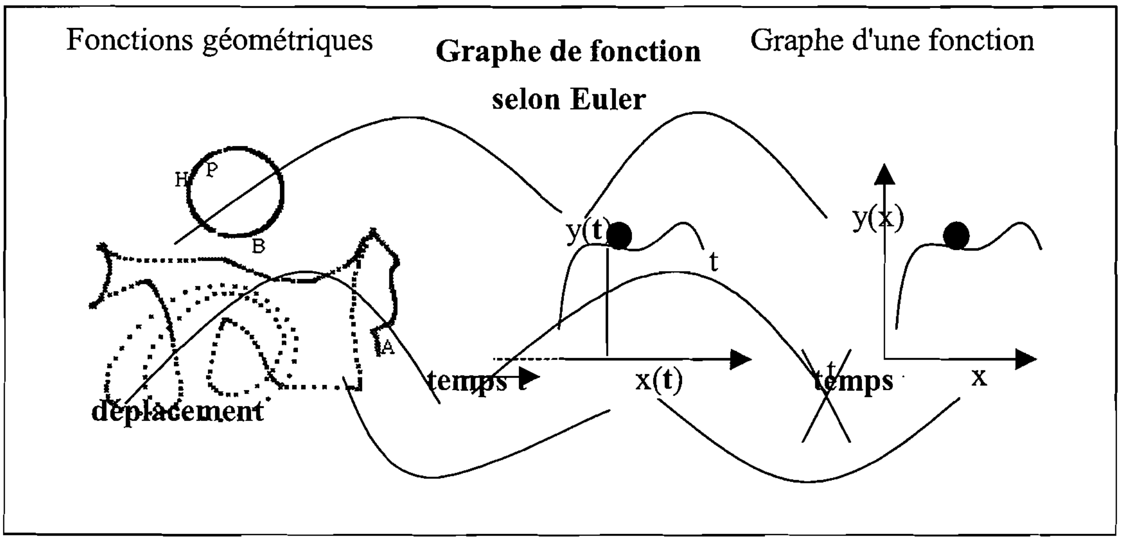
Sur le plan institutionnel, la séquence ne fait pas partie des séances habituelles de mathématiques, même si elle correspond très fortement aux attentes du document d'accompagnement de seconde (Janvier 2000) (voir par. 1.5). Les nouveaux objets, relatifs tant à l'environnement Cabri qu'aux mathématiques, peuvent être considérés par les élèves soit comme non reliés aux objets déjà vus en cours, soit comme secondaires. En revanche, l'enseignante étant l'enseignante de mathématiques de la classe, contribue par sa seule présence à signaler de façon implicite un lien avec ce qui a été vu précédemment. Elle peut de plus, comme cela a été le cas, mentionner de façon explicite les liens avec le déjà vu. Reconnaître l'existence de ce lien ne suffit pas à le comprendre, et on a pu voir que l'établissement des rapports entre ancien de la classe et nouveau de la séquence n'était pas sans poser problème aux élèves (cf. plus bas la construction du graphe en suivant la méthode d'Euler).

II.2 Présentation de la séquence

Les hypothèses, dont nous avons déjà détaillé l'origine et les caractéristiques, nous ont conduit à élaborer et à construire une séquence expérimentale qui puisse les mettre en œuvre et les vérifier. Cette dernière a été construite autour de trois étapes principales :

- Les fonctions géométriques et l'idée de trajectoire dans Cabri.
- Le texte d'Euler.
- Le graphe d'une fonction.

En particulier, dans la première séance, l'utilisation des outils Déplacement et Trace, avec leurs schèmes d'usage, qui porte sur une fonction géométrique donnée et sur les trajectoires des points impliqués, permet d'introduire l'idée de covariation des deux variables en fonction du temps. Elle crée aussi les conditions pour focaliser sur les aspects les plus saillants, que la notion de fonction géométrique permet de saisir dans un DGS : ceux de variable indépendante et dépendante, de domaine de définition et d'image.



La deuxième séance met en jeu un problème-charnière entre le géométrique et le numérique : celui de construire, dans Cabri, un rectangle variable de périmètre constant et d'analyser son comportement. Les fonctions qu'il est possible d'associer sont de nature géométrique ou «géométrico-numérique». Dans la troisième séance, nous demandons de démontrer géométriquement la validité des conjectures issues de l'observation de la situation-problème de la séance précédente. Nous demandons aussi de réinvestir les connaissances nouvelles, relatives aux fonctions géométriques, dans l'explicitation des éléments constitutifs des fonctions qui sont éventuellement sous-jacents au rectangle variable de périmètre donné. À ce point-ci, une intégration ou, au moins, une mise en confrontation des connaissances préalables sur les fonctions et celles qui ont été construites pendant la séquence est sollicitée.

La séance quatre propose aux élèves une tâche très ouverte : en utilisant l'outil macro-construction de Cabri, il est demandé aux élèves de concevoir et de construire eux-mêmes une fonction géométrique qui à un point associe un autre point.

La présentation d'extraits du texte du mathématicien Euler permet, dans la séance cinq, l'introduction à l'idée de graphe comme représentation dynamique et géométriquement fondée d'une fonction. L'idée, que nous tirons d'Euler, est de représenter le graphe d'une fonction comme la trajectoire de l'extrémité d'un « bâton vertical » (segment de longueur f(x)) et dont l'autre extrémité est un point variable de l'axe des abscisses qui est à x de l'origine. Ce qu'on obtient est alors, justement, une courbe géométrique dont on peut étudier les propriétés. Le procédé de construction du graphe, décrit par Euler et réalisé dans un **DGS,** permet de garder la covariation entre les deux variables par la dépendance du bâton du point variable de l'axe des abscisses. La donnée du texte d'Euler aux élèves est un élément de la médiation sémiotique organisée. La méthode dérivée de la lecture du texte d'Euler est un outil de construction du graphe d'une fonction qu'on demande aux élèves de réinvestir ensuite dans la construction du graphe d'une fonction particulière. D'abord outil de construction de la représentation graphique, on vise à ce que la méthode puisse permettre la construction d'invariants, au sens de Vergnaud, attachés au graphe d'une fonction. Ces invariants sont multiples : l'ordonnée d'un point du graphe d'une fonction est une variable dépendante de son abscisse

- un graphe est la trajectoire d'un point variable dépendant d'un autre point variable
- il y a donc, attachée à toute fonction numérique, une fonction géométrique, et le graphe est tout simplement l'image de cette fonction géométrique.

Dans les deux dernières séances (six et sept), d'autres problèmes de construction du graphe, selon la méthode d'Euler, permettront une vérification et un réinvestissement des connaissances acquises. En revanche, les problèmes d'interprétation envisageront la lecture des propriétés de la fonction sur le graphe. Le traitement des donnés, inhérent à la construction d'un graphe et qui transforme une grandeur quelconque en la longueur d'un segment pour Euler (ou en l'ordonnée d'un point, pour nous aujourd'hui) est impliqué et exigé. Cependant, le passage vers une notion de graphe de fonction de IR (ou d'un intervalle de IR), telle que présente dans les manuels, n'est pas encore complètement accompli : il reste encore à associer l'extrémité du segment à l'ordonnée telle que nous la connaissons (dans un repère orthogonal avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées).

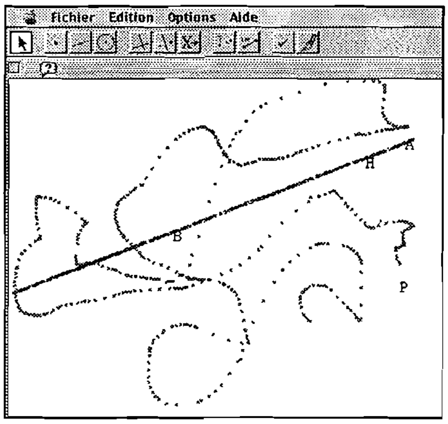
Évidemment, l'analyse a priori (et a posteriori) de cet article ne peut que concerner seulement certains aspects saillants des séances 1, 3, 4 et 5 de l'expérimentation, qui relèvent de la construction de la notion du graphe à partir des fonctions géométriques en passant par la notion de trajectoire jusqu'à l'appréhension de la méthode d'Euler.

II.3 Séance 1

II.3.1 Choix globaux

La situation créée met en jeu quatre points variables, A, B et P indépendants et H dépendant des trois autres.

Le choix de trois points variables au lieu d'un seul a été fait pour créer une rupture avec les fonctions connues des élèves. Nous cherchions à introduire d'abord la notion de variables géométriques sans lien avec ce qui précède dans le cours, pour éviter tout recours au numérique qui aurait caché la notion de variable dépendante et indépendante que nous voulions faire appréhender. Ce n'est qu'ensuite, une fois introduite ces notions, que nous cherchons à relier ce qui a été fait avec la notion de fonction déjà vue. Les élèves n'ont jamais vu de fonctions de trois variables ou de fonctions d'une variable dépendant d'un paramètre.



Le choix de faire varier les points A, B et P dans tout le plan est dû à notre souci de faire apparaître par contraste la trajectoire de H comme contrainte. Les traces des déplacements de A, B et P sont quelconques dans tout le plan, erratiques, alors que celle de H se détache comme une forme bien déterminée, ligne droite ou cercle.

II.3.2 Question 1

Il s'agit d'étudier la macro P fournie aux élèves qui, dès que trois points A, B et P sont donnés, construit le point H, projection orthogonale de P sur la droite (AB).

Pour les élèves, la macro est donnée à l'écran comme une boîte noire. Ils ne peuvent voir que le résultat de la macro et déplacer respectivement les points A, P et B.

Ils reçoivent la consigne suivante :

« Créez trois points A, B, P et appliquez la macro P aux points donnés dans l'ordre A, B, P ; un quatrième point apparaît, appelez le H.

Déplacez tous les points qu'il est possible de déplacer. Observez ce qui bouge et ce qui ne bouge pas. Faites une exploration systématique, c'est-à-dire déplacez un point à la fois et notez sur votre feuille quels sont les points qui bougent et ceux qui ne bougent pas. Résumez dans un tableau les résultats de vos observations. »

La première question porte sur une situation de reconnaissance perceptive. Les réponses attendues sont les suivantes :

Point déplacé	*Points qui ne bougent pas*	*Points qui bougent*
P	*A, B*	*H*
A	*B, P*	*H*
B	*A, P*	*H*

D'après la table, il y a des points, A, B et P que l'on peut déplacer directement et un autre, H, qu'on ne peut déplacer directement : on ne peut le faire qu'indirectement par l'intermédiaire d'autres points. Les comportements très différents des points sur l'écran sont l'objet de réflexion de cette activité : le fait que certains points soient déplaçables directement et un autre indirectement doit permettre aux élèves de distinguer entre points variables indépendants et points variables dépendants.

II.3.3 Question 2

Nous demandons aux élèves d'observer la trajectoire des points A, B, P et H grâce aux deux outils de Cabri combinés, déplacement et trace. Le recours obligé aux instruments ***Trace2*** et ***Trace3*** avec leurs potentialités de médiation sémiotique (par. 1.3) peut introduire à l'idée de trajectoire et donc à une première notion embryonnaire de variation. Dans la question 1, les élèves ont identifié les relations de dépendance/indépendance et nous souhaitons qu'ils réinvestissent cette distinction dans l'usage de Trace. Nous nous attendons à ce que les élèves cherchent à obtenir la trajectoire de H quand l'un des autres points est déplacé. Les élèves vont facilement voir que H se déplace en ligne droite, plus précisément sur la droite (AB), si l'on bouge P et que H se déplace sur un cercle, si l'on bouge A ou B. La reconnaissance perceptive de ces formes est quasi-immédiate : peut-être ce sera plus difficile pour eux de caractériser géométriquement les cercles (diamètre AB ou diamètre PB).

Nous leur demandons de décrire, en utilisant le vocabulaire géométrique, les trajectoires des différents points sur l'écran en relation avec leur comportement asymétrique. Ici, il y a déjà passage d'un simple constat perceptif d'une trace laissée sur l'écran à une élaboration en termes géométriques d'une trajectoire. Cependant, l'acception de la trajectoire qui en résulte est encore contextualisée en fonction du déplacement. Mais plus tard (pendant la reprise de la séance avec l'enseignant) nous pourrons en parler sans les déplacer réellement, seulement en les évoquant. Cela sera déjà le signe que l'outil Trace a été intériorisé et il sera, donc, devenu, au moins potentiellement, un outil psychologique utilisable dans la résolution d'un autre problème. Le résultat deviendra alors un objet autonome détaché de son contexte de production. Cela ouvre la voie à deux conséquences :

La possibilité de créer un lien avec la notion de fonction déjà vue en début d'année. Cet outil intériorisé contribue à la construction (ou reconstruction) du signifié de fonction ; en particulier, la trace de H sera la matérialisation de l'ensemble des images de chaque point A (ou B ou P) par une fonction donnée, tandis que, celles de A, B, et P pourront bien signifier le domaine de définition de la fonction. Le bilan collectif qui doit clore la séance doit servir à expliciter ce lien.

II.3.4 Question 3

Nous demandons aux élèves d'identifier et de reconstruire eux-mêmes la construction sous-jacente à la macro inconnue P et qui donne origine au point H. Nous demandons aussi que les élèves vérifient leur construction du point H' fourni par leur propre macro, en appliquant aux points A', B', P' la macro donnée P et en remarquant la coïncidence de H' avec H.

En effet, comme dit plus haut, la macro inconnue est construite en associant aux points A, B, et P le point H obtenu comme projection orthogonale du point P sur la droite (AB) (Stratégie de résolution 1,1,1).

Il s'agit de réinvestir ce qui a été vu dans la question précédente. La relation de perpendicularité (stratégie n. 1,1,1) n'a pas forcément été vue plus tôt et celle-ci est la seule difficulté de la question.

Peut-être les élèves vont-ils plutôt considérer le point H comme point d'intersection soit de deux cercles, un de rayon AP et l'autre de diamètre BP (stratégie 1,1,2), soit d'un cercle de diamètre AP (ou BP) avec la droite (AB) (stratégie 1,1,3).

L'outil Macro utilisé en tant qu'instrument ***Macro1*** et en combinaison avec ***Trace2*** constitue un élément crucial pour permettre un processus de médiation sémiotique : les objets initiaux, désignés par l'élève, représentent les variables indépendantes, tandis que les objets finaux, générés par la macro construction, représentent les variables dépendantes. L'existence d'une construction à repérer focalise le lien entre points donnés et point obtenu : l'idée de fonction comme processus est ainsi extériorisée.

II.3.5 Question 4

Nous demandons aux élèves comment déplacer le point P pour que le point H ne bouge pas.

Comme la relation entre P et H a été explicitée à la question précédente, nous pensons que les élèves vont anticiper qu'il faut bouger P sur la perpendiculaire en H à (AB) et la manipulation devrait être plus une vérification qu'un essai.

A contrario, si la relation de perpendicularité n'a pas été reconnue, l'exploration avec Cabri en utilisant l'instrument ***Trace3*** doit permettre d'identifier la "bonne trajectoire". Tout déplacement « latéral » de P provoque un déplacement de H visible sur l'écran par la trace laissée par H dans son déplacement. On sent donc après quelques essais de déplacement latéral qu'il faut se déplacer « droit » vers (AB) si l'on cherche à laisser H invariant.

Il s'agit ici d'expérimenter que tout un ensemble de points (la droite perpendiculaire en H à (AB)) a comme image le même point H. Cependant, ce ne sera qu'après le travail de médiation sémiotique, conduit par l'intervention explicite d'enseignant, qu'un tel signifié sera accessible.

II.4 Séance 3

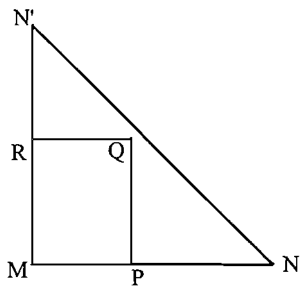
II.4.1 Choix globaux

Le choix de travailler sans ordinateur résulte de l'objectif poursuivi d'intériorisation des outils de Cabri (Déplacement, Trace et Macro-construction) utilisés dans les séances précédentes. Les élèves n'auront plus la possibilité de les manier réellement mais seulement de les évoquer en pensée pour résoudre les tâches, voire contrôler leurs affirmations.

La tâche de la démonstration vise à faire passer du point de vue processus sur la trajectoire de Q de la séance précédente au point de vue objet. La trajectoire de Q obtenue comme une trace doit être considérée comme un objet géométrique pour la démonstration.

II.4.2 Question 1

Étant donnée la figure suivante :



Soit [MN] le demi-périmètre constant p du rectangle [MPQR] donné et [MP] un côté variable du même rectangle.

On demande aux élèves, à la lumière de ce qu'ils ont constaté dans Cabri pendant la séance précédente, de juger de la validité d'une telle figure-dessin relativement à la trajectoire du point Q et de démontrer géométriquement leur assertion. En effet, Q était construit de façon à que le rectangle puisse garder tout jour le même périmètre $2p$, c'est-à-dire de façon à que PN=PQ.

La démonstration n'est pas objet de notre attention dans cet article, elle dépend beaucoup du contrat didactique existant dans la classe à propos de la démonstration, de la géométrie disponible et du niveau de rigueur exigible. C'est pourquoi nous citons seulement cette question pour nous centrer sur la question 2 qui met en jeu la notion de fonction que nous sommes en train de (re)construire.

II.4.3 Question 2

Nous demandons aux élèves de repérer, dans la situation géométrique donnée, une fonction qui à un point associe un point, d'en préciser son ensemble de définition, l'image d'un point de l'ensemble de définition et l'image de l'ensemble de définition. Il s'agit de réinvestir les connaissances élaborées sur les fonctions géométriques et d'appliquer le vocabulaire connu ou introduit par la séance précédente. Nous supposons que cela ne devrait pas poser de problème. La seule difficulté attendue est celle d'utiliser la notation f(P) (déjà difficilement maîtrisable en soi) en relation à avec une fonction géométrique ; en fait ceci conduit à l'exigence d'établir explicitement le lien entre fonctions géométriques et fonctions en général.

La question a donc un double objectif :

- Engendrer une confrontation entre les deux conceptions de fonction coexistantes : celle qui a été introduite par l'enseignant et celle qui a été construite à partir des fonctions géométriques en Cabri.
- Préparer le fait que l'on s'intéresse à la fonction Q = f(P), dont le texte d'Euler donnera le moyen d'obtenir le graphe.

Nous nous attendons à que les élèves trouvent une de ces deux fonctions géométriques :

- La fonction qui a P associe Q (stratégie 3,2,1)
- La fonction qui a P associe R (stratégie 3,2,2). Cette dernière sera due au fait que les élèves ont déjà étudié le graphe d'une fonction et ils ont appris que la variable dépendante est à repérer sur l'axe des ordonnées.

II.5 Séance 4

II.5.1 Choix globaux

La tache proposée aux élèves dans la séance 4 est très ouverte : nous leur demandons de construire une fonction géométrique dont ils choisissent eux-mêmes tous les éléments constitutifs et de l'enregistrer comme macro-construction en Cabri.

L'utilisation combinée de ***Macro2*** et ***Trace2*** fournit une aide cruciale pour saisir l'ensemble de définition et l'image de l'ensemble de définition de la fonction construite. Ces instruments soutiennent, alors, la conceptualisation de la notion de fonction en termes d'une covariation entre variables. D'autre part, le recours nécessaire et conscient à l'instrument ***Macro3*** peut permettre la condensation du processus, qui soutient une fonction, en objet. L'instrument ***Macro3*** en effet exige non seulement la distinction très nette entre variable dépendante et variable indépendante (si les élèves choisissent les mêmes points soit comme objets initiaux soit comme objet final, le logiciel rétroagira en refusant de valider la macro) mais aussi la donnée d'un nom pour la macro construite.

Deux stratégies de résolution sont attendues :

- Ou bien les élèves définiront une fonction en utilisant les transformations disponibles dans Cabri : le point dépendant sera obtenu par l'application d'une symétrie, translation, homothétie, etc.(stratégie 4,1,1),
- Ou bien ils inventeront eux-mêmes une construction qui à un point fait correspondre un autre point (stratégie 4,1,2).

Associées respectivement à ces deux catégories de résolution, nous nous attendons à ce qu'ils rencontrent les difficultés suivantes :

- pour la stratégie 4,1,1, celle de ne pas bien savoir utiliser une telle transformation de Cabri : en fait, pour appliquer une transformation géométrique, il est exigé d'expliciter tous les éléments qui y interviennent (par exemple, dans une rotation, il faut désigner l'objet que l'on veut faire tourner, puis le centre et l'angle défini par un nombre) ;

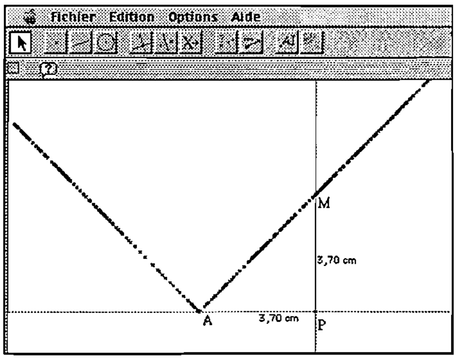
- pour la stratégie 4,1,2, celle de ne pas dégager facilement, dans une construction faite au début un peu au hasard, le point qu'ils doivent considérer en premier comme variable indépendante et celui qui doit être désigné en second comme variable dépendante. Cette difficulté, si elle est surmontée, conduit directement à la résolution de la question 2.

Au contraire, la première stratégie n'ouvre pas la voie à la résolution de la question 2, c'est-à-dire au problème de choisir les objets initiaux et finaux.

II.6 Séance 5

II.6.1 Choix globaux

Le texte d'Euler permet de revenir sur la première partie pour approcher la notion de graphe de façon dynamique. Cette séance constitue l'élément charnière entre les fonctions géométriques que nous avons vues auparavant et le graphe d'une fonction numérique. En effet, la construction suivant la méthode d'Euler permet de conserver le processus de genèse du point (dépendant) associé au point flottant (indépendant) appartenant à la droite des abscisses. (Voir texte en annexe avec figure).



Du fait de la bonne adaptabilité de ce texte à Cabri, nous considérons que cette méthode permet la conservation de l'aspect "covariationnel" des fonctions géométriques et fait le lien entre celles-ci et le graphe d'une fonction en général. Elle maintient lisible le lien de dépendance entre x et y, par le lien explicite entre P et M : M dépend visiblement de P (qui est à x du point origine A) car M se situe sur la perpendiculaire à (RS) en P, et la longueur du segment [PM] est justement y. La trace, relative au point M, qu'on obtient en déplaçant P, c'est justement pour Euler, le graphe de la fonction.

Nous avons découpé le texte d'Euler en cinq paragraphes, pour en faciliter la lecture d'une part, et pour permettre la discussion collective de certains points d'autre part. Dans ce dernier cas, le texte d'Euler peut fonctionner comme outil de médiation sémiotique pour une conception dynamique du graphe. Ceci est réalisable dans la mesure où les élèves s'engagent directement dans l'interprétation/compréhension, lorsque l'enseignant intervient en établissant, avec la participation des élèves, des relations avec leurs connaissances et les activités précédentes. Il est presque superflu de dire que l'enseignant doit avoir, dans ce cas, une certaine familiarité avec les pratiques de discussion.

Le choix de la fonction dont on demande le graphe en suivant la méthode d'Euler est dû au souci conjoint de ne pas donner la même situation que celle des rectangles et de donner une fonction dont le graphe est reconnaissable (deux demi-droites). Ce n'est pas non plus un graphe classique, empêchant ainsi les élèves d'avoir recours à des automatismes issus de leurs connaissances des fonctions linéaires :

II.6.2 Question 1

La question 1 demande aux élèves de construire le graphe de la fonction qui à x = AP fait correspondre y = PM tel que AP= PM. Elle a pour objectif d'inciter les élèves à transformer eux-mêmes les formulations d'Euler en actions dans Cabri. Pour la construction du point M, nous attendons deux stratégies possibles :

- Les élèves utiliseront Cercle (stratégie 5,1,1).
- Les élèves utiliseront Report de mesure (stratégie 5,1,2).

La première stratégie évoque la propriété d'équidistance du centre des points du cercle ; elle implique, donc, la mise en jeu des connaissances géométriques que la deuxième stratégie ne considère pas.

Nous pouvons attendre également une autre stratégie, erronée cette fois :

- Les élèves afficheront la distance d'un point P donné et, pour déterminer le point M, afficheront la distance PM sur la perpendiculaire en P à (AP) et déplaceront M de façon à ce que la mesure affichée soit égale à x (stratégie 5,1,3). La principale erreur dans cette résolution réside dans le fait que les deux points ainsi construits ne sont pas dépendants. Le déplacement du point P pourra révéler la non-robustesse d'une telle construction.

II.6.3 Question 2

Nous demandons explicitement aux élèves de détailler les étapes de leur construction du graphe : la formulation est en effet un élément fondamental nécessaire (mais non suffisant) du processus d'intériorisation.

Il permet aussi d'identifier quelle a été la stratégie de résolution adoptée.

II.6.4 Question 3

Pour répondre à la troisième question, c'est-à-dire pour expliciter la nature de la courbe relative à la fonction construite, le recours à l'instrument ***Trace2*** s'avère indispensable. La médiation sémiotique guidée par l'enseignant pourra alors conduire à la conceptualisation du graphe de la fonction en termes de trajectoire du point M. La résolution nécessite en effet que les élèves reconnaissent dans la méthode d'Euler une fonction géométrique dont on obtient l'image grâce à la trajectoire de M, obtenu dans Cabri par ***Trace2***.

II.6.5 Question 4

En demandant de préciser quelle fonction y = f(x) représente la courbe obtenue et quelles sont ses caractéristiques, la question 4 exige l'établissement, pour la première fois, d'un lien entre le graphe déjà connu par les élèves en tant qu'objet algébrique, et le graphe en tant qu'objet géométrique (une trajectoire).

II.7 Risques

L'analyse a priori concernant une expérimentation ne peut pas se soustraire au repérage des « risques didactiques » (obstacles ou conceptions mathématiquement inconsistants) qui lui sont directement liés. En particulier, nous en avons détecté deux.

Le premier relève de la possibilité, même historiquement constatée, que la notion de courbe puisse se poser comme obstacle à celle de fonction. Chauvat (1999), dans sa thèse, a bien montré qu'en particulier, cette éventualité s'avère du moment où il y a l'établissement d'une équivalence systématique fonction = courbe. Dans notre cas, les risque est fort, du moment que nous avons décidé de nous fonder, en premier ressort, sur les fonctions géométriques. Cependant, il faut bien commencer de quelque part et, comme le rappelle le document d'accompagnement de seconde (par 1.4), le mieux est de s'appuyer sur des situations à la fois riches et familières. Il s'agit du paradoxe propre de l'enseignement des mathématiques : pendant un parcours à long terme de construction des signifiés et des notions mathématiques, les vérités partielles et les restructurations sont parfois aussi inéluctables que nécessaires. Le problème est alors la prise de conscience de leur existence pour les surmonter au moment opportun.

Le deuxième « point sensible » de notre expérimentation est celui de l'articulation entre la partie, qui concerne les fonctions géométriques, et celle qui succède à l'étude d'Euler. En effet, le changement de signifié et de statut de la trajectoire est net. Dans les premières situations, elle matérialise l'ensemble de définition et l'ensemble image d'un point, qui est ou variable indépendant ou variable dépendant, par rapport à une fonction donnée. Dans les séances qui suivent Euler, elle va représenter le graphe d'une fonction. Chaque point, qui lui appartient, devient, alors, le représentant de cette fonction en une valeur déterminée. Ce changement de statut est marqué par l'introduction consciente d'un repère cartésien orthonormal où abscisses et ordonnées acquièrent un signifié différent bien précis[10].

III Analyse a posteriori

III.1 Introduction

Dans cet article, l'analyse a posteriori de l'expérimentation ne porte que sur les séances déjà prises en compte dans l'analyse a priori et est conduite selon les deux axes anticipés dans le questionnement initial :

- Le premier axe considère les objectifs didactiques liés à la construction de la notion de graphe d'une fonction;
- Le deuxième axe concerne les hypothèses cognitives et didactiques relatives aux instruments de Cabri et leur incidence sur la conceptualisation.

Nous résumons les résultats relatifs aux séances concernées dans le tableau qui suit :

---

[10] En particulier, la mise au point de situations didactiques, susceptibles de bien résoudre ce conflit, sera objet d'étude de la prochaine expérimentation.

Séance 1:

Question 1 : Tous les binômes ont bien répondu à telle question.	➢ Phénomène de contrat didactique : puisque nous avons fourni un tableau de quatre lignes à remplir, les élèves ont cru nécessaire de lister sur la colonne "Point déplacé" tous les points impliqués dans l'exploration systématique, même le point H, qu'ils ont reconnu comme non déplaçable.
Question 2 : Tous les binômes ont bien dégagé les différentes trajectoires du point H par rapport aux points A, B, P	➢ **Co-présence du vocabulaire statique et dynamique pour décrire les trajectoires du point dépendant** ➢ **Vocabulaire toujours dynamique pour la variable indépendante considérée**
Question 3 : 4/7 binômes ont adopté la stratégie 1,1,1 ; 1/7 binômes a adopté la stratégie 1,1,2 ; 2/7 binômes la stratégie 1,1,3	➢ Toutes les stratégies prévues ont été choisies ➢ **La trajectoire comme succession de positions d'un point variable et objet**
Question 4 : 2/7 binômes bougent le point P perpendiculairement mais ne construisent pas la perpendiculaire sur laquelle déplacer le point P 1/7 binômes trace la droite qui passe par P' et H' mais il ne reconnaît pas qu'il s'agit de la perpendiculaire 1/7 binômes trace la perpendiculaire 3/7 binômes n'ont pas répondu à la question	➢ Critère perceptif fallacieux : Les deux binômes, qui ont essayé de bouger perpendiculairement le point P sans construire explicitement la perpendiculaire, n'ont pas pu remarquer qu'effectivement le point H ne bouge pas. Au contraire ils disent qu'il se déplace un peu.

Séance 3

Question 2 : 5/8 binômes ont utilisé la stratégie 3,2,1 (f(P)=Q) 1/8 binômes a utilisé la stratégie 3,2,2. (f(P)=R) (Julie et Sonia) 1/8 binôme n'a pas répondu à question (Arnaud et Florian) 1/8 binôme n'a pas pu bien repérer la fonction, son ensemble de définition, et son image. (Christophe et Sébastien)	➢ **Phénomènes d'interférence** ➢ **Double aspect de la trajectoire (succession de positions d'un point variable + objet)**

Séance 4

5/8 binômes ont conçu une fonction à partir des transformations de Cabri (stratégie 4,1,1) 3/8 binômes ont conçu une fonction originale (stratégie 4,1,2)	➢ Phénomène de contrat didactique. ➢ Trace comme outil révélateur de l'ensemble de définition et de l'ensemble image ➢ **Intériorisation de *Trace3* comme outil intellectuel** (Sonia et Julie) ➢ ***Macro3*** comme **outil intériorisé de la condensation en objet de la fonction** en tant que processus

Séance 5

5/8 binômes utilisent Cercle pour construire le graphe (stratégie 5,1,1) 2/8 binômes utilisent Report de mesure (stratégie 5,1,2) 1/8 binôme donne la résolution erronée 5,1,3	➢ ***Trace2*** comme **outil intériorisé de médiation sémiotique de la notion de graphe selon Euler** ? Le déplacement est utilisé pour visualiser le graphe, mais le schème ***Trace2*** ne semble pas spontané.

III.2 Analyse a posteriori relative aux objectifs didactiques

La première grande catégorie de questions concernait la construction d'une conception dynamique du graphe de fonction à l'aide des notions de fonction géométrique et de trajectoire.

Nous développerons notre analyse de manière à centrer l'attention sur les phénomènes didactiques les plus significatifs qui se sont produits.

III.2.1 La trajectoire comme succession de positions d'un point variable et objet

À partir de l'analyse des protocoles des élèves relatifs à la **séance 1, question 2,** nous avons remarqué qu'il y a toujours une présence conjointe de termes de différente nature pour décrire les trajectoires des différents points. En effet, certaines fois les élèves dans leurs fiches emploient des mots "statiques": *"...fait un cercle"* (Djamel et Damien; Christophe et Sébastien), *"H forme un cercle"* (Florian et Arnaud), *"forme une trajectoire"* (Sonia et Julie). D'autres fois, en revanche, ils utilisent des mots "dynamiques" : *"H se déplace sur une trajectoire"* (Christèle et Cécile), *"H se déplace en ligne droite"* (Christophe et Sébastien), *"ne trace qu'une droite"* (Benjamin, David et Vincent), *"décrit un cercle autour de..."* (Julie et Sara). Si dans le même protocole nous retrouvons à la fois des expressions statiques et dynamiques, les expressions qui décrivent la variable indépendante sont toujours dynamiques. Sonia et Julie écrivent: *"Si on déplace le point b [cela vaut aussi pour a et P], b forme une trajectoire quelconque et H se déplace sur un cercle de diamètre AP [respectivement le cercle de diamètre BP et la droite (ab) »*

Dans la **séance 3**, l'analyse des protocoles montre que les élèves ont saisi la variabilité en tant que mouvement : le double aspect de la trajectoire (trace d'un point variable + objet) est passé. Il semblerait que le processus de médiation sémiotique ait réussi. Si nous observons ce qui a été écrit sur les transparents et ce qui a été dit pendant les échanges oraux, Sara, Julie, Benjamin et David disent *: "Lorsqu'on déplace P, Q se déplace sur la droite NN'. F(P) = Q.*" Christèle et Cécile déclarent : "*On associe le point P au point Q car lorsqu'on déplace P, Q se déplace sur la trajectoire (NN'). Donc Q dépend de P (f(P)=Q ou f(Q)=P ?). L 'ensemble de définition est [MN]. L'image de l'ensemble de définition est [NN']".*

Il semble ici que soient présentes et la variable dynamique et l'image globale de l'objet. Les élèves utilisent l'idée de mouvement pour les variables, mais indiquent l'ensemble des positions du point qui bouge comme un objet (droite). Nous pouvons dire que l'aspect global est présent, ainsi que les aspects ponctuels. Ils évoquent la distinction entre variables indépendantes et dépendantes en termes de mouvement (déplacement) permis ou empêché.

Il est à mentionner que les formulations des élèves italiens obtenues dans la première séance sont très proches de celles des élèves français, témoignant ainsi d'une certaine robustesse de la dualité dynamique/statique, processus/objet dans les formulations (Laborde et Mariotti 2001).

III.2.2 Phénomènes d'interférence

Dans la **séance 3**, Christophe et Sébastien montrent en outre un phénomène particulièrement intéressant, qui n'est pas isolé et que nous pourrions qualifier de phénomène d'interférence. Les élèves avaient déjà reçu un enseignement à propos des fonctions, même s'il avait été fait exclusivement dans le contexte numérique : des termes avaient été introduits et les élèves avaient une certaine expérience de travail avec les graphes. Il faut donc tenir compte que certaines réponses peuvent être interprétées en considérant que les élèves sont en train de se rappeler ce qu'ils savaient déjà à propos des fonctions. Il y a des éléments qui semblent être récupérés par les élèves et mis en relation correctement avec la nouvelle approche, pendant que d'autres interfèrent.

Dans le cas de Christophe et Sébastien, un élément d'interférence est représenté par la notion ancienne d'image. Face à un graphe, les élèves avaient été entraînés à reconnaître l'image d'une fonction sur l'axe y'Oy. Par conséquent, ils écrivent : "*[MN] a pour image [MN'].*" [MN'] est le segment de la perpendiculaire à MN qui passe par M. Nous retrouvons le même phénomène d'interférence dans le cas de Sonia et Julie : "*P est associé à R, P varie sur MN = ensemble de définition [MN], l'image d'ensemble de def [MN'].*" Lorsque nous leur demandons de repérer le point dépendant de P relativement à la fonction des rectangles variables de périmètre constant, elles vont donc l'identifier sur l'axe des ordonnées.

Dans la même séance et relativement à la même question, nous avons observé le même type de phénomène chez Christèle et Cécile. Alors que le statut différent de variable indépendante et de variable dépendante a été clairement compris et assimilé, quand elles doivent appliquer la notation f(x)=y à une fonction géométrique, elles ne savent pas encore quel point est argument de la parenthèse : f(Q)=P ou f(P)=Q?. Cette difficulté peut être reliée à l'absence d'institutionnalisation du lien entre l'écriture algébrique et dépendance/indépendance alors que ceci aurait pu être organisé. Au premier bilan, il avait bien été écrit au tableau f(P) = H mais l'écriture n'avait pas donné lieu à des commentaires de la part de l'enseignant.

Cependant les phénomènes d'interférence ne sont pas toujours négatifs. Il est intéressant de remarquer que Christophe et Sébastien ont été capables d'adapter le symbolisme f(x)=y, à un segment ; peut-être est-ce le mot « intervalle » qui a fait le pont. En effet, dans le travail précédant sur les fonctions numériques, ils avaient employé ce mot pour indiquer des segments représentant des séries de nombres. Passant, à travers le symbolisme « f( ) », au précédent contexte de fonction, ils sont portés à interpréter le segment comme un intervalle et donc à adapter spontanément le symbolisme au nouveau contexte. Ils écrivent sur leur protocole : *"Sur l'intervalle [MN], f[PN]=MR, [MN] a pour image [MN']"*.

III.3 Analyse a posteriori concernant les instruments de Cabri objet de ce travail de recherche

Par rapport à la deuxième catégorie de questions, nous nous sommes interrogés sur le rôle effectif de médiation sémiotique exercé par les instruments de Déplacement, Trace et Macro de Cabri.

Dans le questionnement initial, nous avions mis en évidence que pour essayer de repérer indirectement la conceptualisation réellement réalisée par les élèves, nous devions surveiller les évolutions significatives de leurs schèmes d'instrumentation. Nous nous sommes aussi demandé, en conséquence, quand de telles évolutions du schème impliquaient un possible processus d'intériorisation et quel pouvait être le signifié mathématique qui en découlait.

III.3.1 Double aspect de la trajectoire (succession de positions d'un point variable + objet) et Trace3

Considérons la **question 3 de la séance 1** : comment déplacer le point P pour que H ne bouge pas? Pendant leur exploration avec l'instrument ***Trace3***, les élèves ont cherché à ne pas faire bouger H et ils ont trouvé que la trace de P décrit une ligne. Ils perçoivent la variation de P et se rendent compte de la contrainte de maintenir H immobile ; pendant leur action, les élèves ont l'intuition du mouvement de la variable et de la trace comme succession de variations, alors qu'au moment où le mouvement s'arrête, la trace est perçue globalement comme un objet, une ligne.

Pour pouvoir exprimer cette ligne en termes mathématiques, comme une droite, les élèves sont obligés de la concevoir de façon globale. En faisant cela, ils doivent la mettre en rapport avec les autres éléments géométriques présents à l'écran, ce qui conduit à ce que la trace (en tant que séquence de points) devienne une droite.

Par exemple, Sonia et Julie ont écrit : *Tracer [a'b'] puis placer un point P'. Placer H dessus puis tracer la perpendiculaire à [A'B'] passant par H et P'. Si on déplace P' sur cette ⊥, le point H ne bouge pas.*

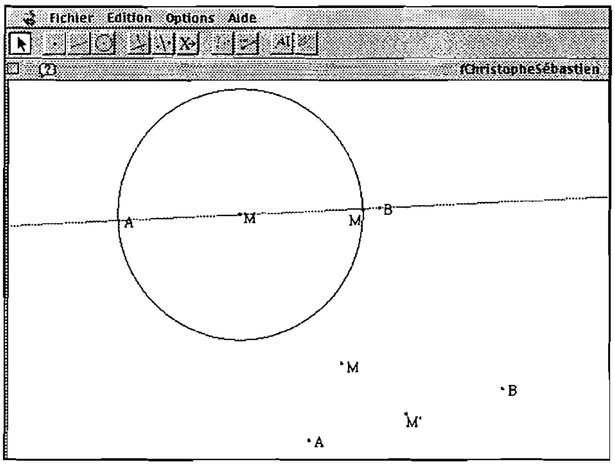
Il est intéressant de voir comment le passage de l'objet trajectoire vers un objet perçu globalement devient évident dans l'usage qu'en font les élèves pour résoudre la question qui suit : « *Trouve la construction cachée dans le macro, c'est-à-dire, construis un point K qui coïncide avec le point H.* » Sonia et Julie ont répondu *: Placer trois points a', b', P'. Tracer le cercle de diamètre [A'P'] ← on a pris le milieu de* *[a'P'] puis on a tracé le cercle. Tracer le cercle de diamètre [b'P']. Et donc le point d'intersection des 2 cercles sera le point cherché qui est H'.* Seulement la perception des deux trajectoires circulaires du point H comme objets géométriques peut expliquer ce genre de réponse.

Dans cette interprétation du résultat concernant l'utilisation de ***Trace3*** est impliquée la reconnaissance chez les élèves d'une conception de trajectoire comme objet et, en même temps, comme résultat du déplacement d'un point variable. Nous aurions envie de dire qu'il s'agit d'un symptôme de l'intériorisation de l'outil Trace et d'une contribution à la construction des signifiés d'ensemble de définition et d'ensemble image d'une fonction comme de deux ensembles de variables liées par une relation explicite de dépendance.

III.3.2 Fonctions librement conçues et Trace2

Au cours de la **séance 4**, nous avons demandé aux élèves de construire et décrire une fonction qu'ils ont librement conçue. Il y a une interférence évidente des connaissances précédentes : les transformations géométriques, comme la symétrie, la réflexion ou la rotation, ont été rappelées explicitement par l'enseignant au début de la séance et ont été utilisées. Ceci pourrait aussi apparaître comme un phénomène de contrat. Les exemples qui impliquent des transformations géométriques (5/8) sont presque corrects.

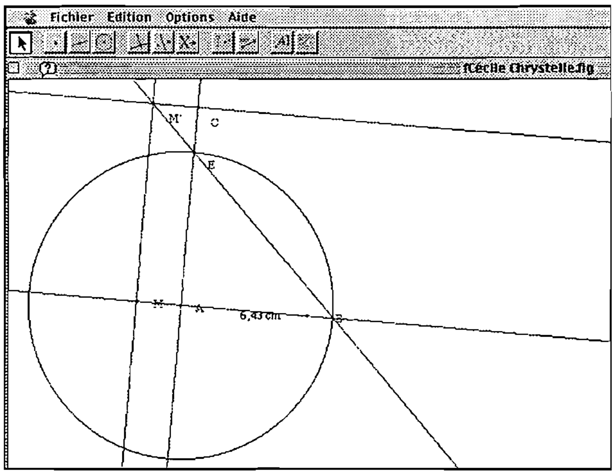
Toutefois, certains élèves résistent à « l'appel du contrat » et élaborent une construction originale, ceci est le cas de Christophe et Sébastien, Christèle et Cécile, et Sonia et Julie (cf. paragraphe 3.3.3). Les premiers notent : *tracer une droite passant par A et B. Construire le point M n'importe où. Faire un cercle de centre M et passant par A. Construire M' à l'intersection de (AB) et du cercle de centre M. f(M) = M'. L'image est la droite (AB).* Pour répondre à cette question, ils ont cherché à reproduire la construction donnée dans la séance 1 ; pourtant leur reconstruction n'est pas tout à fait la même de la macro F.



Christèle et Cécile écrivent : "*M varie sur la droite (AB). On a tracé M' de façon à ce que MM' = AC et avec AM = CM' avec l'aide de parallèles (AC) et (MM') et de perpendiculaires (AC) ⊥ (AM) et (MM') ⊥ (AM)* (cf. figure suivante).

Pour répondre à la question relative au repérage du domaine de définition, de l'image et de l'image du domaine de définition, seulement certains binômes utilisent l'instrument ***Trace2*** et s'efforcent de décrire le domaine et l'image comme objets géométriques. Cependant, ils ne sont pas tout à fait capables de contrôler la figure qu'ils ont construite et, en comparaison avec leur réponse précédente à propos du domaine et de l'image, il semble qu'il y ait une régression.

En particulier, Christèle et Cécile écrivent : "*L'image de l'ensemble de définition est : par l'option Trace, on remarque que M' se déplace sur le segment [EB] et sur un triangle rectangle identique à ABC passant par ce segment [EB]*" .



Parfois, en revanche, ils ne se servent pas de ***Trace2***, comme dans le cas de Christophe et Sébastien, qui utilisent tout simplement le déplacement pour voir que l'image de la fonction était la ligne (AB).

En faisant un bilan par rapport aux fonctions géométriques, nous avons observé que, si tous les élèves montrent avoir compris le rapport de covariation entre variables dépendante et indépendante en termes de mouvement, en revanche la matérialisation au moyen de Trace de l'image en tant que trajectoire ne semble pas encore être acquise de manière stable. Nous observerons encore une absence d'usage de Trace pour obtenir le graphe de la fonction à la suite de la lecture du texte d'Euler, absence partagée par plusieurs binômes (cf. plus bas).

III.3.3 Intériorisation de Trace 3 comme outil intellectuel ou psychologique

Relativement à la **séance 4**, le protocole le plus intéressant qui concerne le processus d'intériorisation est celui de Sonia et Julie (cf. fig. 4.3 plus en bas). En décrivant la fonction qu'elles ont conçue et construite dans Cabri, elle notent :

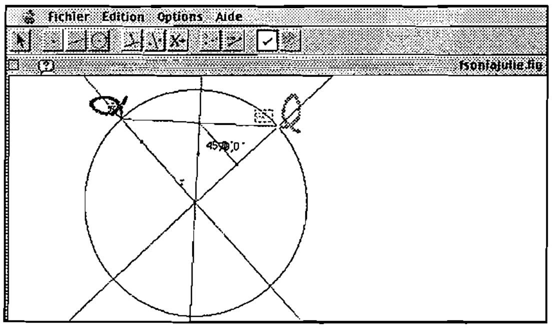
"*M varie sur le plan entier.*

→ 2 points M et R. Un cercle de centre R passant par M. On a pris la droite MR et on a tracé la ⊥ passant par R. Donc M' est le point d'intersection entre la ⊥ et le cercle.

→ M' varie dans le plan et il est le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle MRM'. M' est dépendant de R (ou M ?) par une transformation géométrique.

Malheureusement, nous n'avons pas de transcription à propos de cette séance, mais nous disposons de nos notes d'observation. Il est intéressant de remarquer qu'elles explicitent le domaine comme « tout le plan ». Comme dans le cas précédent, la définition de fonction est centrée sur le processus (de construction). Le rôle des variables indépendantes et dépendantes n'est pas tout à fait clair ; peut-être trouvent-elles difficile de gérer à la fois deux variables indépendantes (M et R). À la fin, il semble même qu'elles confondent M et R.

Sonia et Julie utilisent l'outil Trace pour vérifier que M' est dépendant de M. Elles activent la trace de M et de M' et en déplaçant M, vérifient que M' se déplace bien grâce à l'extériorisation laissée par la trace de M'. C'est un schème d'usage qui n'avait pas été montré aux élèves. On peut donc dire qu'elles ont construit un schème d'instrumentation pour repérer une variable dépendant d'une autre.



En tout cas, ce qui est intéressant c'est le fait qu'elles cherchent à mettre en relation leur construction originale avec les transformations géométriques qu'elles connaissent déjà et dont l'enseignant a peut-être suggéré l'utilisation en début de séance. Il est aussi intéressant de remarquer qu'afin d'identifier le type de transformation qu'elles ont construite, elles utilisent l'instrument ***Trace3***. Elles décident de déplacer le point M le long d'une petite courbe volontairement régulière, un nœud, et peuvent ainsi vérifier une analogie entre trajectoire de M et trajectoire de M'. Elles repèrent que le domaine et l'image (l'objet décrit par M') apparaissent identiques et cela leur conduit à désigner la transformation comme étant une symétrie (d'axe variable). Elles en construisent l'axe comme médiatrice de [MM']. Nous tirons de cette observation que les élèves ont employé ***Trace3*** non seulement pour obtenir l'image, mais aussi pour explorer la situation. C'est un très bon indicateur du fait que cet instrument a été intériorisé. Les élèves savent qu'elles peuvent identifier des transformations géométriques en termes de relation entre le domaine et l'image ; par conséquent, l'utilisation de ***Trace3*** ne vise pas la seule construction directe de l'image, mais arrive au cours d'un raisonnement complexe : en planifiant leur exploration, les élèves utilisent l'instrument ***Trace3*** comme un outil intellectuel, au sens de Vygotski. ***Trace3*** est désormais disponible comme outil psychologique à utiliser au cours du processus mental de résolution d'un problème.

III.3.4 Macro3 comme outil intériorisé de la condensation en objet de la fonction en tant que processus

La résolution de la tâche proposée dans la **séance 4**, c'est-à-dire la conception d'une fonction et son instanciation dans Cabri, a impliqué l'utilisation consciente de la part des élèves de l'instrument ***Macro3***. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 1.3.3, cet instrument peut bien jouer le rôle de médiation sémiotique par rapport à la construction d'une notion de fonction qui soit à la fois un processus et un objet qui incorpore tel processus.

Cet instrument n'avait jamais été utilisé auparavant par les élèves dans ce sens, car, jusque-là, en particulier dans la séance 1, ils étaient encore dans un contexte totalement géométrique et ils n'avaient pas été sollicités à concevoir explicitement une macro-construction en termes de fonction. Le fait que tous les élèves aient su utiliser de façon pertinente et efficace ce nouvel instrument peut signifier que la condensation en objet, de la fonction en tant que processus, est réussie.

III.3.5 Trace2 comme outil intériorisé de médiation sémiotique de la notion de graphe selon Euler

Les séances cinq, six et sept nous ont permis d'observer le rôle de la trajectoire dans la construction du signifié de domaine et d'image d'une fonction autre que géométrique et, en conséquence, du signifié de fonction.

L'intérêt de la **séance 5** était de voir si les élèves allaient utiliser spontanément ***Trace2*** pour afficher la trajectoire de l'extrémité du segment qui, chez Euler, matérialise la variable dépendante, ce qui serait le signe que l'outil a été intériorisé et que la médiation sémiotique a fonctionné.

Nous pouvons faire l'hypothèse que la réponse : *la courbe obtenue est composée de deux demi-droites* est un signe que les élèves ont utilisé Trace, en particulier, par le binôme Christophe & Laetitia. Des élèves comme Sonia et Julie ou Chrystèle et Cécile emploient correctement le procédé d'Euler pour construire l'image d'un point P variable et déplacent P pour observer qu'il se déplace sur l'axe des abscisses. Au contraire, pour obtenir le graphe de la fonction, elles cherchent à construire d'autres points P (et leurs images correspondantes) voulant, ainsi, faire comme Euler, qui ne disposait pas de Cabri, c'est-à-dire sans déplacer le point déjà construit pour obtenir la trace de la trajectoire du point image. L'outil ***Trace2*** ne semble pas disponible comme outil intériorisé. En revanche, il apparaît comme mobilisable puisque, après forte sollicitation des observateurs de trouver un moyen de garder de façon permanente le déplacement, ces binômes ont recours à Trace. Il a fallu soit leur suggérer directement d'utiliser Trace (Sonia et Julie) soit de pousser très loin les allusions pour qu'ils pensent à s'en servir (Christèle et Cécile).

Si, dans la **séance 5**, seul un nombre réduit d'élèves a spontanément utilisé, de façon combinée, le Déplacement pour la variable indépendante et Trace pour la variable dépendante, cela peut signifier que la méthode d'Euler n'avait pas été saisie dans notre objectif ultime, c'est-à-dire d'introduire le mouvement dans le graphe d'une fonction. En réalité, le déplacement de la variable indépendante P comme variation sur l'axe des abscisses avait été bien intériorisée. Ce qui faisait encore défaut, c'était justement l'idée de trace comme trajectoire de la variable dépendante pour obtenir la courbe. Cette situation a représenté pour les élèves un moment de "blocage", qui a mis en évidence la faiblesse de leur conception statique préalable mais, cependant, a permis de dépasser ce blocage. Au cours des **séances 6 et 7**[11], en effet, les élèves, une fois confrontés à la

[11] Dans ce cas, le lecteur de Petit x doit me faire confiance ; en revanche, tous les détails des séances 6 et 7 sont dans Falcade (2001).

même tâche de construire le graphe d'une fonction selon la méthode d'Euler, ont tout de suite bien réussi à le faire.

IV Conclusions et perspectives

Un bilan relatif aux fonctions géométriques montre que tous les élèves semblent avoir compris le rapport de covariation entre variables dépendantes et indépendantes en termes de mouvement. La double conception de trace d'un point en mouvement et d'objet semble aussi avoir été comprise, même si cela s'est construit avec quelques difficultés pour certains. En termes de médiation sémiotique, nous pouvons dire que l'outil Déplacement a été intériorisé par les élèves comme un moyen intellectuel d'identification de la dépendance de variables. L'expression par Chrystelle et Cécile dans la séance sans ordinateur en est un bon témoin. Elles disent que puisque c'est P qu'il faut déplacer pour que Q bouge, c'est que Q dépend de P. C'est une expérience mentale de déplacement à laquelle elles se livrent.

La construction du graphe comme une trajectoire (selon la méthode d'Euler), qui est susceptible de garder l'aspect semble aussi appropriée par les élèves, même si là encore cette appropriation ne s'est pas faite de manière immédiate. Il a fallu des interventions ou des sollicitations fortes des observateurs ou de l'enseignant. En particulier, les connaissances antérieures des élèves à propos de la représentation graphique ont pu provoquer des interférences et entraver cette construction. Il y avait en présence deux moyens d'obtenir le graphe : le nouveau moyen, où le graphe est obtenu comme trajectoire, et l'ancien, qui a recours à la construction de plusieurs points P et des points M correspondants. La force de l'ancien était encore appuyée par la présence de plusieurs points P sur le dessin fourni par Euler. Les élèves avaient tendance à interpréter le texte à la lumière de leurs conceptions et de leurs connaissances antérieures, même si l'enseignant, pendant la discussion collective, essayait d'en donner une vision dynamique. Rappelons que les élèves confrontés à la tâche de produire le graphe de la fonction juste après le texte d'Euler avaient sous les yeux au tableau le dessin d'Euler qui servait de référence. Nous avons pu constater qu'ils y revenaient à plusieurs reprises au cours de l'activité.

La médiation sémiotique organisée par l'enseignant, du texte d'Euler, aurait pu jouer un rôle plus important pour provoquer cette construction du graphe comme trajectoire. Cependant, il faut souligner qu'il s'agissait d'une construction très particulière et complexe à faire, soit par les élèves, qui devaient s'impliquer véritablement dans le travail d'interprétation, soit par l'enseignant, qui devait, au fur et à mesure, interagir avec eux pour en favoriser la réalisation. En effet, à la différence de l'organisation du milieu adidactique qui n'est pas à faire sur place mais préalablement, la médiation sémiotique réalisée par l'enseignant est à organiser au cours même de la classe, ce qui rend les choses plus difficiles. On retrouve les difficultés mentionnées par plusieurs recherches sur les bilans collectifs où l'enseignant doit pouvoir se saisir des déclarations des élèves pour les faire évoluer. Il est clair que cette tâche est d'autant plus facile que l'enseignant connaît déjà bien les argumentations possibles des élèves. Or, nous avons expérimenté pour la première fois cette séquence. Les stratégies possibles, les phénomènes d'interférence étaient du domaine du potentiel et de l'hypothétique. En perspective, nous souhaitons, quant à nous, mieux organiser les moments de confrontation collective, qui sont cruciaux pour le processus de médiation sémiotique.

Nous pouvons aussi dire que l'intériorisation de certains outils comme Déplacement, ***Trace2***, ***Trace3*** et ***Macro3*** a eu lieu, et qu'ils semblent avoir joué le rôle de médiation sémiotique attendu, c'est-à-dire d'avoir efficacement soutenu la construction des signifiés mathématiques envisagés. Nous avons pu observer la construction de schèmes d'instrumentation, dont certains non prévus, comme chez Sonia et Julie (séance 4).

En conclusion, nous pensons que cette expérimentation a constitué plutôt une pré-expérimentation visant à éclairer la faisabilité du projet, ses points de force et de faiblesse et que sa répétition avec modifications permettra de mieux faire fonctionner le processus de médiation sémiotique. La réalisation en Italie qui s'est faite plus tard (en avril et mai) montre déjà des avancées, en particulier qu'il n'y a eu pas d'interférence avec des connaissances déjà installées sur les graphes. La séquence en Italie a en effet été réalisée au tout début de l'enseignement sur les fonctions. C'est ce que nous envisageons de faire dès septembre 2001 grâce à la coopération active et enthousiaste de l'enseignant.

Nous souhaitons aussi mieux développer la partie finale de notre expérimentation pour arriver à combler le fossé entre le graphe selon Euler, (qui est encore fortement tributaire d'une conception de graphe comme de trajectoire d'un point dépendant) et celui selon une conception moderne et les manuels actuels (où chaque point du graphe est le représentant véritable de la fonction en une valeur déterminée). Le lien avec les autres types de représentations d'une fonction sera aussi à approfondir. Grâce à cette expérimentation, nous avons recueilli des indices plus précis de phénomènes didactiques à observer pour pouvoir identifier une conceptualisation éventuellement survenue. En particulier, nous avons pu souligner la prégnance des évolutions des schèmes d'instrumentation. De tels éléments doivent devenir objet explicite de l'analyse a priori. Le cadre théorique récent et partiellement insuffisant devra être élargi et intégré par d'autres outils et critères de prévision, d'analyse et d'interprétation.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (3), 281-307.*

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (2), 33-115.*

CHAUVAT G. (1999) Courbes et fonctions au college en *Petit x 51, 23-44*

EULERO L. (1748) *Introductio in analysin infinitorum liber secundus*, Lausanna : Michaelem Bousquet & Socios, *3-8 (paragraphes 1, 2, 4, 6, 7, 11, 13, 14).*

FALCADE R. (2001) *L'environnement Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction*, Mémoire de DEA, UJF, Grenoble

LABORDE C., Capponi B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 14 (1.2), 165-210*

LABORDE C., MARIOTTI M. A. (2001) Grounding the notion of function in a DGS, *Cabri World 2001*

LAKOFF G., NUNEZ R. E. (2000) *Where Mathematics Comes From. How the embodied Mind Brings Mathematics into Being,* New York : Basic Books

LAGRANGE J. B. (1999) Les instruments de calcul formel, *Actes de la Xème école d'été de Didactique des Mathématiques, Houlgate , Tome I, 214-234*

LONGO G., (1997) Geometrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathematiques, *Intellectica Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive, 25, 195-218*

MARKOVITZ Z., Eylon B., Bruckheimer M. (1988) Difficulties Students have with tha Fonction Concept, *The Ideas og Algebra, K-12,* NCTM 1988 Yearbook, *43-60.*

MARIOTTI M. A. (2001) Influence of technologies advances on students' math learning, to appear in English L., Bartolini Bussi M. G., Jones G., Lesh R., & Tirosh D. (eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erbaum Associates in press.

RABARDEL P. (1995) Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation, *Les dossiers de l'ingénierie éducative, Des outils pour le calcul et le traçage des courbes 19, 61-65,* CNDP.

RABARDEL P. et GOMES A. S. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, in Bailleul Marc, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, 203-213, Caen : ARDM*

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics 22 (1), 3-22*

VYGOTSKI L. (1931-1978) *Mind in Society.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Annexe

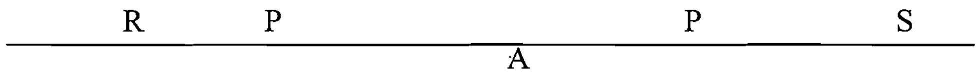
INTRODUCTION A L'ANALYSE INFINITESIMALE

Livre second

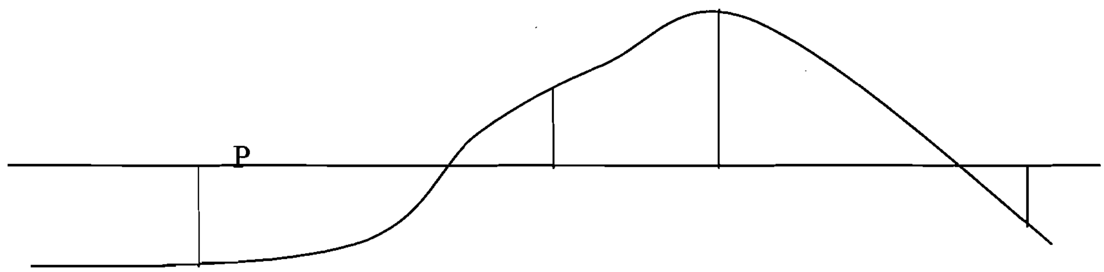
Contenant la Théorie des Lignes Courbes, avec un Traité abrégé des Surfaces

Chapitre Premier

Des lignes courbes en général



Soit x une quantité variable représentée par la droite RS ; il est clair que toutes les valeurs déterminées de x peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS. Par exemple, si le point P tombe sur le point A, l'intervalle AP, devenant nul, représentera la valeur de x=0 ; mais plus le point P s'éloignera du point A, plus la valeur déterminée de x représentée par l'intervalle AP deviendra grande. On appelle ces intervalles AP, ABSCISSES. Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable x.



Puisqu'une ligne droite est propre à représenter une quantité variable x, cherchons à présent une manière très commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x. Soit y cette fonction de x ; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour x une valeur donnée.

Ayant pris une droite RAS pour représenter les valeurs de x, il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x, élever sur cette ligne une perpendiculaire PM, égale à la valeur correspondante de y ; c'est-à-dire que, si la valeur de y est positive, il faudra la placer au-dessus de la droite RS ; mais si la valeur de y devient négative, il faudra la placer perpendiculairement au-dessous de la droite RS. Car les valeurs positives de y étant prises au-dessus de la droite RS, celles qui deviennent nulles tomberont sur la ligne même RS, et celles qui sont négatives, au-dessous.

Si donc, pour chaque valeur donnée de x, on détermine de cette manière les valeurs correspondantes de y ; on élèvera à chaque point P de la droite RS des perpendiculaires PM, qui exprimeront les valeurs de la fonction y : l'une des extrémités P tombera sur la droite RS, et l'autre M au-dessus de RS, si les valeurs de y sont positives ; ou au-dessous, si elles sont négatives ; ou même sur la ligne RS si elles sont égales à zéro, comme il arrive aux points D et E. Les extrémités M de chacune des perpendiculaires représenteront une certaine ligne droite ou courbe, qui par conséquent se trouvera déterminée par la fonction y. Ainsi chaque fonction de x, rapportée de cette manière à la géométrie, donnera une ligne droite ou courbe, dont la nature dépendra de celle de la fonction y.

On connaît parfaitement, en suivant ce procédé, la ligne courbe qui résulte de la fonction y, puisque c'est cette fonction qui en détermine tous les points ; en effet, pour chaque point P on a la longueur de la perpendiculaire PM, dont l'extrémité M appartient à la courbe ; et on trouve ainsi tous les points de cette ligne. Or, quelle que soit la nature de la courbe, on peut mener de chacun de ses points des perpendiculaires à la droite RS ; on a par-là les intervalles AP, qui expriment les valeurs de la variable x ; et les longueurs des perpendiculaires PM, qui représentent les valeurs de la fonction y ; ainsi il n'y aura aucun point de la courbe, qui ne soit déterminé de cette manière par le moyen de la fonction y.

Il y a dans ce que nous venons de dire sur la nature des courbes, certains noms à retenir, et dont l'usage revient très fréquemment dans la théorie. D'abord la droite RS, sur laquelle se prennent les valeurs de x, s'appelle l'AXE. Le point A, depuis lequel se comptent les valeurs déterminées de x, se nomme *l'origine des abscisses.* Les parties de l'axe AP qui représentent les valeurs déterminées de x s'appellent ordinairement ABSCISSES. Et on donne le nom d'APPLIQUEES aux perpendiculaires PM, menées des extrémités des abscisses à la courbe. Les appliquées sont dites dans ce cas-ci *perpendiculaires* ou *orthogonales,* parce qu'elles font avec l'axe un angle droit.

Une fonction quelconque de x donnant naissance à une ligne courbe continue, il s'ensuit qu'on pourra par son moyen la connaître et la décrire. Car donnons à x des valeurs positives, qui croissent successivement depuis 0 jusqu'à l'infini, et cherchons pour chacune les valeurs correspondantes de la fonction y, qui soient représentées par des appliquées menées au-dessous, suivant qu'elles sont positives ou négatives ; on aura la portion de la courbe BMM. En donnant ensuite semblablement à x toutes les valeurs négatives depuis 0 jusqu'à l'infini, les valeurs correspondantes de y détermineront la portion BEm de la courbe ; ainsi toute la courbe renfermée dans la fonction se trouvera décrite. Puisque y est une fonction de x, il s'ensuit ou que y sera égal à une fonction explicite de x, ou qu'on aura une équation entre x et y, qui déterminera la valeur de y en x. Dans les deux cas on dit que cette équation exprime la nature de la courbe. C'est pourquoi la nature d'une ligne courbe quelconque est donnée par une équation entre deux variables x et y, dont la première x représente les abscisses comptées sur l'axe depuis leur origine A et la seconde les appliquées perpendiculaires à l'axe. Ces abscisses et ces appliquées considérées ensemble s'appellent les COORDONNEES perpendiculaires.