

**L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES RATIONNELS A DES
ELEVES EN DIFFICULTE D'APPRENTISSAGE :**
UNE APPROCHE DIDACTIQUE DE LA REEDUCATION ET SES EFFETS.

Pascale Blouin,
Université du Québec à Trois-Rivières
Gisèle Lemoyne,
Université de Montréal

Résumé. Ce texte rend compte d'une partie d'une recherche sur l'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficulté d'apprentissage (Blouin, 1993) et propose une perspective nouvelle de rééducation de ces difficultés. Il montre comment cette perspective se fonde sur une rupture assumée du contrat didactique et indique quels en ont été les effets.

La première auteure est celle qui a conduit la recherche dans le cadre de sa thèse de doctorat ; la seconde auteure est la directrice de la thèse. Cette recherche a d'abord été amorcée dans le cadre des études doctorales (bourse de doctorat du Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada) ; elle a ensuite été poursuivie dans le cadre d'un projet subventionné par le F.C.A.R. (subvention jeune chercheur). L'auteure principale désire remercier la coordonnatrice Denise Magnano, les enseignants et les élèves de l'École Secondaire Vanguard pour leur assistance dans la réalisation de cette recherche.

Dans l'analyse préalable des études sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels et sur l'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage, deux approches usuelles de rééducation des difficultés en mathématiques furent examinées. Les limites que nous y avons observées nous ont amenée à développer une autre approche, fondée sur les théories du contrat et du temps didactique, que nous avons matérialisée dans un dispositif d'enseignement. L'analyse des conduites des élèves lors d'épreuves pré-test et post-test ainsi que lors des situations d'enseignement, a montré la pertinence et l'efficacité des situations utilisées (Lemoyne et Blouin, 1997) : les situations proposées ont en effet permis aux élèves de construire des connaissances essentielles sur les nombres rationnels. L'enseignant a tiré parti des ruptures du contrat didactique dans lequel les élèves en difficulté d'apprentissage sont habituellement engagés pour impliquer les élèves dans un travail cognitif important.

Pour mieux montrer l'intérêt didactique du dispositif d'enseignement mis en place, nous rappelons d'abord le cadre général de la recherche et les caractéristiques de l'approche rééducative choisie. Nous montrons ensuite comment les effets du nouveau contrat didactique se sont manifestés et nous examinons des interventions-clés de l'enseignant dans la gestion de ces effets.

I. Cadre général de la recherche

Notre recherche porte sur l'enseignement des nombres rationnels, elle a été réalisée auprès d'un petit groupe de 5 élèves âgés de 13 et 14 ans provenant d'une classe spéciale de première secondaire¹. Ces élèves fréquentaient une école secondaire qui accueille exclusivement des élèves en difficulté d'apprentissage. Dans cette école, il est de pratique courante de constituer des petits sous-groupes d'élèves autour de problèmes scolaires particuliers. Ainsi, un groupe d'élèves a été formé autour des nombres rationnels et nous a été confié. L'enseignant-chercheur² avait l'entière responsabilité du cours et du groupe d'élèves. Ce contexte particulier nous a permis d'observer les comportements de ces élèves en difficulté d'apprentissage davantage en tant qu'élèves en classe de mathématiques qu'en tant que sujets d'une recherche expérimentale.

Les élèves du groupe, à l'instar des autres élèves de cette école, présentaient depuis de nombreuses années, des retards importants dans les deux matières de base (leur retard scolaire en français et en mathématiques avait été évalué par les différents intervenants à deux ans au minimum). Cependant, aucun problème intellectuel, neurologique ou d'une autre nature ne permettait d'expliquer leur retard scolaire en mathématiques. Enfin, les pratiques usuelles de rééducation en mathématiques avaient jusqu'alors échoué à combler ou atténuer leur retard en mathématiques au cours des deux années précédentes.

L'ensemble des analyses préalables relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres rationnels et à l'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage ainsi que le contexte de cette recherche nous ont conduite à adapter³ certaines des situations didactiques conçues et expérimentées par Guy et Nadine Brousseau (1987, 1981a) pour l'enseignement des nombres rationnels et décimaux. Dans les situations de Brousseau, les enjeux essentiels sur les rationnels sont d'un haut niveau de complexité. À notre

¹ Dans la pratique éducative au Québec, les diverses instances s'accordent pour associer à un retard académique de deux ans, une difficulté d'apprentissage chez l'élève.

² L'expression "enseignant-chercheur" est plus appropriée que celle d' "enseignant" car l'enseignant qui avait la responsabilité de l'enseignement était également la personne responsable de la recherche. Suite aux travaux de Schubauer-Leoni (1986), nous sommes consciente que la double position de l'expérimentateur (celle d'être l'enseignant et le chercheur) a produit des effets dans le déroulement de la séquence d'enseignement. Cette double position est assez délicate et aurait nécessité une analyse spécifique mais ce dernier aspect n'était pas l'objet de notre étude. Nous avons toutefois pris les précautions nécessaires pour avoir des observables acceptables.

³ Les situations didactiques de Guy et Nadine Brousseau ont été conçues et expérimentées auprès d'élèves du secteur d'enseignement régulier. Afin de prendre en compte les caractéristiques de fonctionnement généralement associées aux élèves en difficulté d'apprentissage, une adaptation de ces situations s'avérait nécessaire.

connaissance, de telles situations sont généralement évitées dans l'enseignement auprès des élèves en difficulté d'apprentissage. La cause usuellement donnée est que, ces situations, par leurs contraintes et leurs enjeux sur les nombres rationnels nécessitent que les élèves "prennent des risques", et c'est justement cette caractéristique qui nous est apparue déterminante pour susciter une rupture du contrat didactique dans lequel les élèves en difficulté d'apprentissage sont pris et s'engagent habituellement.

II. Quelques analyses préalables à l'élaboration des activités de rééducation sur les nombres rationnels⁴

II.1. L'apprentissage et l'enseignement des nombres rationnels

Les études sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres rationnels font ressortir la complexité mais surtout la richesse et l'ampleur de leur champ conceptuel (Berh *et al*, 1983; Kieren, 1988, 1976; Brousseau, 1981a; Vergnaud, 1983). Les nombres rationnels interviennent en effet dans de multiples situations mathématiques ; les définitions choisies pour les enseigner peuvent alors être nombreuses et les occasions de construction de ces nombres sont aussi variées. Ces occasions sont le reflet des espaces de problèmes que ces nombres permettent de résoudre ou dont ils sont la solution. Ainsi, les études montrent la diversité des sens, des classes de problèmes des nombres rationnels à intégrer (sens : partie-tout, rapport, quotient, opérateur et mesure). Elles définissent également comment les processus de construction et de coordination des schèmes correspondant à ces sens permettent l'élaboration de connaissances opératoires sur les nombres rationnels (la structure multiplicative des nombres rationnels). Selon le modèle sur la construction des nombres rationnels développé par Kieren (1988), la construction des divers sens et des relations entre ces sens prend en effet appui sur les connaissances élémentaires mais fondamentales que constituent les schèmes de partition et d'équivalence, ainsi que la notion d'unité. Une coordination de ces connaissances permet une première conception de la notion de fraction⁵, conception basée sur la quantification des relations parties-tout. Par la suite, les autres sens sont élaborés et leur coordination permettra le développement de la structure multiplicative des fractions où les fractions sont alors conçues à la fois comme des mesures (des quantités) et des rapports (des relations). Ces études soulignent enfin la lenteur de ce processus et montrent qu'y parvenir suppose à la fois des ruptures et des filiations avec les conceptions et activités sur le nombre et les opérations développées à partir des nombres entiers. Enfin, les études réalisées sur l'enseignement des nombres rationnels (Streefland, 1986; Desjardins et Hétu, 1974; Brousseau, 1981a; Kieren, 1976) montrent qu'un enseignement fournissant aux élèves des situations conceptuellement riches leur permet d'effectuer des liens entre les divers sens de ces nombres. Les situations utilisées doivent ainsi d'une part, rendre nécessaire le recours à plusieurs sens et, d'autre part, permettre une gestion des ruptures et des filiations préalablement décrites. Ces études

⁴Pour une description plus approfondie des travaux cités dans cette partie du texte, voir Blouin (1993).

⁵Afin d'alléger le texte, nous utilisons le terme fraction pour désigner les nombres rationnels écrits sous la forme fractionnaire.

soulignent enfin comment les situations d'application linéaire (ou fonction linéaire) répondent à ces critères.

II.2. L'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques

Les recherches effectuées auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques montrent comment ces élèves développent des rapports particuliers aux savoirs enseignés et aux exigences scolaires (Brousseau, 1984, 1980; Brousseau et Peres, 1981b; Lemoyne, 1989, 1987; Baruk, 1973; Houdebine et Julo, 1988; Berdot et al., 1988).⁶ En classe de mathématiques par exemple, ces élèves peuvent avoir tendance à rechercher des indices accessoires dans l'énoncé d'une tâche afin de trouver la réponse attendue par le professeur au lieu d'articuler une réponse personnelle, reflétant leur implication cognitive dans la tâche. Souvent aussi, ces élèves n'osent émettre une réponse de peur de se tromper; ils n'acceptent de répondre généralement qu'aux questions dont ils sont certains de connaître la réponse. De fait, on observe chez ces élèves une tendance à développer quantité de stratégies d'évitement des problèmes mathématiques proposés en classe. Ces stratégies de mise à distance comme le soulignent Brousseau et Peres (1981b), débouchent fréquemment sur des actions stéréotypées, purement "didactiques", c'est-à-dire un rapport centré sur le maître, sans mobilisation des schèmes assimilateurs qu'ils ont pourtant à leur disposition (par exemple: "le professeur dit qu'il faut faire comme cela!"), et une propension à se réfugier dans les calculs.

Une question peut alors être posée :

les situations d'enseignement rencontrées par ces élèves possèdent-elles les conditions nécessaires pour faire bouger ces stratégies et pour modifier le rapport des élèves aux situations didactiques en mathématiques en les engageant à travailler leurs schèmes ?

Car, les études soulignent que les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques développent fréquemment une vision presque exclusivement "algorithmique" des savoirs mathématiques. Bien qu'il soit souvent observé chez ces élèves l'élaboration d'une quantité de règles d'action, il semble qu'ils éprouvent de la difficulté à retenir celles associées aux savoirs rencontrés. À plusieurs reprises, les règles de fonctionnement qu'ils construisent ne prennent en compte qu'une partie de l'information et s'avèrent valides dans un nombre restreint de situations mathématiques ; il s'ensuit généralement chez ces élèves une propension à s'engager rapidement dans des calculs non pertinents.

L'élaboration d'une quantité de règles d'action montre bien par contre la volonté de ces élèves à entrer dans les situations didactiques — en cela, ils ne sont pas différents des élèves qui réussissent en mathématiques. Il semble toutefois que

⁶Les quelques études spécifiques aux difficultés en mathématiques des élèves en difficulté d'apprentissage que nous avons trouvées faisaient état, dans l'ensemble, des mêmes phénomènes que ceux relatés dans les travaux effectués en didactique des mathématiques. De plus, vu les caractéristiques des élèves à qui s'adressait la séquence d'enseignement, nous avons volontairement omis les études portant sur la dyscalculie car des caractéristiques spécifiques d'ordre neurologique, y étaient fortement prises en compte.

plus ces élèves élaborent des règles d'action, plus ils ont de la difficulté à les coordonner et à assurer un contrôle sur leur domaine de validité en mathématiques. Ici encore, à l'instar de Brousseau et Peres (1981), notre analyse des études sur l'enseignement auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques montre que tout projet d'intervention auprès de ces élèves se doit de considérer leurs rapports aux mathématiques et aux situations didactiques.

Développés dans le cadre des recherches en didactique des mathématiques, les concepts de contrat didactique (Brousseau, 1984; Schubauer-Leoni, 1986) et de temps didactique (Chevallard, 1985; Chevallard et Mercier, 1987; Mercier, 1992; Brun, 1991) sont intéressants pour mieux comprendre les conduites des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques. Selon Brousseau (1984), le contrat didactique "détermine - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre" (p. 94). Le contrat didactique est ainsi l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant; une part de ces comportements est spécifique au savoir enseigné. La notion de temps didactique se définit selon Mercier (1992) par "l'articulation de la temporalité personnelle de l'élève (le temps biographique de l'apprentissage) à la temporalité institutionnelle de l'École (le temps systémique de l'enseignement)."

Les notions de contrat didactique et de temps didactique sont étroitement liées. La notion de contrat didactique implique la notion de temps didactique car elle suppose une gestion du temps didactique de l'élève par l'enseignant. La notion de temps didactique est ainsi précieuse pour mieux comprendre la relation entre l'intention d'apprendre et l'intention d'enseigner dans une relation didactique, relation constitutive du contrat didactique. Dans la visée de cette liaison entre une intention d'apprendre et une intention d'enseigner, plusieurs contextes et tâches spécifiques sont proposés aux élèves pour confirmer l'établissement de cette relation afin de maintenir le contrat didactique généralement établi (ex: examens, exercices, situations-problèmes, mise en commun des solutions des élèves, etc). En proposant un rythme d'apprentissage, une manière d'aborder le savoir et une progression des tâches qui tiennent compte des niveaux de difficultés que peuvent rencontrer les élèves, l'enseignant tente de favoriser un apprentissage spécifique. S'il possède alors la première clé de la gestion du temps didactique, il doit toutefois assurer ce contrat avec les élèves, c'est-à-dire une liaison entre l'intention d'apprendre et l'intention d'enseigner et la confirmation que l'apprentissage visé est effectif. Cependant, il peut arriver parfois que l'intention d'apprendre un savoir particulier ne rencontre pas une intention d'enseigner associée à ce savoir ou, à l'inverse, qu'une intention d'enseigner ne rencontre pas une intention d'apprendre. Ce qui transparaît alors c'est l'échec de l'élève à réaliser les gestes attendus. Mais ce qui est derrière, c'est la non concordance des temps d'apprentissage et d'enseignement.

Ce bref exposé des notions de contrat et de temps didactique nous permet de soulever plusieurs hypothèses sur le contrat didactique relatif aux élèves en difficulté d'apprentissage dans une classe de mathématiques. Par exemple, il y a peut-être eu

plusieurs ruptures entre ce que l'élève pense être l'objet de l'enseignement par les questions qu'il se pose ou les "ignorances" qu'il rencontre et ce qui est effectivement l'objet d'enseignement par ou pour l'enseignant. D'autre part, lorsqu'un élève rencontre plusieurs fois ce type de rupture, il peut s'ensuivre un découragement ; le développement d'une stratégie qui consiste à désinvestir la tâche et attendre que l'enseignant explique chacune des erreurs peut alors être observée. Enfin, on le voit, ces ruptures et les questions qu'elles soulèvent posent avec acuité la question de la réciprocité des attentes de l'enseignant et des élèves. Les savoirs mathématiques construits par les élèves sont ainsi reliés au contrat didactique dans le cadre duquel se fait cette construction comme le souligne Mercier (1992).

II.3. Les approches de rééducation en mathématiques

Selon notre connaissance des pratiques des enseignants qui s'adressent à des élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, deux approches rééducatives nous semblent privilégiées d'ordinaire.

La première approche, que nous appellerons *remédiation*, consiste d'abord à révéler dans les conduites des élèves en difficulté d'apprentissage, une série de "bugs"⁷ pour ensuite élaborer et tenter un enseignement correctif par des activités spécifiques pour chacun de ces "bugs". La seconde approche, que nous appellerons *reprise de l'enseignement*, met davantage l'accent sur la signification des savoirs mathématiques en jeu dans l'enseignement. Multiplier les représentations et les dispositifs physiques, entraîner les élèves à recourir et à développer des heuristiques et stratégies cognitives et métacognitives, sont des moyens jugés important dans la reprise de l'enseignement.

Les approches précédentes, il importe de le dire, prennent souvent appui sur les études effectuées par les chercheurs en didactique des mathématiques et en psychopédagogie. Nous pensons d'abord aux propositions rééducatives qui ont été avancées et mises à l'épreuve à la suite des études réalisées par Brown et Burton (1978) sur le diagnostic des erreurs de calcul arithmétique (Balka, 1993; Fuson, 1992; Fuson et Briars, 1990; Ross et Kurtz, 1993). Nous pouvons aussi nous référer aux expériences réalisées par plusieurs chercheurs (Schoenfeld, 1985, 1987; Montague, 1992) montrant l'intérêt d'un enseignement mettant en avant des stratégies de résolution de problèmes.

Si ces deux approches permettent parfois à plusieurs élèves en difficulté d'apprentissage de construire des rapports plus appropriés à certains objets de savoir, elles tendent grandement à négliger l'histoire scolaire des élèves, leurs connaissances initiales et leurs tentatives d'adaptation aux situations rencontrées dont témoignent leurs erreurs. Les élèves sont alors confinés à une démarche d'adaptation récurrente en vue de produire les réponses attendues. Il va de soi que dans de telles approches, les connaissances initiales ne soient jamais inscrites dans un processus de validation. Il se peut en effet que ces connaissances soient généralisées à des contextes mathématiques non pertinents ou ne soient jamais mises à l'épreuve ou encore, trop hâtivement éliminées par les élèves ; un découpage excessif, voire un morcellement des

⁷C'est-à-dire: des actions traduisant l'application de règles erronées ou inappropriées par rapport à la tâche mathématique à réaliser.

connaissances, ou des conceptions limitées des savoirs peuvent résulter de cette absence.

Aussi, comme le mentionne si bien Conne (1991), ces approches semblent traduire une conception naïve du processus d'apprentissage des mathématiques. "Selon ces approches, l'élève ne "régresserait" jamais, il ne ferait que "prendre du retard" et qu'il s'agit pour lui de "rattrapage". Une fois remonté au nœud du problème de l'élève, une fois remédié aux "manques", le processus "normal" d'apprentissage ainsi rétabli, une planification serait à nouveau envisageable, d'abord en remontant l'analyse du diagnostic, puis en reprenant le cours de l'enseignement ainsi débloqué." Ces approches tendent de fait en théorie, à supposer connu le processus d'apprentissage d'une notion spécifique en mathématiques et à concevoir l'évolution des connaissances des élèves comme un processus linéairement croissant.

Dans les études sur les échecs électifs en mathématiques, Brousseau (Brousseau et Peres, 1981b) propose un cadre général des interventions de rééducation en mathématiques. Cette proposition est cohérente, bien sûr, avec celle qu'il a fait pour l'enseignement des mathématiques en général. Pour qu'une approche de rééducation soit pertinente selon Brousseau, elle doit proposer aux élèves des situations didactiques convenables, où la connaissance n'est pas à prendre dans le discours du maître ou à lire dans ses attentes, mais à produire dans une relation avec la situation. De plus, les interactions entre l'élève et la situation doivent être motivées par le désir de l'élève lui-même et le conduire à prendre en charge les décisions spécifiques de la connaissance à construire (il doit tâtonner, décider, chercher, etc). Il s'agit en fait de proposer à l'élève des situations didactiques qui vont exiger de lui des actions propres à l'activité de construction de connaissances en mathématiques, à savoir des anticipations, des prévisions, des prises de position sur la connaissance.

III. Choix didactiques de la séquence : caractéristiques de l'approche rééducative utilisée dans notre recherche

Considérant le fait que cet enseignement s'adressait à des élèves de 13 et 14 ans ayant déjà reçu plusieurs enseignements des fractions et des nombres décimaux, considérant aussi leurs habitudes de fonctionnement en classe de mathématiques et enfin, l'ensemble des critères relatifs à la construction de situations d'enseignement des fractions, nous avons décidé de placer les élèves dans un contexte didactique nouveau par rapport à leur histoire scolaire. Selon notre compréhension des implications des recherches sur le temps didactique (Mercier, 1992; Brun, 1991) et sur le contrat didactique (Brousseau, 1984; Schubauer-Leoni, 1986), il nous semblait important que le contexte mis en place assure un contrôle de certains effets spécifiques du contrat didactique relatif aux élèves en difficulté d'apprentissage et place les élèves devant des situations ne présentant pas de similitudes, du moins temporairement, avec des situations déjà visitées antérieurement, évitant ainsi qu'elles ne soient assimilées trop tôt à une reprise d'un enseignement passé - voire d'un enseignement n'ayant pas fonctionné.

Nous avons ainsi arrêté notre choix sur certaines situations d'applications linéaires développées par Guy et Nadine Brousseau (1987) pour l'enseignement des nombres décimaux; les situations impliquant des agrandissements ou des réductions de figures avaient été retenues. Une adaptation de ces situations avait cependant été réalisée et prenait en compte l'histoire scolaire et le fonctionnement de ces élèves.

Un environnement informatique⁸ avait été en effet ajouté à l'environnement régulier papier-crayon de réalisation des tâches. Les choix que nous avons effectués caractérisent notre approche rééducative sous trois aspects ; nous ne soulignons dans ce texte que les aspects qui démarquent notre approche de celles usuellement utilisées en rééducation en mathématiques.

Notre approche propose d'abord des contextes signifiants pour des élèves en difficulté d'apprentissage de niveau secondaire. Dans l'élaboration des activités de rééducation, nous avons grandement considéré l'âge des élèves à qui s'adressait la séquence. Il nous était apparu souhaitable que les situations proposées à des élèves de 13 et 14 ans réfèrent à des contextes signifiants. Très souvent, afin de ne pas trop "embêter" les élèves, on est en effet tenté de leur proposer des contextes simples pour les activités de rééducation ; ceux-ci sont toutefois souvent considérés par les élèves du secondaire comme des contextes référant aux activités du cours élémentaire. Il importait donc de penser à des problèmes pour des élèves de niveau secondaire et de montrer à ces élèves en difficulté que le temps avait passé et que nous les considérons ainsi d'intelligence normale, et donc aptes à réussir de tels problèmes.

La deuxième caractéristique de notre approche porte sur le dispositif mis en place afin de contrôler dans le déroulement des activités, certains effets du contrat didactique. Nous avons choisi de créer un dispositif informatique déterminant un espace de solution aux problèmes que comportent les situations. Cet ajout à l'environnement régulier papier-crayon n'est pas accessoire. Comme l'environnement informatique n'était pas encore associé chez ces élèves en difficulté à une situation d'échec, une plus grande implication personnelle et cognitive dans les problèmes à résoudre était à espérer. De plus, ce dispositif permettait de contrer les habitudes de "calcul" souvent observées chez ces élèves. Ainsi, dans plusieurs des situations d'enseignement que nous proposons, l'ordinateur effectuait les calculs proposés par les élèves et montrait graphiquement ce que les résultats de ces calculs engendraient ; le travail de l'ordinateur transformait alors la tâche des élèves. Le travail essentiel des élèves était alors d'interpréter les résultats des calculs qu'ils faisaient effectuer par l'ordinateur. Aussi, par le recours aux outils informatiques qui déplaçait la sanction de la solution de l'enseignant à l'ordinateur, la relation enseignant-élève se trouvait également affectée. Ainsi l'élève ne pouvait plus interroger de la même manière l'enseignant sur sa conduite d'élève et devait transformer ses attentes vis-à-vis de l'enseignant. L'enseignant devait également se refuser de sanctionner les solutions de l'élève et repenser ses interventions auprès de l'élève.

La dernière caractéristique de notre approche porte sur le niveau notionnel des situations proposées aux élèves. Cette caractéristique est de fait la plus importante car elle va tout à fait à l'encontre des pratiques usuelles en rééducation. Au lieu de

⁸ Au moment de la réalisation de cette recherche, nous avons opté pour une programmation en LOGO.

privilegier dans nos activités de rééducation un découpage vertical de la notion de fraction, voire linéaire allant du plus simple au plus complexe, nous avons opté pour un découpage horizontal et de niveau notionnel complexe. Selon une première option, option conforme aux modèles usuels de rééducation, les activités de rééducation seraient élaborées de manière à reprendre individuellement d'abord chacun des sens de la notion de fraction et en sous-groupes par la suite. Se basant sur les études sur l'enseignement et la construction de cette notion, notre option a consisté à proposer aux élèves des situations impliquant l'élaboration de la structure multiplicative de la fraction - niveau de construction qui rappelons-le, nécessite une coordination des divers sens de la fraction. Considérant que les élèves avaient déjà reçu un enseignement de la notion de fraction et que les premiers sens de cette notion avaient été examinés en classe à plusieurs reprises, notre intention était bien d'enclencher le processus de coordination des sens de la fraction. Nous voulions ainsi obliger les élèves à "revisiter" leurs connaissances sur cette notion et favoriser l'élaboration des divers sens de la fraction qui bien souvent semble embryonnaire chez nos élèves. Cette dernière caractéristique de notre approche est donc majeure dans la modification des pratiques usuelles de rééducation en mathématiques et des conceptions des élèves d'une situation didactique. Nous avons de plus, dès la première situation de la séquence, impliqué les nombres décimaux - l'écriture décimale étant une des représentations possibles des nombres rationnels au même titre que l'écriture fractionnaire.

IV. Présentation d'une situation-type des activités de rééducation

Notre séquence d'enseignement comportait sept situations d'application linéaire⁹. Ces situations étaient des situations de mise en relations de quantités où quelques-unes représentaient les mesures des longueurs des côtés du dessin initial (modèle) et les autres, les mesures des longueurs des côtés du dessin final (image) produit par l'application d'un opérateur aux mesures du dessin modèle.¹⁰ Dans une situation-type de notre séquence, deux voiliers apparaissaient à l'écran de l'ordinateur ; connaissant les mesures des 6 parties du premier voilier et au moins une mesure du second voilier, les élèves devaient trouver les mesures du second voilier. Les élèves étaient informés que pour réaliser ce deuxième voilier, l'ordinateur avait effectué un même calcul sur chacune des mesures du premier voilier ; ils devaient trouver la transformation réalisée et entrer au clavier de l'ordinateur l'opération que selon eux, l'ordinateur avait appliquée à chacune des mesures du premier voilier pour pouvoir faire le second voilier. L'opération à écrire devait être composée d'un signe d'opération (+, -, x, ÷) et d'un nombre.

Dans une de nos situations par exemple, les mesures du premier voilier et la mesure connue du deuxième voilier étaient les suivantes :

⁹ Il s'agit, comme nous l'avons mentionné, d'une adaptation de la situation dite de "l'Optimiste" proposée par Guy et Nadine Brousseau, (1987), nommée du nom du petit voilier-école internationalement connu.

¹⁰ Pour une description détaillée de la séquence d'enseignement, voir Blouin (1993).

Voilier 1	Voilier 2 (x 1,2)
7 cm	—
14,6 cm	—
5 cm	6 cm
3,5 cm	—
8,8 cm	—
11,6 cm	—

À partir de ces informations, les élèves devaient trouver la transformation réalisée sur le voilier 1 pour produire le voilier 2. Ils pouvaient dégager la différence entre les mesures des 2 voiliers (1 cm). Cette différence ainsi dégagée devait alors être interprétée multiplicativement et à l'aide des connaissances sur les fractions comme étant $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$ de la mesure du voilier 1 (5 cm). Ainsi, pour obtenir la mesure du voilier 2 (6 cm), l'ordinateur avait appliqué l'opération $\times 1,2$ sur chacune des mesures du voilier 1. Dans le cas où une interprétation additive des relations entre les mesures avait été tentée par les élèves, par exemple " $+ 1$ ", l'ordinateur aurait transformé chacune des mesures du voilier 1 selon cette opération et aurait montré à l'écran le résultat de ce calcul, c'est-à-dire une figure visuellement très différente du voilier 1.

V. Quelques effets de l'approche rééducative utilisée sur les connaissances et les conduites des élèves.

Dans l'examen des effets de l'approche rééducative, nous donnons d'abord une vue d'ensemble des principaux résultats de notre recherche. Nous nous intéressons plus particulièrement par la suite aux effets du contrat didactique et du temps didactique en les examinant sous l'éclairage des connaissances initiales des élèves et des interventions de l'enseignant-chercheur. Nous essaierons à cette occasion de montrer comment les ruptures du contrat didactique peuvent, sous certaines conditions, affecter les rapports des élèves aux savoirs enseignés et aux exigences scolaires.

Dans l'analyse des conduites des élèves au cours des situations d'enseignement, nous avons examiné les enjeux notionnels pris en compte par chacun de ceux-ci lors des différentes situations de la séquence ; cet examen fut réalisé à la lumière de leurs connaissances initiales. Cette analyse nous a permis de mettre en évidence l'importance de présenter aux élèves en difficulté des situations qui impliquent un niveau notionnel complexe. Par exemple, dès les premières situations de notre séquence, nous avons observé qu'il était impossible pour un élève (l'élève E3) d'appréhender les enjeux multiplicatifs des situations, en raison semble-t-il des connaissances limitées de cet élève sur le sens et les propriétés des opérations de multiplication et de division. À la fin de la séquence toutefois, on remarque chez cet élève des progrès très importants sur l'élaboration des structures multiplicatives (par exemple: les propriétés multiplicatives des nombres entiers) et des sens de la fraction - plus particulièrement les sens partie-tout et opérateur. De plus, l'analyse des connaissances sur la notion de fraction construites par l'ensemble des élèves au terme des situations d'enseignement montre que tous les élèves ont grandement bénéficié des activités; ces bénéfices nous semblent redevables au niveau notionnel impliqué dans les situations proposées et qui a rendu nécessaires de

telles constructions. En effet, selon notre compréhension des études sur l'enseignement et la construction de la notion de fraction - plus précisément celles sur les processus de coordination des sens de la fraction - le fait que les situations proposées aux élèves impliquaient la structure multiplicative des fractions a été déterminant dans la construction de connaissances sur la notion de fraction chez ces élèves.

Les analyses des conduites des élèves aux épreuves pré-test et post-test ainsi qu'au cours des situations d'enseignement montrent aussi comment l'approche rééducative et les situations utilisées ont provoqué des ruptures du contrat didactique dans lequel les élèves en difficulté d'apprentissage s'engagent habituellement. Chacun des élèves a toutefois éprouvé de manière différente le caractère inhabituel des situations utilisées dans le cadre des activités de rééducation. En effet, les connaissances initiales sur les fractions utilisées par les élèves au début de la séquence nous permettaient d'appréhender de fortes différences en ce qui concerne leurs apprentissages sur la notion de fraction à la fin de la séquence ; les connaissances initiales des élèves sont aussi au cœur des effets reliés à une rupture du contrat didactique. À cet égard, notre analyse des études sur l'enseignement aux élèves en difficulté d'apprentissage et des recherches en didactique des mathématiques nous avait permis de dégager le rôle central joué par les connaissances initiales des élèves dans leur relation aux situations d'apprentissage ; en effet, un élève peut éventuellement tirer profit d'une situation d'apprentissage s'il peut utiliser certaines de ses connaissances. Or, pour quelques-uns de nos élèves, cette clause implicite d'une situation d'apprentissage fut difficilement rencontrée ; cette difficulté nécessita de leur part plusieurs ajustements au cours des premières activités. Mais pour les élèves possédant des connaissances plus élaborées sur les fractions, les situations proposées leur permettaient davantage d'utiliser leurs connaissances. Ainsi, le caractère inhabituel de nos situations et les difficultés rencontrées par les élèves pour agir efficacement dans les premières situations des activités de rééducation provoquèrent au terme de la seconde situation une discussion entre les élèves et l'enseignant-chercheur autour du choix des situations d'enseignement. Afin de mieux comprendre les effets provoqués par notre approche rééducative, quelques connaissances initiales sur la notion de fraction des élèves au début des activités de rééducation seront d'abord brièvement présentées ; nous relaterons ensuite les propos tenus par les élèves et l'enseignant-chercheur au terme de la seconde situation.

VI. Quelques connaissances initiales des élèves à leur entrée dans les activités de rééducation

Au début de la séquence d'enseignement, les élèves ne présentent pas un niveau comparable de connaissances sur la notion de fraction. Deux profils d'élèves sont ainsi dégagés. Nous illustrons ces profils à l'aide de quelques conduites révélatrices des difficultés rencontrées ou non par certains élèves.

Le premier profil - nous nous référons aux élèves E1 et E3 - se caractérise au début de la séquence par des connaissances fort élémentaires sur les fractions. Ces élèves associent généralement au numérateur d'une fraction (m/n) un nombre m de parties d'un objet (une figure géométrique ou une collection de figures) et au

dénominateur de cette fraction, le nombre n total de parties de cet objet. L'élève E3 par exemple, peut illustrer ou utiliser une fraction (exemple : $3/4$) seulement si le nombre d'éléments de la collection ou de parties d'un objet est identique au nombre indiqué par le dénominateur (dans notre exemple : 4); si la collection comporte 8 éléments, cet élève élimine 4 éléments et hachure 3 éléments. L'élève E1 par contre, peut illustrer ou utiliser la fraction $3/4$ si le nombre d'éléments de la collection ou si le nombre de parties d'un objet est supérieur au nombre indiqué par le dénominateur de la fraction (le nombre d'éléments doit cependant être un multiple du dénominateur, par exemple : 8, 12, etc.). Toutefois, selon les conduites de cet élève, une interprétation partie-tout de la fraction $3/4$ est impossible malgré le fait qu'il réussisse à illustrer la fraction $3/4$ à l'aide d'une collection de 8 éléments : il hachure au total 6 éléments en réalisant d'abord deux sous-groupes de 4 éléments puis en hachurant 3 éléments dans chacun de ces sous-groupes. Pour cet élève, la tâche est alors terminée. Il affirme par contre que la fraction $3/4$ est représentée deux fois dans son dessin et que la fraction $6/8$ est la seule possible pour rendre compte de l'illustration (c'est-à-dire : dans chaque sous-groupe de 4 éléments, la fraction $3/4$ est illustrée et pour la collection de 8 éléments, seule la fraction $6/8$ peut être associée aux 6 éléments hachurés de la collection totale). Il semble évident que pour les élèves E1 et E3, l'emploi des fractions simplifiées pour exprimer les relations partie-tout ne peut être envisagé (par exemple : 6 éléments hachurés sont $3/4$ de la collection totale de 8 éléments).

Le second profil est celui des élèves E2, E4 et E5. Les connaissances de ces élèves sur les fractions ne sont pas comparables à celles démontrées par les élèves E1 et E3 du premier profil. Chez les élèves E2, E4 et E5 en effet, les relations partie-tout peuvent être exprimées par des fractions simplifiées dans diverses situations. Dans la situation-type que nous avons décrite à la section précédente, par exemple, ces différences à l'entrée entre les élèves sont déterminantes. Lors de cette situation, seuls les élèves du second profil tentent une interprétation multiplicative de la fraction $2/10$. Ces tentatives semblent possibles en raison du sens "partage-diviseur" qu'ils associent généralement au nombre indiqué par le dénominateur d'une fraction. Ainsi, dans la situation qui nous concerne, ces élèves peuvent concevoir que 5 cm puissent être partagés en 10 parties égales et que l'unité de mesure de ces parties puisse être autre que 1 cm. Les connaissances des élèves du premier profil que nous avons dégagées ne permettent pas une telle interprétation de la fraction.

VII. Les effets du contrat didactique et du temps didactique : quelques interventions-clés

L'extrait de protocole présenté à la page suivante reproduit les propos de la discussion tenue entre les élèves et l'enseignant-chercheur au terme de la seconde situation des activités de rééducation (dans le protocole, les codes E1 à E5 identifient les élèves et le code Exp, l'enseignant-chercheur). Les élèves avaient alors examiné plusieurs problèmes d'application linéaires semblables à ceux de la situation-type que nous avons déjà décrite. Dans les problèmes visités par les élèves, les transformations suivantes furent impliquées : $\times 1,5$; $\times 1,2$; $\times 1,6$; $\times 5$; $\times 1/2$.

Discussion au terme de la seconde situation

- 1 **E1:** Puis-je te poser une question?
- 2 **Exp:** Oui.
- 3 **E1:** Quand va-t-on arrêter les voiliers, quand allons-nous faire des fractions?
- 4 **Exp:** Nous avons là une question très intéressante.
L'**exp** répète la question et spécifie que **E5** a aussi formulé une question semblable lors d'une rencontre individuelle avec l'**exp**: **E5** spécifiait alors que les tâches consistaient davantage à faire des multiplications.
Fait-on vraiment des fractions?
- 5 **E5:** Oui, parce que c'est des nombres à virgule, des nombres à virgule c'est peut-être des fractions. Une demie ça peut être 0,5.
- 6 **E1:** Moi, j'ai demandé quand nous allons en faire des vraies! ... Ce que je veux dire c'est quand allons-nous faire des vraies fractions comme un tiers moins ...
- 7 **E5 à E1:** Ce qu'on fait, cela en est pareil!
- 8 **E1 à E5:** Non.
- 9 **Exp:** Comment convaincre E1 qu'en ce moment, même si nous ne faisons pas des soustractions ou des additions de fractions, nous faisons tout de même des vraies fractions.
- 10 **E4 à E1:** Une demie, peux-tu mettre cela en virgule?
- 11 **E5:** 0,5.
- 12 **E1:** Moi, je sais que c'est pareil, mais vous ne comprenez pas. Quand on va faire des vraies fractions comme dans la classe.
- 13 **E5 à E1:** C'est pareil!!
- 14 **E1 à E5:** NON!!
- 15 **E5:** Ici, on met des virgule à la place d'une barre!
- 16 **E1:** Eux (dans la classe), ils font comme des tartes ...
- 17 **E5:** Bien ici, un tiers de gâteau c'est la même affaire qu'en virgule.
- 18 **E2:** C'est plate les tartes!
- 19 **Exp:** Qui pense qu'ici, nous faisons des fractions?
- 20 **E1, E2, E4 et E5:** Oui.
- 21 **E3:** Moi, je suis pour **E1**.
- 22 **E1:** Oui, je sais qu'on en fait mais on n'avance pas.
- 23 **Exp:** Tu n'as pas l'impression d'avancer?
- 24 **E5 à E1:** Nous n'avons jamais d'examen, est-ce cela que tu veux dire?
- 25 **E3 à E5:** Toi là, tu parles trop!
- 26 **E5:** C'est vrai que je parle trop.
- 27 **Exp:** Vous voulez des examens?
- 28 **E3:** NON!
- 29 **E1:** Non, mais juste pour nous demander où nous sommes rendus, des examens qui comptent.
- 30 **E3 à E1:** Bien, là, je ne suis plus d'accord avec toi avec les examens.
- 31 **E4 et E5:** Oui, des examens.
- 32 **E1** explique à l'**exp** qu'il aimerait faire des fractions de la même manière que ce que l'**exp** demandait lors de l'examen écrit (N.B.: certaines des épreuves

pré-test sont conformes aux tâches scolaires). **Exp** explique la position de **E1** aux autres élèves.

33 **E4**: NON, je ne veux pas, je veux comme ce que nous faisons, avec des tableaux de nombres!

La discussion illustre bien comment l'approche rééducative a provoqué des ruptures importantes du contrat didactique dans lequel nos élèves sont habituellement engagés ; elle révèle également leurs résistances à changer leurs habitudes d'élèves en classe de mathématiques. Les interventions de l'enseignant-chercheur se sont avérées pertinentes pour permettre aux élèves et à l'enseignant-chercheur d'assumer les ruptures de contrat.

L'implication de tous les élèves à cette discussion montre bien l'importance qu'elle revêt à leurs yeux. Cette discussion a aussi permis une poursuite harmonieuse et efficace des activités de rééducation que nous avons planifiées. Dans cette discussion, on remarque que l'élève E1 veut discuter d'aspects qui semblent grandement constituer des irritants pour lui. D'abord, l'intervention de cet élève traduit la difficulté qu'il éprouve à se sentir à l'aise dans les situations auxquelles il fait face jusqu'à maintenant (voir lignes 1 et 3 du protocole). Les propos de cet élève sont rapidement appuyés par l'élève E3, élève qui éprouve bien des difficultés depuis le début des activités de rééducation à reconnaître dans les situations les fractions telles qu'il les connaît (ligne 21). Ce premier aspect irritant de l'approche rééducative n'est toutefois pas ressenti par tous les élèves. Ainsi, les élèves E2 et E4 jugent les situations stimulantes à cause sans doute de leur caractère inhabituel et non conforme à des situations déjà rencontrées, voire peut-être à des situations associées à des échecs (lignes 18 et 33). Il semble toutefois que le second irritant énoncé par l'élève E1 obtienne l'adhésion de la majorité des élèves, à l'exception (ouvertement déclarée) de l'élève E3. L'irritation dont nous font part les élèves E1, E4 et E5 s'appuie sur le cadre évaluatif des examens (lignes 24 et 31). Elle est selon nous davantage le reflet de la nécessité qu'ils éprouvent à ce qu'un marquage du temps didactique soit plus prononcé (lignes 22 et 29). Bien que les élèves E4 et E5 partagent ce dernier point de vue et nourrissent les mêmes reproches à l'égard du manque de contrôle de l'avancement du temps didactique, leurs conduites ultérieures ainsi que celles de l'élève E2, semblent toutefois montrer qu'il a été davantage important pour eux d'être confrontés à des tâches nouvelles et difficiles sur les fractions. D'où leur résistance à l'égard de l'optique proposée par l'élève E1 qui consistait à modifier les situations de rééducation de manière à revenir à des situations plus courantes sur les fractions (lignes 18 et 33).

Dans cette discussion entre les élèves et l'enseignant-chercheur, l'intervention de ce dernier semble avoir été pertinente à deux reprises. En effet, lorsque l'élève E1 fait part à l'enseignant-chercheur de son premier irritant, celui-ci accepte qu'une discussion ait lieu entre les élèves à l'intérieur des activités de classe, et il invite par la suite les élèves à se positionner (ligne 4). La seconde conduite intéressante de l'enseignant-chercheur a été celle de ne pas intervenir dans le débat. Les ruptures ont ainsi été assumées par les élèves eux-mêmes.

VIII. Conclusion

Globalement, les résultats de notre recherche montrent l'importance qu'il y a à aborder l'enseignement d'un savoir spécifique en mathématiques par des situations suffisamment complexes, même pour des élèves en difficulté d'apprentissage. En effet, dans l'analyse des conduites des élèves dans des tâches usuelles sur les fractions (avant et après l'enseignement), il nous a été possible de mettre en évidence des progrès importants, voire essentiels sur les différents sens et sur la structure multiplicative de la fraction. Nous avons pu aussi observer comment les contraintes notionnelles des situations d'enseignement utilisées ainsi que les interventions planifiées de l'enseignant-chercheur dans le déroulement des activités constituaient des leviers importants dans la construction de connaissances chez ces élèves. Ces résultats montrent bien la pertinence et l'efficacité des situations utilisées et de l'approche rééducative des difficultés que nous avons développée.

Au terme de cette recherche, il convient de rappeler l'importance des effets reliés au contrat didactique que toute entreprise de rééducation des difficultés d'apprentissage en mathématiques peut rencontrer ; les résistances au changement des situations didactiques peuvent être nombreuses chez les élèves en difficulté d'apprentissage. La recherche que nous avons réalisée montre toutefois l'importance de tenir compte de ces aspects dans l'élaboration des activités de rééducation. Il semble en effet que les activités de rééducation en mathématiques doivent proposer aux élèves des situations qui, tout en provoquant des ruptures au niveau des conceptions des élèves d'une situation d'apprentissage en mathématiques, se préoccupent également d'en contrôler le plus possible les effets, par une planification des interventions de l'enseignant notamment. Si dans la recherche que nous avons réalisée, nous avons grandement planifié les interventions de l'enseignant-chercheur, une étude plus approfondie des effets produits par l'ensemble des interventions effectives de ce dernier serait nécessaire pour mieux dégager celles qui se sont avérées déterminantes.

La recherche que nous avons effectuée montre enfin comment le choix du contenu notionnel des situations s'avère une variable importante d'une part, dans l'élaboration des activités de rééducation des difficultés d'apprentissage en mathématiques et, d'autre part, dans l'efficacité de celles-ci à permettre aux élèves de construire des connaissances essentielles en mathématiques.

Références

- Balka, D.S. (1993). Making the connections in mathematics via manipulatives, *Contemporary Education*, 65 (1), 19-23.
- Baruk, S. (1973). *Echec et maths*. Paris: Ed. du Seuil, 314 p.
- Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., Silver, E.A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press., pp. 92-144.
- Berdot, P., Blanchard-Laville, C., Mercier, A. (1988). Quelques éléments méthodologiques et théoriques issus de l'analyse de suivis individuels d'élèves en échec en maths. In Vergnaud, G., Brousseau, G., Hulin, M. (Eds) *Actes du Colloque de Sévres, Mai 1987, Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Ed. La Pensée Sauvage, pp. 325-337.
- Blouin, P. (1993). Enseignement de la notion de fraction à des élèves de première secondaire en difficulté d'apprentissage. *Thèse de doctorat*, inédite. 293 p.
- Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de Laryngologie-otologie-rhinologie*, 101, 3-4, pp. 107-131.
- Brousseau, G. (1981a). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2, No. 1 pp. 39-127.
- Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *IIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Orléans, pp. 93-102.
- Brousseau, G., Brousseau, N. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux 1, 535 p.
- Brousseau, G., Peres, J. (1981b). Le cas "Gaël". IREM de Bordeaux.
- Brown, J.S.; Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brun, J. (1991). Temps didactique et temps d'apprentissage. Communication à la Société Suisse pour la Recherche en Éducation (S.S.R.E.). Yverdon-les-Bains. Document inédit.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y., Mercier, A. (1987). Sur la formation historique du temps didactique. Marseille, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille.
- Conne, F. (1991). Projet Chamoyron, Document de travail inédit.
- Desjardins, M., Héту, J.C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Québec: Presse de l'université de Montréal.
- Fuson, K.C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers, in G. Leinhardt, R. Putnam et R.A. Hathrup (Eds): *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, (53-187). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum associates inc.

- Fuson, K.C.; Briars, D.J. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value, *Cognition and Instruction*, 7 (4), 343-403.
- Houdebine, J., Julo, J. (1988). Les élèves en difficulté dans le 1er cycle de l'enseignement secondaire: Pour une intervention didactique différenciée. *Revue Française de Pédagogie*, No. 84, pp. 5-12.
- Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In Hiebert, J., Behr, M. (eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Ass. pp.162-181.
- Kieren, T.E. (1976). On Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In LESH, R. (Ed.), *Number and Measurement; Papers from a research Workshop*. Columbus: ERIC/SMEAC.
- Lemoyne, G. (1987). Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. *Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la C.I.E.A.E.M.* Sherbrooke: Ed de l'Université. pp. 354-360.
- Lemoyne, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. *Repère*, No.12.
- Lemoyne, G., Blouin, P. (1997). Les élèves de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques dans l'ingénierie didactique. Genève:*Interactions didactiques*, Octobre, pp. 25-56.
- Mercier. A. (1992). Le temps didactique, le temps de l'enseigné, les élèves. *Séminaire de Didactique et Technologies cognitives en Mathématiques . Séminaires 1991-1992*. Université Joseph Fourier (Grenoble), pp. 291-320.
- Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities, *Journal of Learning Disabilities*, 23, 230-248.
- Ross R.; Kurtz, R. (1993). Making manipulatives work: a strategy for succes, *Arithmetic teacher*, 40 (5), 254-257.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathemaatical Problem Solving*, Orlando, FL, Academic Press, Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale NJ. : Lawrence Erlbaum Associates.
- Schubauer-Leoni, M.-L. (1986). Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques. *Journal Européen de Psychologie de l'Éducation*, 1, no.2, pp. 139-153
- Streefland, L. (1986). Rational Analysis of Realistic Mathematics Education as a Theoretical Source for Psychology: Fractions as a Paradigm. *Journal Européen de Psychologie de l'Education*, 1, No. 1, 67-82.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press., pp. 127-174.